

自然調節型貯留施設に対する等危険度線理論の拡張

An Extended Theory of Equi-Risk Line Applicable to General Storage-Release Relation

近畿大学理工学部 正員 江藤剛治
 大阪大学 工学部 正員 室田 明

1. はじめに

都市河川の流出抑制手段として種々の貯留施設が候補に上げられている。これらの多くは小規模で、人為的な放流操作のための設備を備えていない。よって河道から横越流によってピーク付近の流量をカットし、河道外の遊水地に貯留するような場合を除いて、一定量放流のような効率的な放流方式ではなく、図-1.bに示すように自然な貯留調節機構によって流出を抑制する。本論文では等危険度線の理論¹⁾²⁾をこのような自然調節型貯留施設に対しても適用できるように拡張する。

2. 理 論

2.1 一定量放流 ($p = 0$) の場合

貯留施設の下流に残流域がない場合について、理論の導出仮定は省略しその結果のみを示す¹⁾。

一定量放流に対する等危険度線の式は、

$$z_0/z\% = \{ (y_0^s - y_0) / y_0^s \}^s, \quad (s = 2 \sim 3) \quad (1)$$

ここに y_0 , z_0 はそれぞれ排水施設、貯留施設の容量 (以後排水容量、貯留容量と呼ぶ)。また y_0^s , $z\%$ はある治水安全度 (超過確率 q) に対応するピーク流量、および総流量。

y_0^s , $z\%$ は (ピーク流量, 総流量) の結合確率分布に関する知識を必要とすることなく、通常の1変数の確率分布のあてはめによって簡単に推定することができる。また実測水文資料に基づいて簡単に s を推定することもできる³⁾。

2.2 貯留関数

貯留関数は次式で表わされる。

$$q = a \cdot z'^p \quad (2)$$

連続式は、

$$dz'/dt = r(t) - q(t) \quad (3)$$

ここに、 q は放流量、 r は流入量、 z' は貯留量、 a , p は定数。 p の値を変えることにより、さまざまな調節パターンを表示することができる。

図-2はその例である。 $p = 0, 1, \infty$ はそれぞれ、一定量放流、線形、全量カット型貯留施設を意味する。

実際には、 $q \sim z'$ 関係は、洪水の増水部と減水部と異なる関係となり、 $q \sim z'$ 座標上でループを描く場合がある。この場合も、みかけ上の時差 T_e を導入し、貯留量 z' に対して(2)式により計算された放流量 q が

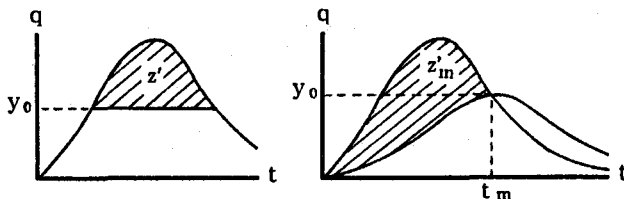


図-1. a 一定量放流

図-1. b 自然調節型

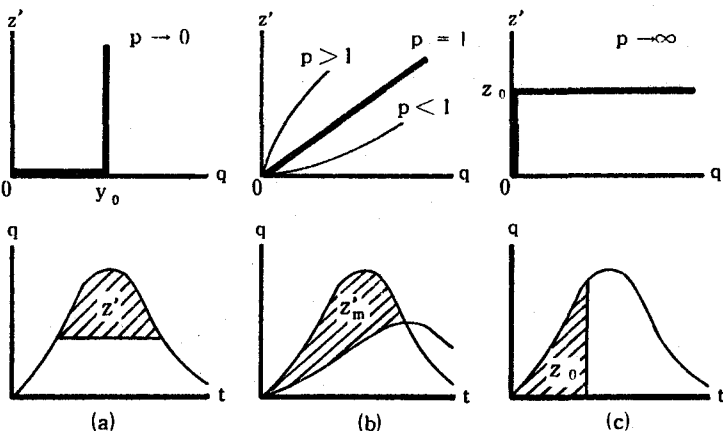


図-2 調節パターン

T_e だけ遅れて放流されると考えれば、 $q \sim z'$ 関係を、(2)式により表わされる一面の関数関係で近似しうることが知られている。

よって等危険度線の理論を、式(2)の貯留関数を持つ貯留施設に対して適用可能なように拡張しておけば、その実用性を飛躍的に拡大することができる。

2.3 線形貯水池 ($p = 1$) の場合

考え方の大筋を説明するために、まず線形貯水池の場合の等危険度線の式を導き、その実際の計画への適用法を示す。

線形貯水池では $p = 1$ 。貯留関数、単位図 (応答関数)、放流量はそれぞれ、

$$q = a z' \quad (4)$$

$$h(\tau) = a e^{-a\tau} \quad (5)$$

$$q = \int_0^t r(\tau) h(t-\tau) d\tau \quad (6)$$

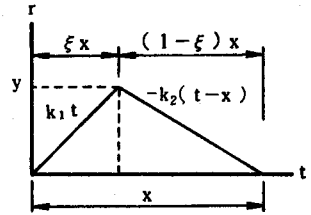


図-3 三角形ハイドログラフ

図-3に示す三角形ハイドログラフを仮定する。洪水継続時間、ピーク流量、ピークの生起の相対的位置 (x, y, ξ) はすべて確率変数とする。(x, y, ξ) の値の組み合わせにより、尖ったハイドログラフ、偏平なハイドログラフ、前方・後方・中央集中型等様々の形のハイドログラフが、与えられた確率法則に従って実現することになる。流入量ハイドログラフを $r(t)$ で表わすと、

$$\left. \begin{aligned} r &= k_1 t, & k_1 &= y / (\xi x) & (0 \leq t < \xi x) \\ r &= -k_2 (t-x), & k_2 &= y / \{(1-\xi)x\} & (\xi x \leq t < x) \\ r &= 0 & & & (x \leq t) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

式(7)を(6)に代入すると、 $\xi x \leq t < x$ の範囲に対して、

$$q(t) = \frac{1}{a} \frac{1}{\xi(1-\xi)} \frac{y}{x} \{ (1-\xi) e^{-at} - e^{-a(t-\xi x)} + a\xi(x-t) + \xi \} \quad (8)$$

これより放流量 q 、貯留量 z' の最大値、 y' 、 z'_m 、およびその生起時刻 t_m は、

$$t_m = \frac{1}{a} \log_e \{ (e^{a\xi x} + \xi - 1) / \xi \} \quad (9)$$

$$y' = q(t_m) \quad (10)$$

$$z'_m = 1/a \cdot y' \quad (11)$$

貯留施設が満水に至る前に放流量が排水容量を越えたとすれば、貯留施設の能力がフルに発揮されない。放流量が排水容量に至る前に貯留施設が満水になる場合も同様である。よって貯留施設が満水になる時点と放流量が排水容量に至る時点が一致する、という条件を導入する (補遺参照)。すなわち、

$$y_0 = a z_0, \text{あるいは } a = y_0 / z_0 \quad (12)$$

治水に失敗する確率を「システムの危険度 P_F 」とする。

$$P_F = \text{Prob} (y' > y_0) \quad (13)$$

式(10)を(13)に、これに式(8)、(9)、(12)を代入すると、($y' > y_0$)なる条件は、(y_0, z_0)をパラメータとし、(x, y, ξ)を変数とする式となる。(x, y, ξ)座標上でこの不等式を満たす空間を D とすれば、

$$P_F = \int_D f_{xy\xi}(x, y, \xi) dV \quad (14)$$

ここに、 $f_{xy\xi}(x, y, \xi)$ は x, y, ξ の結合確率密度関数、 dV は (x, y, ξ) 座標上の体積分。(x, y) と ξ が独立の時、 ξ もパラメータと考えて ($y' > y_0$) の条件を書きかえると、

$$y > b_1(x) \quad (15)$$

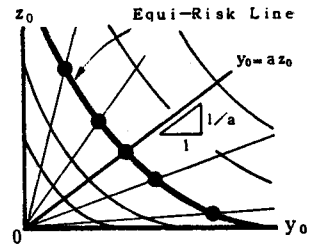


図-4 等危険度線の描き方

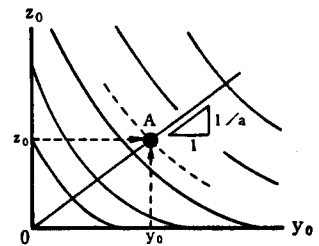


図-5 等危険度線の利用例

- ① y_0, z_0 より A 点を求める
- ② O A より a を求める
- ③ A 点の危険度を読み取る

ここに,

$$b_1(x) = a\xi(1-\xi) \cdot x / \{ (1-\xi)e^{-at} - e^{-a(t-\xi x)} + a\xi(x-t) + \xi \} \cdot y_0, \quad (16)$$

$$a = y_0 / z_0$$

このとき,

$$P_F = \int_0^1 f_\xi(\xi) \int_0^\infty \int_{b_1}^\infty f_{xy}(x, y) dy dx d\xi \quad (17)$$

ここに,

$f_\xi(\xi)$, $f_{xy}(x, y)$ は ξ の確率密度関数, (x, y) の結合確率密度関数。

第一近似としては f_ξ は一様分布 (ただし $0 \leq \xi \leq 1$), x, y は独立かつ指数分布に従う, と仮定して良からう。

一組の (y_0, z_0) の値に対して, 式(14)あるいは(17)の積分により, P_F の値が一つ求まる。すなわち最終的に P_F は (y_0, z_0) の関数となる。 P_F を (y_0, z_0) 座標上にプロットし, 等値線を結べば等危険度線が得られる (図-4 参照)。

ξ が一定の時 (例えば中央集中型ハイドログラフでは $\xi = 1/2$), 式(17)の一番外側の積分は不要となる。次に得られた等危険度線の使い方を説明する。例えば穴あき型防災調節池を考えて見よう。式(12)より明らかに (y_0, z_0) 座標上で, 原点を通る直線の勾配の逆数が貯留定数 a である。

容量 z_0 , 下流疎通能 y_0 が与えられると, 式(12)より a が求まる。 a より必要な穴のサイズが求まる。 (y_0, z_0) を等危険度線上にプロットすれば危険度が求まる (図-5 参照)。また下流疎通能 y_0 と危険度が与えられれば, 等危険度線から必要貯留容量 z_0 が, 式(12)から a が求まる。

2.4 モンテ・カルロ法による方法

式(14), (17)の数値積分を実行するかわりに, モンテ・カルロ法によって P_F を求めることもできる。次のような手順で計算すればよい (図-6 参照)。

- ① a を固定する。
- ② 結合確率密度関数 $f_{xy}\xi$ を持つ乱数 (x, y, ξ) を発生させる。ハイドログラフが一つ得られる。
- ③ このハイドログラフを入力として, 式(2), (3)を用いて放流量 q , 貯留量 z' を計算する。計算にはルンゲ・クッタの方法を用いれば良い。放流量の最大値 (ピーク流量) を y' とする。
- ④ ②, ③をくり返し多数の z', y' を得る。これらを確率評価する。
- ⑤ (y_0, z_0) 座標上の直線 ($z_0 = 1/a \cdot y_0$) 上に, ④で求めた超過確率を記入する。
- ⑥ a をかえて①~⑤をくり返す。各 a の値に対応する直線上の, 超過確率が等しい点を結べば, これが求める等危険度線となる。

2.5 非線形貯水池 ($p \neq 1$) の場合

ピーク流量の式 (線形貯水池の場合は式(8), (10)) を解析的に導くことができない。よってモンテ・カルロ法によって等危険度線を描かざるを得ない。

各 p の値に対して1枚の等危険度線を描く。上記の①~⑥と同じ手順を用いる。ただし, ある a に対する (y_0, z_0) 関係は直線ではなく, ($y_0 = az_0^p$) なる曲線である。この曲線上にモンテ・カルロ法により得られた超過確率を記入する。いうまでもなく, この曲線は貯留関数そのものである。

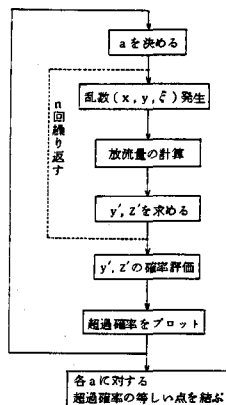


図-6 モンテ・カルロ法による P_F の求め方

結果の使い方の例を示す。通常貯留施設の水利特性から p の値が決まる。例えば鉛直壁を持つ穴あき型調節池では、 $v = \sqrt{2gh}$, $q \sim v$, $z \sim h$ より、 $p = 1/2$ 。管路・水路内貯留、自然遊水地等の場合においても、みかけ上の流出遅れ T_d を導入すれば、式(2)の貯留関数が近似的に成り立って、安全度の確率評価とは無関係に p の値が定まる。ある p の値に対する等危険度線図を用いれば、線形貯水池の場合と同様にしてシステムの安全度評価、施設規模の決定等を行うことができる。

2.6 全量カット方式 ($p = \infty$) の場合

総流量 $z (= 1/2 \times y)$ よりも貯留容量 z_0 が大きい時は、全流量をためこむことができるので、ピーク流量 $y' = 0$ 。ハイドログラフの前半分の総流量 $z (= 1/2 \xi xy)$ より z_0 のほうが小さい時は、ピーク流量は常にもとのハイドログラフのピーク流量に等しいから $y' = y$ (図-7 参照)。これらを考慮すると、 z と z_0 の関係は次のように表わされる。

$$y' = 0 \quad (z \leq z_0) \quad (18)$$

$$y' = \sqrt{\frac{1}{1-\xi}} \left(1 - \frac{z_0}{z}\right) \cdot y \quad (\xi z \leq z_0 < z) \quad (19)$$

$$y' = y \quad (z_0 < \xi z) \quad (20)$$

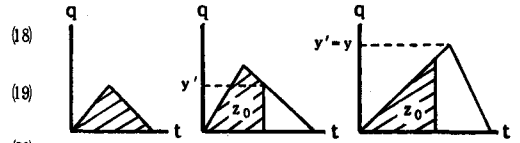


図-7 貯留量とピーク流量との関係(全量カット)

これより P_F は、

$$\begin{aligned} P_F &= \text{Prob}(y' > y_0) \\ &= \text{Prob}(z \leq z_0 \cap 0 > y_0) \\ &\quad + \text{Prob}\left\{\xi z \leq z_0 < z \cap \sqrt{\frac{1}{1-\xi}} \left(1 - \frac{z_0}{z}\right) \cdot y > y_0\right\} \\ &\quad + \text{Prob}(z_0 < \xi z \cap y > y_0) \end{aligned} \quad (21)$$

右辺第1項は0となることを考慮し、式を書き換えると、

$$\begin{aligned} P_F &= \text{Prob}(z_0 < z \leq 1/\xi \cdot z_0 \cap z > a(y) z_0) \\ &\quad + \text{Prob}(z > 1/\xi \cdot z_0 \cap y > y_0) \end{aligned} \quad (22)$$

ここに、

$$a(y) = 1 / \{1 - (1 - \xi)(y_0 / y)^2\} \quad (23)$$

式(22)の()内で表わされる領域を (y, z) 座標上で図示したものを図-8に示す。この領域上で (y, z) の結合確率密度関数を積分すれば、ある ξ の値に対する P_F が求まる。よって、

$$P_F = \int_0^1 \int_{y_0}^{\infty} \int_{a(y)z_0}^{\infty} f_{yz\xi}(y, z, \xi) dz dy d\xi \quad (24)$$

ここに $f_{yz\xi}$ は (y, z, ξ) の結合確率密度関数、 ξ を固定する時は一番外側の積分は不要。

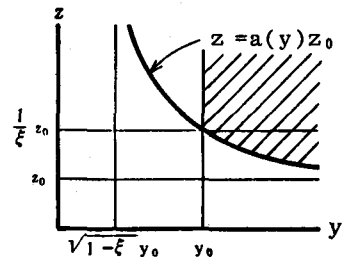


図-8 y, z の結合確率密度関数の積分領域

3. 数値計算例

3.1 解析結果のまとめの方針

式(2)の貯留関数の2定数のうち p について考えると、 $p = 0$ の場合、すなわち一定量放流方式が最も効率的な方式である。例えば図-1.bの斜線部のうち、 y' 以下の部分は、ピーク流量の低減という意味からは無駄な貯留となっている。よって治水安全度を一定に保つとき、 $p > 0$ の時は、 $p = 0$ の場合に比べてより大きな貯留容量を必要とする。よって、 $p > 0$ の時も一定量放流($p = 0$ の場合)に対する著者らの近似式(1)が使えるとすれば、指数 s の値は $p = 0$ の場合 ($s = 2 \sim 3$) に比べてより小さな値となるはずである。以上よりいくつかの p の値に対する数値解析、あるいは理論解析により描いた等危険度線に対して式(1)をあてはめ、 p の値に対して s がどのように変わるか調べておけば、任意の貯留関数に対して、等危険度線の近似式(1)が知れたことになる。

洪水継続時間 x 、ピーク流量 y とも指数分布に従い、かつ (x, y) が独立および完全線形従属(比例)の場合

合について若干の数値的検討を行った。 ξ については一様分布、および0、1/2、1に固定した場合（前方、中央、後方集中型）について検討した。計算はモンテ・カルロ法によった。シミュレーションは各ケース1000回とした。

3.2 結果の検討

放流ハイドログラフの例を図-9に示す。得られた等危険度線に式(1)をあてはめた例を図-10に示す。 ξ と s の関係を図-11に示す。これらの図より次のようなことがわかる。

- ① p の増大とともに s は小さくなり、1以下のある定数に漸近する。すなわち大きな p に対しては、等危険度線は下に凸ではなく、上に凸となる。
- ② ξ が大きいほど s は小さい。すなわち安全度を一定に保つなら、後方集中型に対してより大きな施設を必要とする。
- ③ ξ を一様分布とした時の s は、 $\xi = 1/2$ （中央集中型）の s の値とほぼ等しい。中央集中型の s の方がやや小さい（少し大型の治水施設が必要）。
- ④ $p = 0.1$ までしか計算していないが、 $p = 0$ の場合の s の値は、その理論値（ x 、 y が独立のときは3、完全線形従属のときは2）に近付いている。
- ⑤ x 、 y が独立の場合の s の推定値は小さな p の値に対してやや不安定である。
- ⑥ より、仮に x 、 y が完全線形従属の場合に対して $p \sim s$ 関係に簡単な関数をあてはめてみる。近似関数をあてはめた例が図-12である。このとき自然調節型の貯留施設に対しても一般的に適用しうる等危険度線の式は次式で表わされる。

$$s = (s_0 - s_\infty) e^{-c_p \sqrt{p}} + s_\infty \quad (25)$$

x 、 y が完全線形従属の場合は、 $s_0 = 2$ 、 $s_\infty = 0.3$ 、 $c_p = 1.0$ 。

4. おわりに

等危険度線の理論を自然調節型の貯留施設に対しても適用可能なように拡張することを試みた。

- ① 貯留関数の指数 p が0、1、 ∞ の場合（一定量放流¹⁾²⁾、線形貯水池、全量カット型の貯留施設）に対して等危険度線の式を理論的に導くことができることを示した。
- ② モンテ・カルロ法により、任意の p の値に対して、等危険度線を求めるための手法を示した。
- ③ 自然調節型の貯留施設について、治水安全度の評価、施設規模の決定のための実用的な手法を示した。
- ④ 自然調節型の貯留施設に対しても一般的に適用しうる等危険度線の式の候補として以下の式を示した。

$$z_0 / z_0^* = \{(y_0^* - y_0) / y_0^*\}^s \quad (1)$$

$$s = (s_0 - s_\infty) e^{-c_p \sqrt{p}} + s_\infty \quad (25)$$

補遺

貯留定数 a の値は本来、 (y_0, z_0) が与えられたという条件下で、 P_F を最小とするように決めるべきである。直観的にみて式(12)がこの条件を満たす a の値の十分良い近似値となることはほぼ間違いない。今後より厳密な理論解析、数値計算等により、式(12)の仮定の妥当性について検討する必要がある。

参考文献

- 1) 江藤剛治・室田明：一雨降雨の1確率模型，土木学会論文集，345/II-1，1984年5月。
- 2) 江藤剛治・室田明：単一貯留施設に関する治水の安全度に関する理論的研究，土木学会論文集，351/II-2，1984年11月。
- 3) 中西祐啓・江藤剛治・室田明：等危険度線による遊水地計画の安全度評価の例，近畿大学理工学部研究報告，第20号，1984年9月。

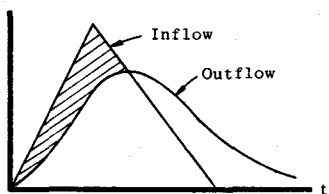


図-9 放流量ハイドログラフ

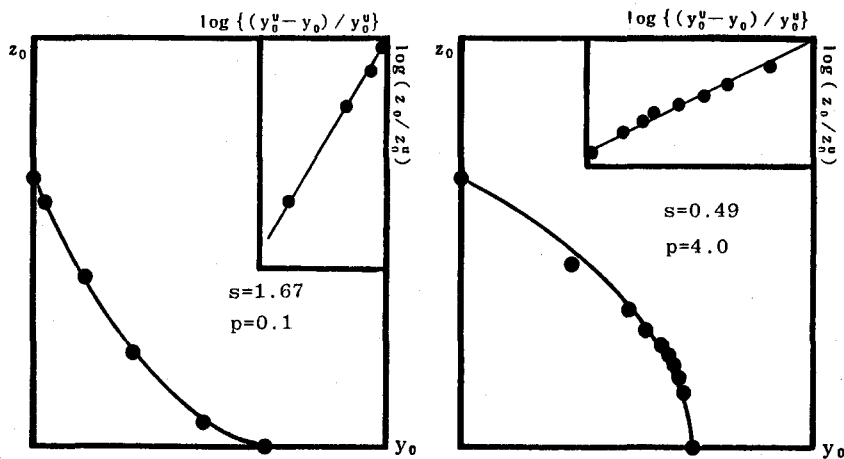


図-10 s の計算

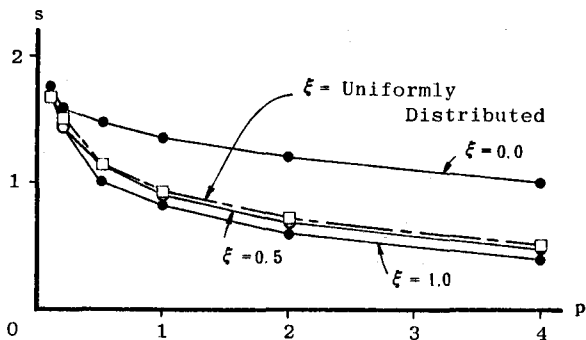


図-11 ξ と s との関係 ; 完全線形従属

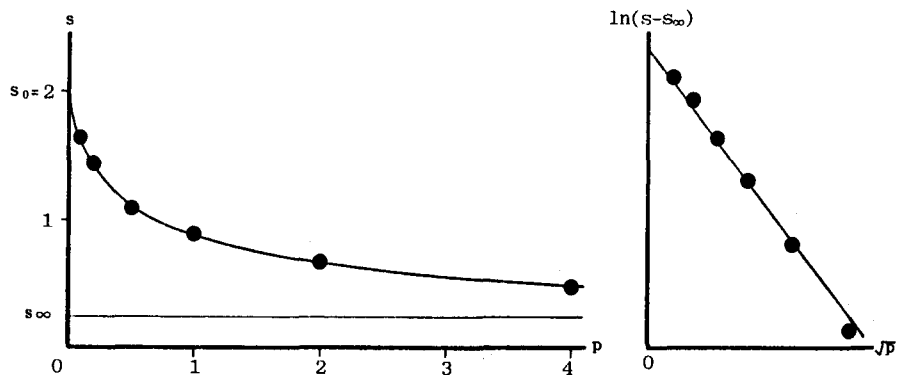


図-12 $p \sim s$ 関係の近似関数のあてはめ ; 完全線形従属