

小規模河床形態と中規模河床形態の共存について

Study on superposition of dune and antidune on bars

北海道大学工学部 正 員 黒木 幹男
北海道大学大学院 学生員 村井 禎美
北海道大学工学部 正 員 岸 力

1. はじめに

河床波は小規模河床形態に属するものと、中規模河床形態に属するものとに分けられる。しかし、この2つの河床形態は全く異なる水理条件下に独立に存在するものではなく、かなり広範囲の水理条件下で共存が可能なのであることが、これまでの水路実験や実河川での観測から想像される。

1例として、石狩川下流部における観測事例を掲げる。昭和56年8月洪水の際中、および、その前後に実施された一連の観測資料を整理して、次のようなことが明らかになった。^{1), 2)}

- 1) 水位・流量の変化に応じて、流れの抵抗は小規模河床形態に特有な変化を示した。
- 2) 河床波の形状が、実際にも大きく変化している事がエコー・サウンダーによって確認された。
- 3) 表面流速の分布は、明瞭な単列蛇行を示しており、洪水前後の河床横断形には左右岸に顕著な交互深掘れが確認された。

これらの事実を総合すると、単列交互砂州の上に小規模河床形態（dune および transition と推定される）が共存していたと考えて差支えないであろう。

小規模河床形態は、流れの抵抗に支配的な役割を果たしており、中規模河床形態の上に共存するか否かによって河道の洪水疎通能力は大きく異なる。したがって、小規模河床形態と中規模河床形態の形成領域、すなわち、両河床形態の共存条件を明らかにすることは、河川工学上重要な課題である。

本研究は、第1着として小規模河床形態と中規模河床形態の形成機構を統一的に説明できるよう、理論の開発を行い、両河床形態が共存可能であることを示した。

2. 基礎方程式

河床形態の形成機構は、河床安定論にもとづいて説明するものが、比較的成功をおさめているようである。本研究においても、同様な立場から理論的な解析を進める。これまでの理論解析モデルでは、流れの解析において、小規模河床形態の場合には2次元せん断流モデル、中規模河床形態の場合には2次元浅水流モデルを採用して、現象の説明に成功している場合が多い。また、解析に用いる擾乱の形式は、小規模河床形態を対象にする場合には2次元擾乱、中規模河床形態を対象にする場合には3次元擾乱が採用されている。

しかし、小規模河床形態と中規模河床形態の共存を議論しようとする場合には、河床形態ごとに流れのモデルが異なるのは不都合である。ここでは、解析が比較的容易な2次元浅水流モデルを採用する。

直線・矩形水路を考え、座標系を図-1のようにとる。流れは擬似定常とすると、流れの運動方程式、連続式および流砂の連続式は次のように与えられる。

$$u \frac{\partial u}{\partial x_1} + v \frac{\partial u}{\partial x_2} = gI_0 - \frac{\tau_1}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial x_1} (h + \eta) \dots\dots\dots (1)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x_1} + v \frac{\partial v}{\partial x_2} = - \frac{\tau_2}{\rho h} - g \frac{\partial}{\partial x_2} (h + \eta) \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (uh) + \frac{\partial}{\partial x_2} (vh) = 0 \dots\dots\dots (3)$$

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{1}{1-\lambda} \left\{ \frac{\partial q_{B1}}{\partial x_1} + \frac{\partial q_{B2}}{\partial x_2} \right\} = 0 \quad \dots\dots (4)$$

ただし、 $u \cdot v$ は $x_1 \cdot x_2$ の方向の流速、 h は局所水深、 η は局所河床高、 $\tau_1 \cdot \tau_2$ 、 $q_{B1} \cdot q_{B2}$ はそれぞれ $x_1 \cdot x_2$ 方向の河床せん断力および掃流砂量、 λ は河床砂の空隙率、 I_0 は平均河床勾配、 g は重力加速度、 t は時間である。

いま、各変量を平坦床上の2次元等流（基本流）に対応する平均量とそれからの変動量に分けて、式(5)のように表わす。

$$\left. \begin{aligned} u &= U_0 (1 + \tilde{u}) & v &= U_0 \cdot \tilde{v} \\ h &= H_0 (1 + \tilde{\xi} - \tilde{\eta}) & \eta &= H_0 \cdot \tilde{\eta} \\ \tau_1 &= \tau_0 (1 + \tilde{\tau}_x) & \tau_2 &= \tau_0 \cdot \tilde{\tau}_y \\ q_{B1} &= q_{B0} (1 + \tilde{q}_{Bx}) & q_{B2} &= q_{B0} \cdot \tilde{q}_{By} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots (5)$$

ただし、平均量には添字0を付し、変動量には記号の上に $\sim$ を付して区別した。また、 $\tilde{\xi}$ は無次元水面変動量である。

式(1)、(2)、(3)および(4)に、式(5)の関係を代入し、変動量の2乗以上の項を無限して線型化するとともに、平均量の間に成立する関係式を差し引くと、変動量に対する関係式は次式ようになる。

$$F^2 \frac{\partial \tilde{u}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial x} + \tilde{\eta} - \tilde{\xi} + \tilde{\tau}_x = 0 \quad \dots\dots (6)$$

$$F^2 \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} + \frac{\partial \tilde{\xi}}{\partial y} + \tilde{\tau}_y = 0 \quad \dots\dots (7)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\tilde{u} + \tilde{\xi} - \tilde{\eta}) + \frac{\partial \tilde{v}}{\partial y} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial \tau} + \frac{q_{B0}}{(1-\lambda) U_0 H_0} \left\{ \frac{\partial \tilde{q}_{Bx}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{q}_{By}}{\partial y} \right\} = 0 \quad \dots\dots (9)$$

ただし、 $x = x_1/H$ 、 $y = x_2/H$ 、 $\tau = tU_0/H_0$ 、 $F^2 = U^2/gH_0$ である。

式(6)、(7)、(8)および(9)には8つの変動量が未知数として含まれており、方程式系を閉じるためにはさらに4本の関係式が必要である。本解析では、次のように与えた。

$$\tilde{\tau}_x = 2\tilde{u} + a_1 (\tilde{\xi} - \tilde{\eta}) + a_2 \frac{\partial}{\partial x} (\tilde{\xi} - \tilde{\eta}) \quad \dots\dots (10)$$

$$\tilde{\tau}_y = \tilde{v} + a_3 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad \dots\dots (11)$$

$$q_{Bx} = \frac{\tau_{*0}}{\phi_1(\tau_{*0})} \cdot \left(\frac{d\phi}{d\tau_*} \right)_{\tau_*=\tau_{*0}} \cdot \frac{\tilde{\tau}_x}{\rho s g d} - \phi_2(\tau_{*0}) \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial x} \quad \dots\dots (12)$$

$$q_{By} = \tilde{v} - a_4 \frac{\partial \tilde{\eta}}{\partial y} \quad \dots\dots (13)$$

ただし、

$$a_1 = \left\{ \frac{5}{1.0 + 2.5 \log(H/2d)} - \frac{4/3}{(1-\Delta_0)(1-\Delta_0/3)} \cdot \frac{2.5\Delta_0}{8.5 + 2.5 \log(H/2d)} \right\}$$

$$a_2 = \frac{4/3 \cdot a}{(1-\Delta_0)(1-\Delta_0/3)} \quad (a \approx 5 : \text{椿による})$$

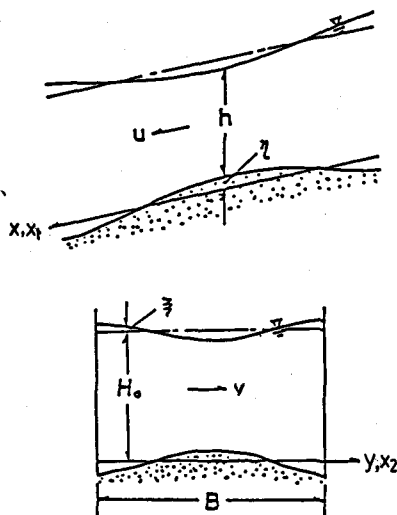


図-1 座標系

$$\Delta_0 = \frac{7.5}{8.5 + 2.5 \log(H/2d)} \quad : \text{河床欠速度}$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{0.7} \left(1 - 0.67 \sqrt{\frac{\tau_{*c0}}{\tau_{*0}}} \right) \frac{\tau_{*0} - \tau_{*c0}}{\tau_{*0}}, \quad \alpha_4 = 0.96 \sqrt{\frac{\tau_{*c0}}{\tau_{*0}}}$$

$$\phi_1 = 0.74 \frac{\tau_{*0} - \tau_{*c0}}{\tau_{*c0}} (\sqrt{\tau_{*0}} - 0.67 \sqrt{\tau_{*c0}})$$

$$\phi_2 = \frac{1}{0.7} + \frac{1}{0.7} \cdot \frac{\tau_{*c0}}{\tau_{*0} - \tau_{*c0}} + 0.48 \frac{\sqrt{\tau_{*c0}}}{\sqrt{\tau_{*0}} - 0.67 \sqrt{\tau_{*c0}}}$$

ここに、 $\tau_{*0} = \tau_{b0} / \rho s g d$ は無次元掃流力の平均値、 τ_{*c0} は無次元限界掃流力 (≈ 0.05)、 s 、 d は砂粒の水中比重および粒径。

式(10)は流れの抵抗則から導かれたものである。ただし、波状河床、特に小規模河床形態のように波長が短い場合には、流れが加速・減速を受けることにより水深方向の流速分布および抵抗則は平坦床のそれとは異なる。ここでは、椿ら³⁾の提案した方法に若干の修正を加えて導いた。

式(11)、(12)および(13)は、縦・横断方向に傾きを有する斜面上における砂粒の運動の解析⁵⁾から導かれたものである。

3. 河床安定解析

河床の局所変位 $\bar{\eta}$ を次式のように表わす。

$$\bar{\eta} = \eta_* \cos(\ell y) \cdot \exp\{ik(x - ct)\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

ただし、 $k \cdot \ell$ は $x \cdot y$ 方向の無次元波数であり、それぞれ次のように与えられる。

$$k = \frac{2\pi H_0}{Lx}, \quad \ell = \frac{2\pi H_0}{Ly} = \frac{m\pi H_0}{B}$$

$Lx \cdot Ly$ は $x \cdot y$ 方向の波長、 m は横断方向のモード(分割数)、 B は河幅、 C は無次元複素移動速度である。

式(14)は中規模河床形態の解析で普通に用いられる形式であるが、 $\ell = 0$ の極限を考えれば y 方向には一様な2次元擾乱を表わすことができる。

河床変位に誘起される変動量は、式(15)のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (\bar{u}, \bar{\xi}, \bar{\tau}_x, \bar{q}_{bx}) &= (\hat{u}, \hat{\xi}, \hat{\tau}_x, \hat{q}_{bx}) \cos(\ell y) \exp\{ik(x - ct)\} \\ (\bar{v}, \bar{\tau}_y, \bar{q}_{by}) &= (\hat{v}, \hat{\tau}_y, \hat{q}_{by}) \sin(\ell y) \exp\{ik(x - ct)\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、記号の上に $\wedge$ を付したものは振幅を表わすが、 $\bar{\eta}$ との位相差を含んでおり複素数である。

式(14)および(15)を、第2節の基本式(6)、(7)、(8)、(9)、(10)、(11)、(12)および(13)に代入する。連立方程式に有意な解が存在するための条件として、係数マトリックスのディターミナントが恒等的に零になることが必要である。この条件式を整理すると、複素移動速度 $C = C(\tau_{*0}, I_0, k, \ell)$ が求まる。

図-2・3に河床擾乱が不安定 ($kC_i > 0$) となる範囲を計算した例を示す。図-2は $I = 0.002$ 、 $\tau_{*0} = 0.10$ の計算例で、流れは常流 ($F = 0.684$) である。また、図-3は、 $F = 0.002$ 、 $\tau_{*0} = 5.0$ で流れが射流 ($F = 1.122$) の場合の計算例である。図の両軸上に等間隔(対数上で)に計算点を選び、格子点上の増幅率 kC_i 、および移動速度 C_r を計算した。図中、+の記号は、 $kC_i > 0$ 、 $C_r < 0$ 、#の記号は $kC_i > 0$ 、 $C_r > 0$ を表わし、 $kC_i \leq 0$ の場合は空白としてある。

この2つの計算例に示された不安定領域は、以前著者らが中規模河床形態を対象にした解析⁵⁾で得たものと比較すると幾つかの特長がある。

第1は、常流における計算例で、 $k > 10^{-1}$ の比較的縦断方向の波数の大きな(従って、波長の短い)擾乱の不安定領域が存在することである。このような不安定領域は、以前の著者たちの解析では認められなかったもの

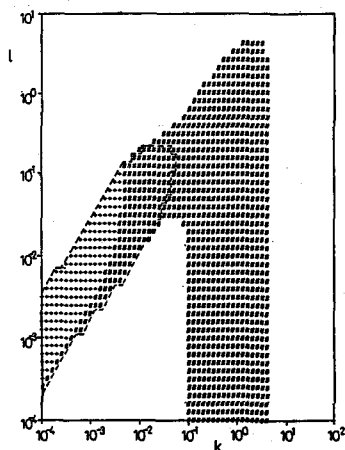


図-2 不安定領域 ($I_0=0.002, \tau_{90}=0.1$)

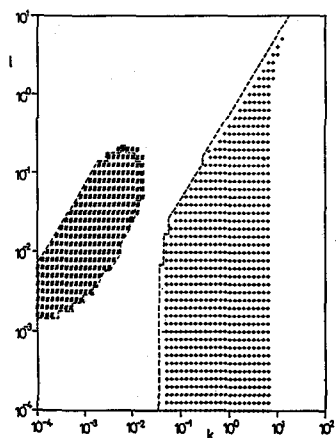


図-3 不安定領域 ($I_0=0.002, \tau_{90}=5.0$)

である。

第2は、射流の場合の計算例においても、同じように k の大きな部分に不安定領域が存在することである。著者の以前の解析でも、射流の場合には k の大きな部分に不安定領域が存在したが、 k をどのように大きくとっても不安定であり、物理的に意味が不明瞭で解析から除外していた。これに対して、本解析では、 k の有限な範囲でのみ不安定が生じているのが特長である。

第3は、上で着目した不安定領域が k の有限の範囲にあることと表裏の関係にあることではあるが、増幅率の極大値が存在し、卓越波長が求め得ることである。これは $\ell=0$ の極限においても可能である。

4. 河床擾乱の不安定領域

不安定領域の形成要因を、著者の以前の解析と比較しながら、もう少し詳しく調べてみる。本解析で用いている基本式でこれまでのものと大きく異なるのは、式(10)および(12)である。すなわち式(10)では縦断方向の水深変化を表す第3項が加わっていること、式(12)では、縦断方向の河床勾配を表す第2項が加わっていることである。両式中の他の項は抵抗則や流砂量式の表現が異なるが基本的には変化がない。

いま、 α_2 および ϕ_2 をともに零として不安定領域を計算すると、図-2・3中の破線のようにになる。 k の小さい方の不安定領域には大きな k が認められない。図-2では k の大きな方に不安定領域が存在しない。図-3では k の大きな方の不安定領域が $k \rightarrow \infty (\ell \rightarrow \infty)$ にまで拡大している。 α_2 のみを零とした場合には、図-2の右側の不安定領域は全く存在なくなり、図-3の右側の不安定領域が k の大きな方に拡大する。これに対して、 ϕ_2 のみを零とすると、図-2の k の大きな方にも不安定領域が形成されるが、 $k \rightarrow \infty (\ell \rightarrow \infty)$ に至る全域が不安定となる。また、図-3でも、 k の大きな方の不安定領域は $k \rightarrow \infty$ まで不安定となる。

この計算の結果から、式(10)の第3項(α_2)を導入したことは、Lower regimeの高波数域での不安定作用を増大させることに、また、式(12)の第2項(ϕ_2)の導入は、Lower regimeおよびupper regimeともに高波数域での安定化作用を増大させることに、それぞれ寄与していることが判る。

$\alpha_2=0$ 、 $\phi_2=0$ とした計算は、著者の以前の解析と基本的に同じであり、得られる不安定領域もほとんど区別がつかない位に似ている。このことから、 k の小さい方の不安定領域は、中規模河床形態に対応するものと考えてよい。 k の大きな方の不安定領域は、 k の大きさは小規模河床形態のそれと同程度のオーダーの範囲にあり、しかも擾乱の進行方向 ℓ 、upper regimeでは上流、lower regimeでは下流に向っており、それぞれ antidune および dune に要求される特性を備えている。また、図-2、3では $\ell=0$ の状態は示されていないが、不安定を与える k の範囲は ℓ が小さくなるとほとんど変化せず、 $\ell=0$ においても不安定が

存在する。

従来の理論解析の伝統的な取扱いでは、小規模河床形態は $\ell=0$ の2次元擾乱の不安定域をもって議論がなされている。この限りでは、図2・3に例示されるように、同一の水理条件下で、 k の小さな範囲に中規模河床形態に相当する不安定領域、 $\ell=0$ で k の大きな範囲に小規模河床形態に相当する不安定領域がそれぞれ形成されており、ひとまず、河床形態の共存を理論的に示し得たことになる。

5. 小規模河床形態の卓越波数

中規模河床形態の不安定領域は、上述のように本解析の結果は著者らの次前の解析結果とほとんど変わらない。したがって、以下では小規模河床形態の不安定領域を対象に、まず、卓越波数について調べる。

増幅率 kC_i と波数 k の関係を、 $\ell=0$ の場合について計算すると図-4のようになる。図は $I_0=0.002$ 、 $\tau_{*0}=0.10$ の場合の例である。実線で示したのが、本理論による計算結果である。実線は、上に凸の滑らかな山形を呈しており、卓越波数を

$$\frac{\partial(kC_i)}{\partial k} = 0$$

を与える k の値と定義すると、これを求めることができる。ちなみに、 $\phi_2=0$ とすると、図-4の破線のように k の増加とともに単調増加する。

本解析から得られる小規模河床形態の卓越波数を図-5に示す。2次元セン断流モデルによる林らの解と比較するため、 I_0 の代りに相対水深 H_0/d をパラメータにして示した。

図中、 τ_{*0} の小さい方に示される曲線群は $Cr>0$ で、duneの卓越波数を与える。また、 τ_{*0} の大きな方の曲線群は $Cr<0$ で、antiduneの卓越波数を与える。本解析で $\ell=0$ は流れを1次元で表現したことであり、このような簡易なモデルで小規模河床形態の卓越波数を求め得たものはこれまでにない。その意味ではひとまず目的を達し得たわけである。しかし、細部については、十分説明できない所も少なくないようである。

林らの解析では、duneの卓越波数が連続的に変化するの、 $200 \leq H_0/d \leq 500$ の場合に限られ、 $H_0/d \geq 750$ での様子は大きく異なる。林らの主要な結論の1つであるrippleとduneの共存についてはしばらく置き、duneのみに限っても、 $H_0/d \geq 750$ では、 $\tau_{*0} \approx 0.1$ 以下では卓越波数が存在しない。これに対して、本解析では $\tau_{*0} = 0.05$ の限界状態まで卓越波数が存在する。

また、antiduneの卓越波数について、林らの結果と比較すると変化の程度がやや緩やかである。林らの解析では $H_0/d \geq 750$ では、antiduneの卓越波数は存在しないが、本解析ではそのような制限の存在は確かめられなかった。

さらに、本解析では $H_0/d = \text{const.}$ の場合、duneとantiduneが同時に存在するような τ_{*0} の値は存在しないが、林らの解析では、 $H_0/d \leq 500$ ではそのような共存の可能性も指摘されている。

6. 小規模河床形態の領域区分

同様に、小規模河床形態を $\ell=0$ の擾乱と対応づけ、形成領域区分を検討する。図-6は、 $\ell=0$ の場合の不

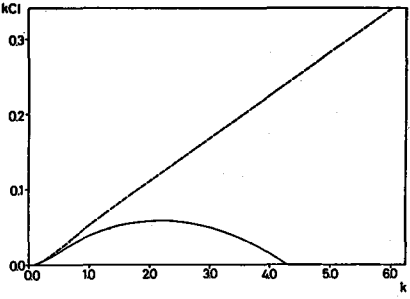


図-4 増幅率 ($I_0=0.002$ $\tau_{*0}=0.1$)

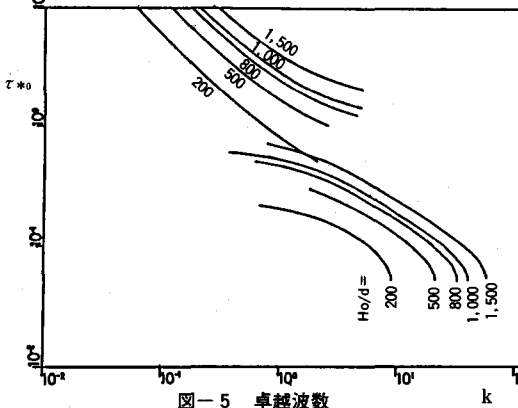


図-5 卓越波数

安定領域の計算例を示している。図中 $\tau_{*0} \leq 0.05$ を τ_{*0} の記号は $kCi > 0$ 、 $Cr < 0$ でantiduneの不安定域を τ_{*0} の記号は $kCi > 0$ 、 $Cr > 0$ でduneの不安定域をそれぞれ表わす。

図では τ_{*0} の小さな方にduneの不安定域、 τ_{*0} の大きな方にantiduneの不安定域がそれぞれ形成されている。この図からduneの形成される τ_{*0} の最大値、antiduneの形成される τ_{*0} の最小値がそれぞれ定義できる。勾配 I_0 を変えて同様の計算で繰返せばduneおよびantiduneの形成限界を τ_{*0} 、 I_0 を用いて求めることができる。

図-7は、上の計算結果をGarde-Rajuタイプの区分図に書き直したものである。実線が本解析から保られた形成限界区分線である。図中には、Gilbert, chang et. al.などこれまでに発表されて水路実験の資料も併せてプロットしてある。

理論と実験値を比較すると、理論ではduneとantiduneの形成領域の中間に明瞭な擾乱の安定域(平坦河床)が存在する。これに対して、水路実験の値はduneとantiduneの形成領域がきわめて接近しており、平坦河床だけの形成領域が認められない。図中にはプロットしていないが、平坦河床、遷移河床の形成領域を資料から調べると、duneとantiduneの区分線を中心に、オーバーラップして存在する。

本解析も含めてこれまでのほとんどの理論解析は、資料に見られる異種の河床波の形成領域の重複は説明できない。

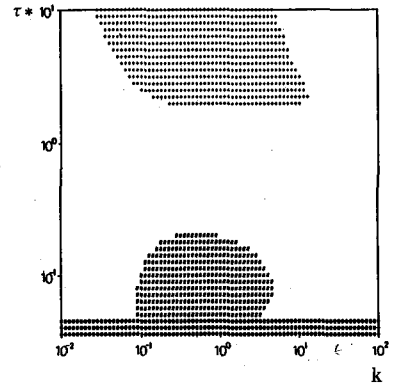


図-6 不安定領域($I_0=0.002$, $\ell=0$)

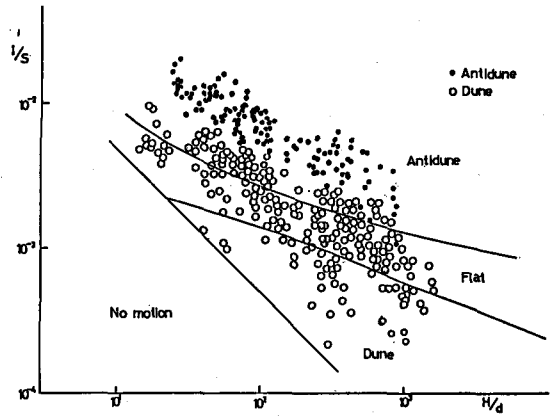


図-7 小規模河床形態の領域区分図

7. む す び

本解析では、2次元浅水流モデルを用いて中規模河床形態と小規模河床形態の共存が可能なことを理論的に示した。小規模河床形態は $\ell=0$ の擾乱を対象に解析を進めた。しかし、図-2・3にも示されているように高波数域には、 $\ell \neq 0$ の3次元擾乱の不安定域が存在する。水路実験でも、3次元性の強い小規模河床形態は数多く存在することが確認されており、今後は河床波の3次元性をも考慮して小規模河床形態の解析を進めることが必要になろう。

参 考 文 献

- 1) 黒木幹男、岸力：石狩川の抵抗特性と河床波形状の変化、第27回水理講演会論文集、1983
- 2) 黒木幹男、岸力：洪水時の河川流の蛇行について、第20回自然災害科学総合シンポジウム講演論文集、1983
- 3) 椿東一郎、齊藤隆：流れによるSand waveの発生限界、九大工学集報、1967
- 4) 村井禎美、黒木幹男、岸力：縦横断勾配を持つ斜面上の砂粒運動、第39回土木学会年次学術講演会講演概要集 1984
- 5) 黒木幹男、岸力：中規模河床形態の領域区分に関する理論的研究、土木学会論文報告集No.342、1984
- 6) 林泰造、大西光陽：せん断流モデルによる2次元河床波発生の理論的研究、第25回水理講演会論文集、1981