

差分法による壁面密度噴流の平均流解析 Finite Difference Analysis of Buoyant Wall Jet Flow

長岡技術科学大学 建設系 正員 早川典生
長岡技術科学大学 大学院 学生員 中島卓夫

1. はじめに

壁面密度噴流は、自然界においてよく観察される現象である。貯水池に流入する濁水流や、斜面に沿って吹き降りる寒気流、LNG貯蔵所からの冷排水はその例である。

前報¹⁾では、壁面密度噴流に対して相似解を導入し、解析している。しかし、相似解の欠点として、(1) 流れの全領域を解析出来ず、(2) パラメータの数が多くその決定が困難であり、(3) 壁面で数学的特異性があり、対数則をほとんどの場合適用出来ないなどがあげられる。近年、境界層型乱流の基礎方程式を、差分法で直接数値解析する手法が開発され、種々の問題に威力を発揮している²⁾。本研究では、この手法を壁面密度噴流に適用し今までの研究結果、及び実験結果と比較してみる。

計算に用いた乱流モデルは、混合長モデルと、より高度な $k-\epsilon$ モデルで、それぞれのモデルによる予測値を実験値と比較し、モデルの妥当性を検討する。

又、現在までに傾斜した壁面上を流下する密度噴流の実験はあまり行われていないようなので、傾斜板の角度が水平に対して 30° の実験を行ない、計算値と比較する。一方、壁面が鉛直の場合の実験値は、前報¹⁾より引用する。

2. 実験結果

実験装置は、幅30cm 高さ100cm 水平方向180cmの水槽に傾斜を水平に対して 30° の角度で取り付けた。実験装置の概要を図1に示す。

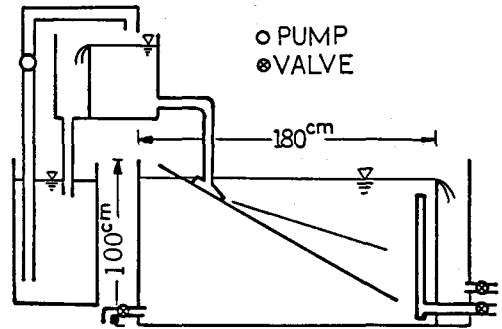


図1 実験装置概要図

実験は、高さ： $b_0 = 0.9\text{ cm}$ のスロットから初期相対密度差： $F_0 = 0.0200$ の塩水を、初期流速： $U_0 = 38.30\text{ cm/s}$ で放出して計測を行なった。流速の測定には、径3mmのプロベラ流速計、相対密度差の測定はサイフォン採水により行ない、底部からの噴流層の再上昇による影響がない様、十分注意を払った。

実験結果を図2～図4に示す。

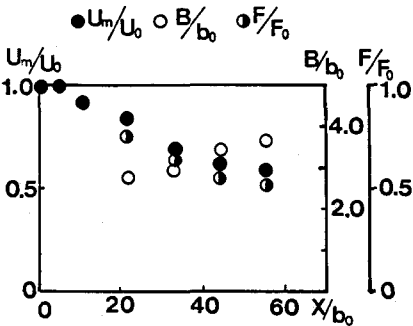


図2 各特性値の流下方向への変化

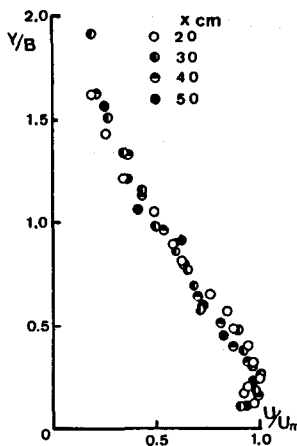


図3 流速分布

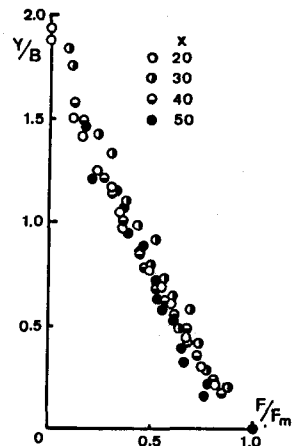


図4 相対密度差の分布

図2は、断面内最大流速 U_m 、断面内最大相対密度差 F_m 及び半値半幅 B （流速が U_m の半分となる外層側の位置）の流下方向への変化を示したものである。尚、 b_0 はスロットの高さである。相似解が成立するのは、 $B \propto x^1$ 、 $U_m \propto x^0$ 、 $F_m \propto x^{-1}$ の所であるので、 x/b_0 が40程度から相似解が成立すると思われる。

図3、図4は、それぞれ、流速分布、相対密度差の分布を示したものである。縦軸は半値半幅 B を用いて無次元化を行っており、横軸はそれぞれ U_m 、 F_m を用いて無次元化してある。

3. 数値計算

3-1 座標系及び基礎式

座標系を図5に示す。流下方向を x 、壁から垂直の方向を y とし傾斜板の水平方向からの傾きを α とする。

境界層近似を行なった後の基礎式を式(1)~(4)に示す。

・連続式

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

・X方向運動方程式

$$U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_{\text{eff}} \frac{\partial U}{\partial y} \right) + F g_x \quad (2)$$

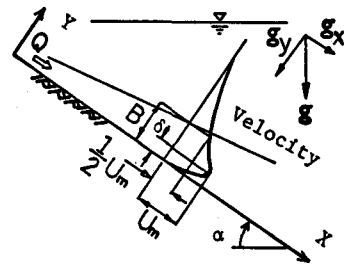


図5 座標系

・拡散方程式

$$U \frac{\partial F}{\partial x} + V \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_{\text{eff}}}{\sigma_t} \frac{\partial F}{\partial y} \right) \quad (3)$$

(3)式中、 F は相対密度差で次式により定義される値である。

$$F = \frac{\rho - \rho_0}{\rho} \quad (4)$$

乱れエネルギー k 、及び乱れエネルギーの逸散率 ϵ についての式は、次の様に提案されている。

・ k 方程式

$$U \frac{\partial k}{\partial x} + V \frac{\partial k}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_{\text{eff}}}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial y} \right) + \nu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + g_y \frac{\nu_{\text{eff}}}{\sigma_t} \frac{\partial F}{\partial y} - \epsilon \quad (5)$$

・ ϵ 方程式

$$U \frac{\partial \epsilon}{\partial x} + V \frac{\partial \epsilon}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\nu_{\text{eff}}}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial y} \right) + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} \left\{ \nu_{\text{eff}} \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + g_y \frac{\nu_{\text{eff}}}{\sigma_t} \frac{\partial F}{\partial y} \right\} (1 + C_{3\epsilon} R_t) - C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} \quad (6)$$

噴流の様に流れの領域が増大する流れを差分法で解く場合、 $x-y$ 座標系で差分化すると、 y 方向の格子点が不経済となる。これを避けるため、Patankar-Spalding²⁾の方法に従って方程式を座標変換する。 y 方向の格子点数を一定として流れの全領域を解くため、流れ関数の無次元化した値を y 方向の独立変数とする。

流れ関数は次式により示されるものとする。

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = \rho U \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = -\rho V \quad (7)$$

境界での ϕ の値をそれぞれ、 ϕ_0 、 ϕ_1 とすると

$$\omega = \frac{\phi - \phi_1}{\phi_0 - \phi_1} \quad \text{である。} \quad (8)$$

ここで ω は無次元化した流れ関数であり、 y 方向の独立変数として用いる。

この ω を用いて、式(2)~(6)を整理すると

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \left\{ \frac{m_1 + \omega (m_E - m_1)}{\phi_E - \phi_1} \right\} \frac{\partial U}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 U \nu_{eff}}{(\phi_E - \phi_1)^2} \frac{\partial U}{\partial \omega} \right\} + \frac{F}{U} g_x \quad (9)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \left\{ \frac{m_1 + \omega (m_E - m_1)}{\phi_E - \phi_1} \right\} \frac{\partial F}{\partial \omega} = \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 U \nu_{eff}}{(\phi_E - \phi_1)^2} \frac{\partial F}{\partial \omega} \right\} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial k}{\partial x} + \left\{ \frac{m_1 + \omega (m_E - m_1)}{\phi_E - \phi_1} \right\} \frac{\partial k}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 U \nu_{eff}}{(\phi_E - \phi_1)^2} \frac{\partial F}{\partial \omega} \right\} + \frac{\rho^2 U \nu_{eff}}{(\phi_E - \phi_1)^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 \\ &+ \frac{\rho g_y \nu_{eff}}{\sigma_t (\phi_E - \phi_1)} \frac{\partial F}{\partial \omega} - \frac{\varepsilon}{U} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} + \left\{ \frac{m_1 + \omega (m_E - m_1)}{\phi_E - \phi_1} \right\} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} &= \frac{\partial}{\partial \omega} \left\{ \frac{\rho^2 U \nu_{eff}}{(\phi_E - \phi_1)^2} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \omega} \right\} + C_{1\varepsilon} \frac{\varepsilon}{k} \left\{ \frac{\rho^2 U \nu_{eff}}{(\phi_E - \phi_1)^2} \left(\frac{\partial U}{\partial \omega} \right)^2 \right\} \\ &+ \frac{\rho g_y \nu_{eff}}{\sigma_t (\phi_E - \phi_1)} \frac{\partial F}{\partial \omega} \left\{ (1 + C_{3\varepsilon} R_f) - \frac{C_{2\varepsilon}}{U} \frac{\varepsilon^2}{k} \right\} \end{aligned} \quad (12)$$

上式中、 m_1 、 m_E はそれぞれ内側境界、外側境界からの連行量を示したもので

$$m = \rho V \quad (13) \quad \text{である。}$$

この値は、壁面密度噴流の場合、次式により求められる¹⁾。

$$m_E = -2 \rho_E l_E^2 \left. \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} \right|, \quad m_1 = 0 \quad (14)$$

3-2 有効粘性係数の評価

流れに作用する粘性係数としては、分子粘性係数と渦粘性係数があるが、計算している領域では、渦粘性係数の方が、十分大きいと考える。

a) 混合長モデル

渦動粘性係数は、混合長 l_m を用いて、次の様に定義する³⁾。

$$\nu_{eff} = \nu_t = l_m^2 \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \quad l_m = \begin{cases} \kappa y & (0 < y \leq \lambda y_1 / \kappa) \\ \lambda y_1 & (\lambda y_1 / \kappa < y) \end{cases} \quad (15)$$

上式中、 κ はカルマン定数。 λ は定数。 y_1 は特性厚さである。

(15)式は、流速が最大となる点で $\nu_t = 0$ となるが、これは妥当でないので、 $U = U_m$ の点の近傍では、 $\nu_t = \text{const}$ として計算を行なった。図6は本モデルにおける渦動粘性係数の概略図である。

b) k- ε モデル

k- ε モデルにおいて、渦動粘性係数は次式の様に定義される。

$$\nu_t = C_\mu \frac{k^2}{\varepsilon} \quad (16)$$

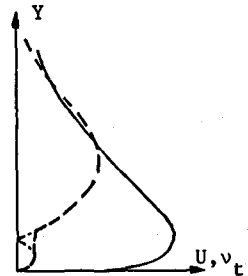


図6 渦動粘性係数の概略図

3-3 初期条件、及び境界条件

初期条件としては、矩形の流速分布、密度分布をもつ流体が、スロットから放出される場合を考えた。ただし、k- ε モデルの場合、モデルの安定性を考慮し、ある程度の距離流下するまで混合長モデルを用いて計算し、その結果を初期値として用いた。

境界条件としては、壁での条件と、自由境界での条件が必要である。壁面での条件としては、混合長モデルでは、流速分布にベキ乗則を適用した。すなわち、

$$U \propto |(y - y_w)|^\beta \quad (17)$$

一方、k- ε モデルの場合は、対数則を用いた。

$$\frac{U}{U_r} = \frac{1}{\kappa} \ln(y^+ E) \quad (18)$$

上式中, $U_r = \sqrt{\frac{C_f}{2}} U_m$, $C_f = \tau_w / \frac{1}{2} \rho U_m^2$, E : 粗度パラメータ
 $y^+ = U_r \cdot y / \nu$

又 $k = \frac{U_r^2}{\sqrt{C_\mu}}$, $\epsilon = \frac{U_r^3}{\kappa y}$ として。 (19)

一方, 自由境界においては, すべての従属変数が, 外部流れの条件と一致するものとして計算を進めた。
 k と ϵ の境界での値は, Rodi らの論文³⁾より

$$k = -\overline{u'v'} / 0.24, \quad -\overline{u'v'} = \nu_t \left(\partial U / \partial y \right), \quad \nu_t = l_m^2 \left| \partial U / \partial y \right| \quad (20)$$

$$\epsilon = C_\mu k^2 / \nu_t \quad (21) \quad \text{により決めた。}$$

ϵ 方程式の生成項に出てくるフラックスリチャードソン数 R_f は, $\overline{v'^2}$ (y 方向流速の変動成分によるレイノルズ応力) に関する応力方程式中の浮力項 ($\text{Prod } \overline{v'^2}$) と, k 方程式中の生成項と浮力項の和 ($P + G$) との比である。すなわち

$$R_f = \frac{1}{2} \cdot \frac{\text{Prod } \overline{v'^2}}{(P + G)} \quad (22)$$

ここで, $\text{Prod } \overline{v'^2} = 2 \beta g_y \overline{v' F'} = 2 g_y \frac{\nu_t}{\sigma_t} \frac{\partial F}{\partial y} = 2 G$

よって $R_f = \frac{-G}{(P + G)} \quad (22')$

各方程式における, 係数は, 論文^{2) 3)}より表1の値を用いる。

σ_t	κ	C_μ	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$	$C_{3\epsilon}$	σ_k	σ_ϵ
0.8	0.435	0.09	1.44	1.92	0.8	1.0	1.3

表1 各係数の値

4. 計算結果

数値計算は, 主に混合長モデルを用いて行ない, $k-\epsilon$ モデルは, 傾斜角 30° の場合について計算した。以後, 計算値と実験値を比較してみる。

4-1 鉛直壁面密度噴流

図7は, 前報¹⁾の実験データと, 今回行なった混合長モデルにより求めた各特性値の流下方向への変化を示したものである。計算は, スロット出口で(スロット幅 $b_0 = 0.3 \text{ cm}$) 初期流速 $U_0 = 19.0 \text{ cm}$, 初期相対密度差 $F_0 = 0.01411$ の矩形分布を与え行なった。各特性値は実験値と少々異なるが, これは, スロット近くでの連行量が矩形の分布を与えたため, 不正確になるためだと思われる。一方, 測定区間 ($50 < x/b_0$) では, $U_m \propto x^0$, $B \propto x^1$, $F_m \propto x^{-1}$ であるので, 相似解の成立する領域であると考えられる。計算値は, 各特性値に同様の変化がみられ, 差分法によってもほぼ相似な解が得られる事が分かった。

図8, 図9はそれぞれ, 流速分布, 相対密度差の分布を示したものである。図中の実線は, 著者ら¹⁾による相似解を示しており, 破線は $x/b_0 = 70$, 一点鎖線は $x/b_0 = 185$ での計算値を示したものである。 $x/b_0 = 70$ と $x/b_0 = 185$ の解はほぼ一致しており相似解が成立している事を示している。今回混合長モデルにより行なった計算値の流速分布については, 良好な一致を示しており, 相対密度差の分布も相似解とほぼ同程度の解を得ている。

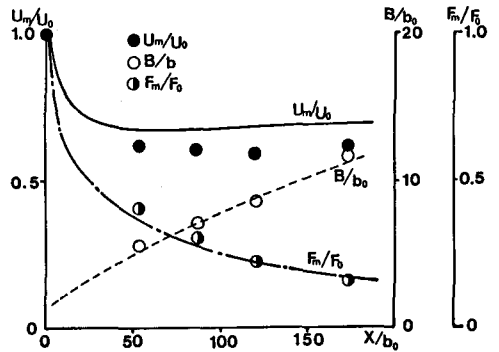


図7 各特性値の流下方向への変化

4-2 傾斜角 30 度の壁面密度噴流

図10は、傾斜板の角度が 30° の場合の計算値を実験値と比較したものである。この場合、浮力が拡がりをおさえる様に働くので、鉛直の場合と同じ係数を用いて計算すると、拡がり率が大きくなる。(Case 1) そこで、これを補正する目的で、外層部の混合長を小さめに評価する事を考えた。Case 2 は λ を 0.0725 にした場合の計算値を示したものである。Case 2 の方が、実験値により近い値を示している。

図11は、 $k-\varepsilon$ モデルによる結果を示したものである。その初期値には、混合長モデル (Case 2) の $x=23.3\text{ cm}$ の結果を用いた。又、 ε の初期値には、 k 方程式中の生成項の値を与え、 k は、 ε と混合長モデルによる渦動粘性係数から逆算して決定した。計算結果は、混合長モデルとほぼ同じ結果を示している。なお、計算開始直後に U_m が低下するのは、初期値が完全でないため、初期値に十分正確な値を与えたならば、混合長モデルと同様の値を示すと思われる。

図12、図13はそれぞれ、流速分布、相対密度差分布の計算値を示したものである。図上で実線は、混合長モデル、破線は $k-\varepsilon$ モデルによる予測値である。両方のモデルとも、かなり良好な一致を示している。特に相対密度差の分布形は、測定値と非常によく一致しており、 F_m が一致すれば、予測値は測定値と完全に一致するものと思われる。

図14は、渦動粘性係数の計算値を示したものである。縦軸は無次元化した断面方向の位置を、横軸は、 U_m と B を用いて無次元化した渦動粘性係数の大きさを表わしている。混合長モデル、 $k-\varepsilon$ モデルともなめらかで、ほぼ同様の曲線を示している。

図15は、混合長モデルによって求めた、各断面での横断方向単位長さ当りの流量 q と連行量 dq/dx 及び連行係数 α を示したものである。

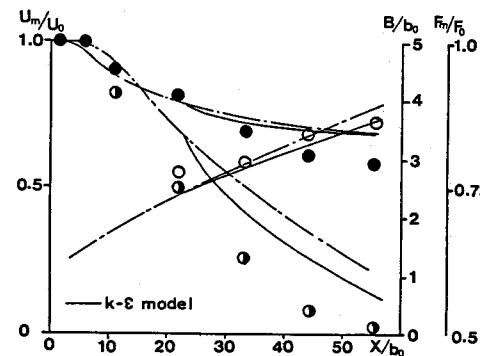


図11 各特性値の流下方向への変化

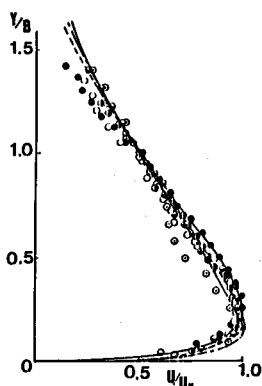


図8 流速分布

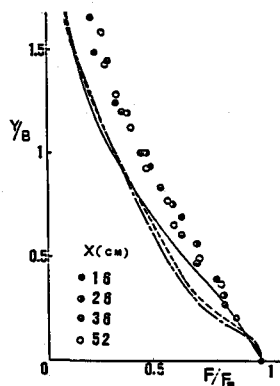


図9 相対密度差の分布

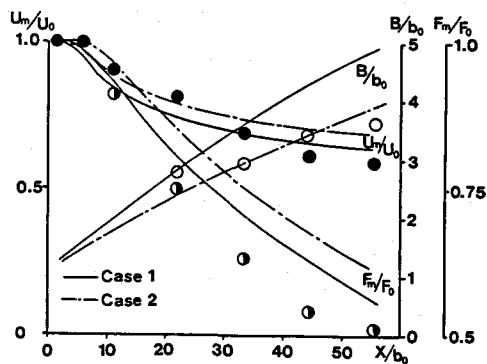


図10 各特性値の流下方向への変化

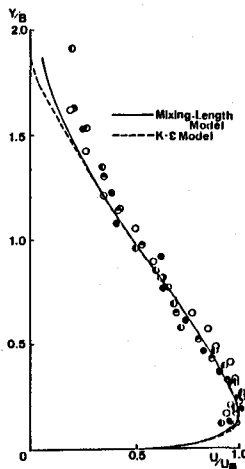


図12 流速分布

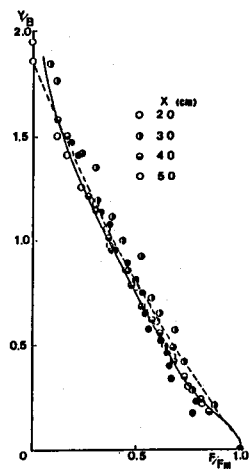


図13 相対密度差の分布

である。ここでは、 α は次式で定義する。

$$\alpha = \frac{1}{U_m} \frac{dq}{dx}$$

図上の丸印は、測定した流速分布から求めた流量を示したもので、計算値とはほぼ一致している。一方連行量は、流下するに従い、減少するが、連行量と最大流速の比である連行係数 α が、 $x=10\text{ cm}$ 以上で一定値($\alpha=0.035$)となっているので、連行量は最大流速に比例していると言える。

5. 結 論

- 1) 今回用いた混合長モデルの予測値は、実験値とよく一致しており、十分妥当性があると言える。
- 2) この計算法では連行量を自動的に算出する様になっており、これについての入力が必要としない点ですぐれている。
- 3) 今回の計算により、壁面密度噴流の相似性が計算の上からも確認された。

今後の検討課題としては

- 1) 予測された各特性値のうち F_m については、全体的に予測値の方が大きい値を示す。この誤差は、シュミット数の値を小さくする事により減少させることが出来ると考えられる。これが妥当かどうかを今後検討する。
- 2) 今回混合長の浮力による補正を、 λ の値を変える事により行なった。浮力による混合長の補正式としては、Monin-Ovukov 式等がある。浮力による補正の度合いは、リチャードソン数により変化すると思われる。今後、この点について検討する。

本研究の一部は、文部省 科学研究費補助金(エネルギー特別研究)の援助を受けて行なった。

参考文献

- 1) 福嶋, 福永, 早川: 鉛直壁面密度噴流に関する研究, 第28回水理講演会論文集, pp 303-310, 1984
- 2) S.V. Patankar and D.B. Spalding: Heat and Mass Transfer in Boundary Layers, 2nd ed, Intertext, London, 1970
- 3) M. Ljuboja and W. Rodi: Prediction of Horizontal and Vertical Turbulent Buoyant Wall Jets, Journal of Heat Transfer, 103, pp 343-349, 1981
- 4) 中島, 早川, 福永: 鉛直壁面密度噴流の平均流解析, 第39回年次学術講演会講演概要集, pp 493 - 494, 1984

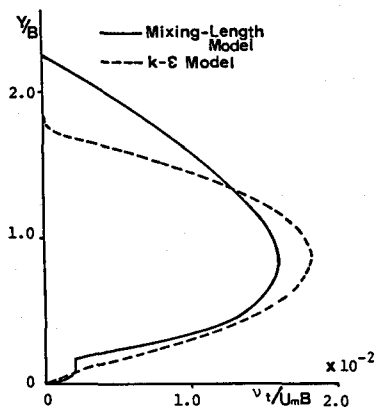


図14 渦動粘性係数の分布

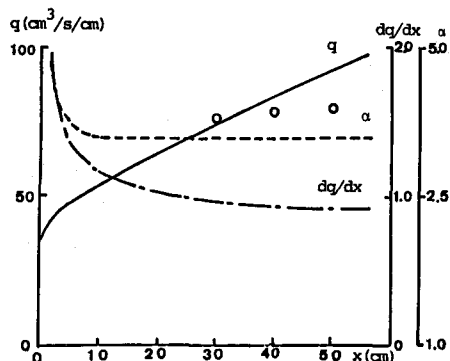


図15 流量, 連行量の流下方向への変化