

洪水追跡法への実時間予測の適用

A Real-Time Operation for Flood Routing Method

北海道開発局土木試験所 正員 星 清

アジア工科大学

Devendra K. Sharma

1. はじめに

河道内洪水追跡手法はモデル構造の複雑さ、あるいは解法の難易度から (a) 開水路不定流 (Saint-Venant) 式による方法 (b) 速水式¹⁾に代表される輸送-拡散式に基づく方法^{2,3,4)} (c) マスキング法で代表される貯留関数法⁵⁾に分類される。近年、計算機の容量増大・高速化に伴ない、(a) 群に属する手法の数値解法に関する研究が国内外を問わず、さかに行われている⁶⁾。また、洪水追跡手法の実用面での活用を重視したモデルの比較検討が英国で行われている⁷⁾。

洪水逐次予測 (operational forecast) の観点から上記 3 手法を比較すると、(a) 群の方法では入力情報が多く、計算が非常に煩雑となり適切であるとはいいがたい。(c) 群の方法はモデル構造が簡単であるため、逐次予測を迅速に行える反面、洪水現象の水理学的特性をモデル自身に反映できない欠点がある。以上の理由により、本研究では開水路不定流方程式の近似化による速水の式を洪水追跡モデルとして採用する。

最近、Kalman filter 理論は^{8,9)} 洪水流出の逐次予測に威力を発揮する一手法として注目され、数多くの研究成果が発表されている¹⁰⁾。Kalman filter 理論はこれまで集中定数系モデルに多く適用されてきた。本研究では Kalman filter 理論を分布定数系モデルである速水によって提案された洪水流の基礎式に適用する際のシステム方程式定式化の問題点を明確にする。また、河道分割数増加に伴う計算時間の増大の難点を克服するため、行列演算を極力さけ、計算に必要な行列の要素の一般化をはかる。最後に洪水追跡法への Kalman filter 理論適用の有効性を数値シミュレーションによって検討する。

2. 洪水追跡式

速水によって導出された洪水流の基礎方程式は (1) 式で与えられることはよく知られている。

$$\frac{\partial y}{\partial t} + D_2 \frac{\partial y}{\partial x} = D_1 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 y : 水深、 t : 時間、 x : 河道上流端からの距離

パラメータ、 D_1 と D_2 は水理量と流路の幾可学的形状特性値に依存し、次の関係式で与えられる。

$$D_1 = \frac{F^2 y^{4/3}}{2n^2 QB} \quad \dots\dots (2) \quad D_2 = \frac{5Q}{3F} \quad \dots\dots (3)$$

ここで、 F : 流積、 Q : 流量、 B : 水路幅、 n : マニングの粗度係数

(2)、(3) 式からも明らかなようにパラメータ、 D_1 と D_2 は当然のことながら時間変動するが、観測不可能である。したがって、この 2 つのパラメータと水位予測を同時に on-line 推定する必要性から、Kalman filter 理論を (1) 式に適用する。 D_1 と D_2 を定数と仮定すると、(1) 式は線形拡散方程式となり、理論解が得られる。問題を単純化するため、定常時水深より上の洪水波の伝播を想定し、次の初期・境界条件を設定する。

$$\begin{cases} y(0, t) = U(t) \text{ (unit step function), } t \geq 0 \\ y(\infty, t) \neq \infty \text{ (infinite length reach), } t \geq 0 \quad \dots\dots (4) \\ y(x, 0) = 0 \text{ (initial condition), } x \geq 0 \end{cases}$$

(4) 式の条件下での (1) 式の理論解は (5) 式で与えられる。

$$y(x, t) = \frac{1}{2} \exp(D_2 x / 2D_1) \left\{ \exp(-D_2 x / 2D_1) + \exp(D_2 x / 2D_1) - [\exp(-D_2 x / 2D_1) \operatorname{erf}(x / 2\sqrt{D_1 t} - D_2 \sqrt{t} / 2\sqrt{D_1}) + \exp(D_2 x / 2D_1) \operatorname{erf}(x / 2\sqrt{D_1 t} + D_2 \sqrt{t} / 2\sqrt{D_1})] \right\} \dots (5)$$

ここで、 $\operatorname{erf}(\cdot)$ は誤差関数 (5) 式から単位パルス関数に対する応答が容易に求められる。したがって、上流端での入力波形に対する河道任意点での水位時間曲線は重ね合わせの原理を用いて計算できる。図-1には $D_1 = 1000 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $D_2 = 0.7 \text{ m/s}$ として、上流端境界条件が矩形波 (継続時間=5 時間、水深=10 m) で与えられるときの、 $x = 30 \text{ km}$ 地点での水深時間曲線の理論解が示されている。

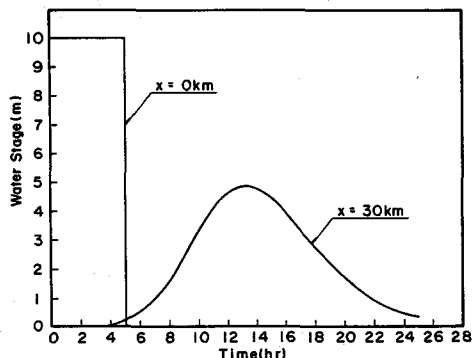


Fig. 1 Stage Hydrographs at Upstream and Downstream Boundaries

3. Kalman filter 理論への定式化

Kalman filter 理論を洪水逐次予測に適用する際、システム方程式の定式化が必要であり、このため (1) 式を一階連立常微分方程式に変換する。このとき、実際問題として図-2に示される 2 つの洪水追跡河道系が考えられる。本報告では、(b) の河道系モデルについて議論を進める。(1) 式の x に関する微分項を中央差分スキームで近似すると、(1) 式は (6) 式に変換される。

$$dy_i/dt = c_1 y_{i+1} + c_2 y_i + c_3 y_{i-1} \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n) \quad \dots (6)$$

ここで、

$$c_1 = D_1/(\Delta x)^2 - D_2/(2\Delta x), \quad c_2 = -2D_1/(\Delta x)^2,$$

$$c_3 = D_1/(\Delta x)^2 + D_2/(2\Delta x) \quad \dots (7)$$

$$c_1 + c_2 + c_3 = 0 \quad \dots (8)$$

(6) 式において、 y_0 と y_{n+1} はそれぞれ、上流端、下流端境界条件である。水深 $y_i (i=1, 2, \dots, n)$ に加えて、(8) 式からパラメータ c_2 と c_3 を状態変量とすると、次式のベクトル方程式が得られる。

$$dx/dt = f(X) \quad \dots (9)$$

ここで、

$$X = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{n-1} \\ y_n \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} \quad \dots (10)$$

$$f(X) = \begin{bmatrix} c_3 y_0 + c_2 y_1 + c_1 y_2 \\ c_3 y_1 + c_2 y_2 + c_1 y_3 \\ \vdots \\ c_3 y_{n-2} + c_2 y_{n-1} + c_1 y_n \\ c_3 y_{n-1} + c_2 y_n + c_1 y_{n+1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \dots (11)$$

(11) 式にも示されるように、パラメータ c_2 と c_3 の時間変化は random walk に従っているものとする。実際の計算にあたっては、(9) 式を離散表示した方が便利である。今、 Δt を計算時間間隔として、 $X(t+\Delta t)$ を 2 次の項まで Taylor 級数展開すると次式が得られる。

$$X_{k+1} = X_k + f(X_k)\Delta t + A(X_k)f(X_k)(\Delta t)^2/2 + w_k \quad \dots (12)$$

ここで、

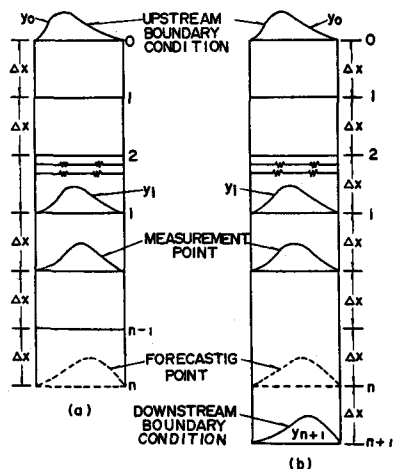


Fig. 2 Discretization Diagram of River Reach. (a) System with Input at Upstream Boundary. (b) System with Input at Upstream and Downstream Boundaries.

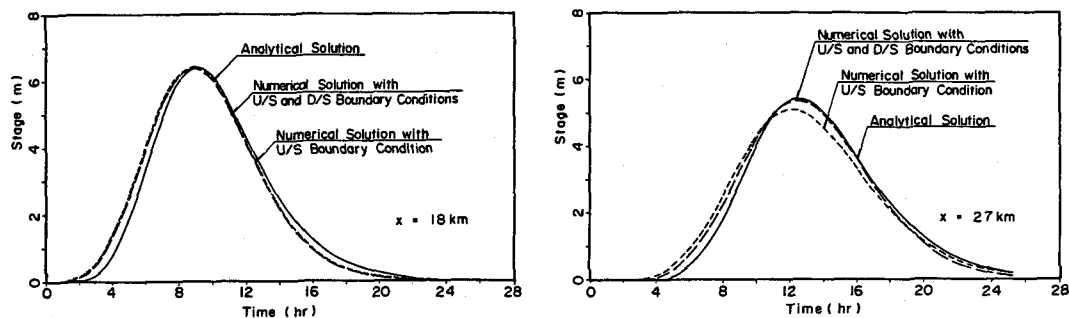


Fig. 3 Comparison of Stage Hydrographs between Analytical and Numerical Solutions ($D_1=1000\text{m}^2/\text{s}$, $D_2=0.7\text{m}^2/\text{s}$)

$$X_{k+1} = X(t + \Delta t), \quad X_k = X(t), \quad A(X_k) = \partial f / \partial X|_{X=X_k} \quad \dots\dots (13)$$

また、 w_k はモデリング誤差と (9) 式の離散化誤差であり、 $(n+2) \times 1$ 行列である。 w_k の要素は互いに独立な正規性ノイズとし、次の統計的性質をもつものとする。

$$E(w_i) = 0, \quad E(w_i w_j^T) = Q_i \delta_{ij} \quad \dots\dots (14)$$

ここで、 E : 期待値演算子、 δ_{ij} : クロネッカーデルタ (13) 式中の $A(X_k)$ は $(n+2) \times (n+2)$ の Jacobian 行列で、(15) 式の小行列からなる。

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ 0_1 & 0_2 \end{bmatrix} \quad (15) \quad A_1 = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ c_3 & c_2 & c_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & c_3 & c_2 & c_1 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & c_3 & c_2 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & c_3 & c_2 & c_1 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & c_3 & c_2 \end{bmatrix} \quad (16) \quad A_2 = \begin{bmatrix} y_1 - y_2 & y_0 - y_2 \\ y_2 - y_3 & y_1 - y_3 \\ y_3 - y_4 & y_2 - y_4 \\ \dots & \dots \\ y_{n-2} - y_{n-1} & y_{n-3} - y_{n-1} \\ y_{n-1} - y_n & y_{n-2} - y_n \\ y_n - y_{n+1} & y_{n-1} - y_{n+1} \end{bmatrix} \quad (17)$$

ここで、 $A_1 = (n \times n)$ 行列、 $A_2 = (n \times 2)$ 行列、 $0_1 = (2 \times n)$ のゼロ行列、 $0_2 = (2 \times 2)$ のゼロ行列すなわち、 A_1 はパラメータ c_1, c_2, c_3 からなる帯状行列、 A_2 は水深 $y_i (i=0, 1, \dots, n+1)$ からなる行列である。(12) 式において $w_k = 0$ のとき、この式は Kalman filter 理論適用における状態変量外挿補間式 (state extrapolation) になる。このとき、(11)、(16) 式の行列要素の規則的配列を利用すれば、行列演算を必要としない。この操作は、とくに河道分割数 n が大なるとき有効である。

図-3には図-1に示される境界条件に対する $x = 18 \text{ km}$ と $x = 27 \text{ km}$ 地点における (5) 式による理論解と (12) 式 ($w_k = 0$) による数値解が比較されている。このとき、数値解法においては、 $\Delta x = 3 \text{ km}$ 、 $\Delta t = 0.5 \text{ hr}$ の計算条件を用いた。(12) 式による数値解は実用上十分な精度を有していると考えられる。

Table 1 Stability criterion of system equation with U/S and D/S boundary conditions

Node spacing Δx	$D_2 = 0.7$		$D_2 = 0.9$	
	lower limit of $\Delta x/D_1$	upper limit of $\Delta x/D_1$	lower limit of $\Delta x/D_1$	upper limit of $\Delta x/D_1$
3 km	1.50	4.28	2.50	2.72
4 km	0.91	4.44	1.14	3.33
5 km	0.71	5.00	0.74	3.57
6 km	0.52	3.53	0.57	4.00

なお、図-3には図-1の上流端境界条件のみを与えたとき (すなわち、図-2の (a) の河道系) の数値解も併記してある。このとき、対象河道区間の末端 $i = n$ (この例では $x = 30 \text{ km}$) においてのみ (1) 式に後退差分スキームを用い、他の地点では中央差分スキームを用いた。

数値解法における安定解を種々検討した結果、 Δt に関しては $\Delta t = 0.5 \text{ hr}$ まで安定解が得られた。その理由は、(12) 式が $(\Delta t)^2$ までの精度を有するためと考えられる。一方、 Δx に関しては解の安定性は $\Delta x/D_1$ の range に依存する。表-1にはその一例が示されている。すなわち、 D_1 と D_2 が与えられた場合、安定解を得るためには Δx を $\Delta x/D_1$ の下限・上限値内に入るよう選定する必要がある。

ある。

Kalman filter 理論では状態変量の誤差共分散外挿補間式が必要であり、(18) 式で定義される。

$$P_{k+1} = \Phi_k^T P_k \Phi_k + Q_k \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 P_k と Q_k はそれぞれ、時刻 k における状態変量誤差共分散行列、システム方程式誤差共分散である。なお、 Q_k は新しい観測値情報が入手される直前にのみ作用させる必要がある。

遷移行列 Φ_k は次式で与えられる。

$$\Phi_k = I + A(X_k)\Delta t + A^2(X_k)(\Delta t)^2/2 + A^3(X_k)(\Delta t)^3/6 \quad \dots\dots (19)$$

ここで、 I は $(n+2) \times (n+2)$ の単位行列 (15) 式を (19) 式に代入して整理すると次式が得られる。

$$\Phi_1 = I + A_1\Delta t + (A_1\Delta t)^2/2 + (A_1\Delta t)^3/6 \quad \dots\dots (21)$$

$$\Phi_k = \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (20) \quad \Phi_2 = \Delta t[A_2 + A_3\Delta t/2 + A_4(\Delta t)^2/6] \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$A_3 = A_1A_2 \quad \dots\dots\dots (23) \quad A_4 = A_1^2A_2 \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、 $\Phi_1 = (n \times n)$ 行列、 $\Phi_2 = (n \times 2)$ 行列、 $0_1 = (2 \times n)$ のゼロ行列、 $I_2 = (2 \times 2)$ の単位行列 (16) 式からも明らかに、行列 Φ_1 の要素はモデルパラメーターのみに依存するから新しい観測値情報 (水位) が入手されるまで、一定値が伝達される。一方、行列 Φ_2 はパラメーターと水深の関数であるから、計算時間間隔 Δt 毎に変化する。河道分割数 n が大きくなると、(21)、(22) 式の行列演算は計算時間を飛躍的に増大させる。このため、(16)、(17) 式の要素の規則的配列に注目して、 Φ_1 と Φ_2 の要素の一般化をはかる必要がある。本報告での計算もこの一般化によって行った。

次に、Kalman filter 理論適用のための観測値方程式の定式化を行う。図-2 の河道系において、水位観測が一地点 (j 地点) だけで行われていると仮定して、(25) 式の観測値方程式を得る。

$$z_k = H X_k + v_k \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここで、 z_k は j 地点での sampling 時刻 k における水深の観測値であり、 v_k は観測値誤差である。また、ベクトル H は次式に示されるように、 j 番目の要素は 1 で他の要素はゼロである。

$$H = \begin{matrix} 1 & \dots\dots & j & \dots\dots & n+2 \\ [0 & 0 & 0 & \dots\dots & 1 & \dots\dots & 0 & 0] \end{matrix} \quad \dots\dots\dots (26)$$

v_k の統計的性質は次式で定義される。

$$E(v_k) = 0, \quad E(v_k^2) = R_k \quad \dots\dots\dots (27)$$

Kalman filter 理論における状態変量およびその誤差共分散の更新方程式はよく知られているので、^{8), 9)} 本報告では省略する。

4. 適用例

前節までは、速水によって提案された洪水追跡式に Kalman filter 理論を適用する際の理論的考察を行った。ここでは、数値シミュレーションによる適用例を示す。数値実験の計算過程を以下に簡単に述べる。

(a) 解析対象河道長を 30 km とし、河道分割数を $n = 10$ ($\Delta x = 3$ km) とする。上流端境界条件は図-4 に示されるように、継続時間 96 時間、最大水深 10 m の三角形波形とする。モデルパラメーター D_1 と D_2 の真値をそれぞれ $D_1 = 1000$ m^2/s 、 $D_2 = 0.7$ m/s とする。(5) 式と重ね合わせの原理を用いて、各河道点での理論水深時間曲線を求めておき、以後これらを Kalman filter 適用の際の予測精度の比較検討のための基礎資料

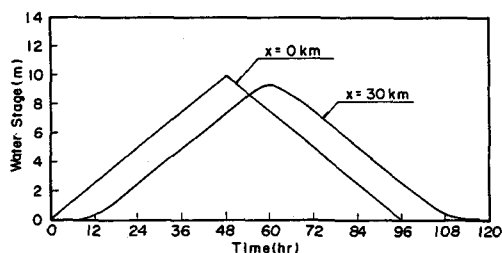


Fig. 4 Stage Hydrographs at Upstream and Downstream Boundaries

とする。図-4に示される $x = 30 \text{ km}$ における水深時間曲線はその理論解の一例である。

(b) 図-4の上流端・下流端境界条件と(a)で設定したパラメーター D_1 と D_2 の値を用いて、(12)式による各河道点での水深時間曲線の数値解を求める。このとき、計算時間間隔を $\Delta t = 0.5 \text{ hr}$ とした。理論解と数値解の誤差分散を状態変量の初期値誤差共分散行列 (P_0)、システム方程式誤差共分散行列 (Q_k)、および観測値誤差分散 (R_k) に用いた。なお、 P_0 と Q_k は対角行列と仮定した。(a)で計算された $x = 18 \text{ km}$ での水深時間曲線を Kalman filter 理論適用の際の観測値 (z_k) とみなし、 $x = 27 \text{ km}$ を水位予測地点とした。なお、水位の観測値情報は2時間毎に得られるものと仮定し、2時間先、4時間先、6時間先の水位予測を行う。このとき、図-4に示される境界条件での将来水深予測は行わず、実測水深を用いた。

(c) 過去の洪水資料から、モデルパラメーター D_1 と D_2 (あるいは c_2 と c_3) の概略の order を知ることができる。しかしながら、これらのパラメーターは洪水期間中たえず変化していることが予想される。Kalman filter 理論は将来の水位予測に加えてモデルパラメーターの on-line 同定が可能である。そこで、本数値実験では (a)で設定したパラメーターの真値から +20% ($D_1 = 1200 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $D_2 = 0.84 \text{ m/s}$) と -20% ($D_1 = 800 \text{ m}^2/\text{s}$ 、 $D_2 = 0.56 \text{ m/s}$) 離れた値を初期値として、Kalman filter 理論を適用したときの予測精度を検討する。予測精度の向上は分散の減少で測れるものとする。Kalman filter を用いない時の分散は次のように計算される。すなわち、パラメーターの真値から $\pm 20\%$ の誤差を持ったときの各河道点における水深を計算し、すでに (a)で求めた水深との差の2乗和の平均値とする (表-2を参照)。次に、Kalman filter 理論を用いた2時間先、4時間先、および6時間先の予測水深と (a)で計算した水深との誤差分散の減少を filter 理論を用いたときの予測効果とみなすことができる。

(d) 数値実験の結果、filter performance はシステム方程式誤差分散行列 (Q_k) のうち、パラメーター c_2 と c_3 に関する分散に大きく左右されることがわかった。試行錯誤により c_2 と c_3 に関する分散がそれぞれ、 5×10^{-13} 、 5×10^{-12} のとき filter の解に発散が起らなかった。

図-5は、水位の観測値情報が2時間毎に得られるものと仮定して、2時間先、4時間先、および6時間先の水位予測を行った時の(18)式の状態変量誤差共分散の伝達方程式($Q_k = 0$)による標準偏差を

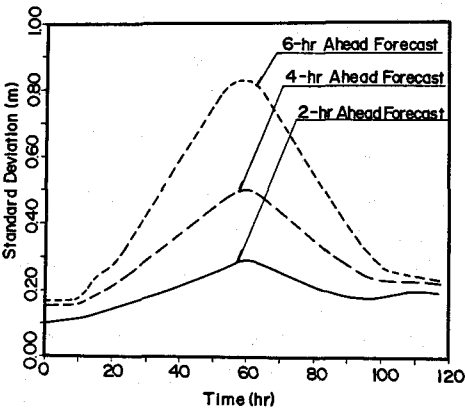


Fig. 5 Standard Deviation of Residual Errors of Water Stages for 2-, 4- and 6-hr Ahead Forecasts. (Initial Values, $D_1=1200 \text{ m}^2/\text{s}$, $D_2=0.84 \text{ m/s}$)

Table 2 Variance of residuals without and with the extended Kalman filter for system with U/S and D/S boundary conditions (unit: m^2)

Distance $x \text{ (km)}$	Parameters with +20% difference from the true values				Parameters with -20% difference from the true values			
	without filter	1-T	2-T	3-T	without filter	1-T	2-T	3-T
18	0.098	0.004	0.010	0.017	0.047	0.001	0.004	0.008
21	0.120	0.003	0.008	0.016	0.072	0.001	0.003	0.007
24	0.145	0.002	0.006	0.014	0.102	0.002	0.003	0.006
27	0.182	0.004	0.006	0.013	0.145	0.004	0.004	0.007

Note: 1-T = 1-time step ahead forecast

$x = 27 \text{ km}$ 地点について表示したものである。この図はパラメーター D_1 と D_2 の初期値に真値から $+20\%$ の誤差を見込んだときのものである。リードタイムが長くなるにつれて予測誤差が大きくなることは当然であるが、この結果は、パラメーターの不確かさを考慮するとき、どのくらいのリードタイムまでの水位予測が可能であるか、あるいはまた、水位予測の精度を規定するとき、パラメーター初期値の誤差をどの程度まで許容できるかを検討するとき重要となる。

上記計算過程の (c) 項で述べたように、Kalman filter 理論を水位予測に適用したときとしないときで誤差分散がどのように変化しているかを表-2に示す。表中にはモデルパラメーター D_1 と D_2 の初期値が真値から $\pm 20\%$ 離れたときの両ケースの結果が示されている。また、 $1-T$ 、 $2-T$ 、および $3-T$ はそれぞれ、 $x = 18 \text{ km}$ 地点で水位観測値情報が2時間毎に得られるとしたときの、2時間先、4時間先、および6時間先予測に対応する。パラメーター初期値に -20% の誤差を持っている方が水位予測誤差の分散が小さい。しかしながら、6時間先予測の誤差分散でさえ、Kalman filter 理論を用いないときの分散より大幅に減少していることがわかる。

5. おわりに

本研究では、分布定数系モデルである洪水追跡式に Kalman filter 理論を適用する際の問題点を指摘し、理論的展開を主として議論を進めてきた。洪水逐次予測では計算の迅速性が要求される。とくに、河道分割数が大なるときは行列演算を極力さけるべきで、計算に必要な行列要素の一般化が不可欠である。本研究ではこの点に努力をはらってきた。今後は、以上の方法論を実河川に適用し、その有効性を検証する必要がある。

最後に、本研究はアジア工科大学在勤中、国際協力事業団からの研究費補助によって行われたものである。また、計算にあたっては、アジア工科大学の Regional Computer Center から多大な協力を得た。記して謝意を表する。

参考文献

- 1) Hayami, S. : On the propagation of flood waves, Bulletin No. 1, Disaster Prevention Research Institute, Kyoto University, Japan, 1951.
- 2) Akan, A.O. and Yen, B.C. : Diffusion-wave flood routing in channel networks, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 107(HY6), 719-732, 1981.
- 3) Thomas, I.E. and Wormleaton, P.R. : Finite difference solution of the flood diffusion equation, Journal of Hydrology, 12, 211-220, 1970.
- 4) Ponce, V.M., Li, R.M. and Simons, D.B. : Applicability of kinematic and diffusion models, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 104(HY3), 353-360, 1978.
- 5) Cunge, J.A. : On the subject of a flood propagation method, Journal of Hydraulics Research, IAHR, 7(2), 205-230, 1969.
- 6) Price, R.K. : A comparison of four numerical methods for flood routing, Journal of the Hydraulics Division, ASCE, 100(HY7), 879-899, 1974.
- 7) Flood Routing Studies: Flood Studies Report, Vols. 1-5, Natural Environment Research Council, London, 1975.
- 8) Gelb, A. (ed.) : Applied Optimal Estimation, The Analytical Sciences Corporation, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1974.
- 9) Mehra, R.K. : A comparison of several nonlinear filters for reentry vehicle tracking, IEEE Transaction on Automatic Control, AC-16(4), 307-319, 1971.
- 10) 星 清、山岡 勲、工藤 康正 : 洪水時における水位-流量曲線に関するフィルター理論の適用、土木学会北海道支部論文報告集、第38号、221-226、1982.