第29回水理講演会論文集　1985年２月

Fuzzy 集合理論の流出予測問題への応用

An Application of Fuzzy Set Theory to Runoff Prediction

北海道大学工学部　正員　藤田睦博

1. はじめに

Zadeh[1]によって提案されたfuzzy集合の理論は、現在、非常に多くの分野で実際的問題への応用研究がなされている。本研究は、プラントや交通流の制御[2]などに用いられているfuzzy理論に基づく「あいまい推論」を流出予測問題へ適用したものである。

2. 基礎理論

集合 $X=\{x\}$ を対象とするとき、fuzzy集合はそのメンバーシップ関数$M_A(x)$によって特性づけられた集合である。$M_A(x)$は x の A に帰属する度合を示し、この意味で$M_A(x)$を帰属度関数と呼ぶ場合もある。 $M_A(x)$ は、区間［ $0,1$ ］で定義され、 $M_A(x)$ の値が1に近づくと A に帰属する度合が強く、0に近づくとその度合が弱くなる。一般的なfuzzy理論については成書[3]を参考にしてもらうことにして、ここでは以後の説明に必要な事項についてのみ記述する。メンバーシップ関数の演算は、通常の集合の演算に類似している。いま、集合 A,B に関する2つのfuzzy集合M_A,M_Bを考え、これを図-２・1(A)に示す。また、表-２・1は和、積、補集合の演算を示している。

一方、fuzzy集合理論に基づく「あいまい推論」は、次のような条件付命題を基本ステートメントとしている。

If x is A then y is B.　　　　(2・1)

If x is A then y is B else y is C.　　　　(2・2)

最も単純な「あいまい推論」は、(2・1)の条件付命題が与えられたとき、「x *is* A'」の場合「y *is* B'」を推論しようとするものである。対象とするシステムが複雑になると、関与する変数の数も多くなる。したがって、条件付命題の数も多くなり、これらの命題を表-２・1に示す *and,or,not* などで適当に結合することによりシステムを記述することになる。(2・1)，(2・2)でA,B,C のメンバーシップ関数 $M_A(x),M_B(y),M_C(y)$ が与えられたとき、これらの命題をどのように表現するかについては、種々の手法が提案されている[4]。(2・1)，(2・2)の条件付命題をそれぞれ $R_{A\to B},R_{A\to BC}$ とすると、Mamdaniら[5]は次式を提案している。

$$R_{A\to B} = M_A(x)\ \mathrm{X}\ M_B(y) \qquad (2\cdot 3)$$

$$R_{A\to BC} = M_A(x)\ \mathrm{X}\ M_B(y) + \overline{M}_A(x)\ \mathrm{X}\ M_C(y) \qquad (2\cdot 4)$$

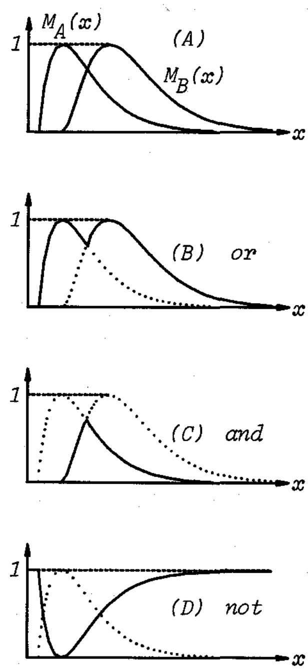


図-２・1 Fuzzy集合の演算

ここに、演算 X,+ はそれぞれ積集合および和集合を意味している。しかし、演算Xは表-２・1の積集合と異なり、xとyと要素の異なる集合の積なので、式(2・3)は xと y

表-２・1 fuzzy 集合の演算

	fuzzy集合の演算	式	論理演算との対応	図-２・1
和	$Max\{M_A(x),M_B(x)\}$	$M_A(x) \vee M_B(x)$	*or*	(B)
積	$Min\{M_A(x),M_B(x)\}$	$M_A(x) \wedge M_B(x)$	*and*	(C)
補	$1-M_A(x)$ or $1-M_B(x)$	$\overline{M}_A(x)$ or $\overline{M}_B(x)$	*not*	(D)

の直積空間で定義され、次式となる。

$$R_{A\to B}(i,j) = Min\{M_A(x_i), M_B(y_j)\} \quad (2\cdot5)$$

また、式(2・4)の演算 +は式(2・4)右辺の第1,2項を $R_{A\to B}, R_{\overline{A}\to C}$ とすると、次のようになる。

$$R_{A\to BC}(i,j) = Max\{R_{A\to B}(i,j), R_{\overline{A}\to C}(i,j)\} \quad (2\cdot6)$$

一方、式(2・5),(2・6)で $R_{A\to B}, R_{\overline{A}\to C}$ が求まると「$if\ x\ is\ A'$」のとき、「$y\ is\ B'$」または「$y\ is\ C'$」となる推論は、fuzzy合成と呼ばれる次式を用いて計算される。

$$M_{B'}(y) = M_{A'}(x) \circ R_{A\to B} \quad (2\cdot7)$$

$$M_{B'C'}(y) = M_{A'}(x) \circ R_{A\to BC} \quad (2\cdot8)$$

式(2・7)を、次のように書くこともできる。

$$M_{B'}(y_j) = \underset{j}{Max}[\underset{i}{Min}\{M_{A'}(x_i), R_{A\to B}(i,j)\}] \quad (2\cdot9)$$

理解をたすけるため、簡単な例を用いて式(2・5),(2・9)を計算する。いま、$M_A(x_i), M_{A'}(x_i), i=1,2,3, M_B(y_j), j=1,2,3,4$ を次のように与える。

$$M_A(x_i) = [0.2\ 1\ 0.7] \quad (2\cdot10)$$

$$M_{A'}(x_i) = [1\ 0.6\ 0.3] \quad (2\cdot11)$$

$$M_B(y_j) = [0.3\ 0.9\ 0.8\ 0.6] \quad (2\cdot12)$$

したがって、式(2・5),(2・9)より次式を得る。

$$R_{A\to B}(i,j) = \begin{vmatrix} 0.2 & 0.2 & 0.2 & 0.2 \\ 0.3 & 0.9 & 0.8 & 0.6 \\ 0.3 & 0.7 & 0.7 & 0.6 \end{vmatrix} \quad (2\cdot13)$$

$$M_{B'}(y_j) = [1\ 0.6\ 0.3] \circ R_{A\to B}(i,j)$$
$$= [0.3\ 0.6\ 0.6\ 0.6] \quad (2\cdot14)$$

式(2・7)において、$M_{A'}(x)$ の代りに $M_A(x)$ を用いると

$$M_A(x) \circ R_{A\to B} = [0.2\ 1\ 0.7] \circ R_{A\to B}(i,j)$$
$$= [0.3\ 0.9\ 0.8\ 0.6] \quad (2\cdot15)$$

となって、これは式(2・12)の $M_B(y)$ に一致している。式(2・15)が $M_B(y)$ に一致する条件は、式(2・16)で与えられる。

$$Max\{M_A(x)\} = 1 \quad (2\cdot16)$$

3. 流出予測問題への適用

t 時刻の流出量 $Q(t)$ は、t 時刻より以前の流出量,降雨量に依存しているはずである。離散型表示では、次のようになる

$$Q(t) = f\{Q(t-1), Q(t-2), \cdots, Q(t-m), r(t-1), r(t-2), \cdots, r(t-n)\} \quad (3\cdot1)$$

m,n は流域の記憶の長さである。式(3・1)の関数形 f は未知としても、式(3・1)を(2・1)や(2・2)のような条件付命題で表示可能である。考えられる/つの条件付命題は、以下のようになる。

$$R_t = \text{If } Q(t-m) \text{ then } Q(t-m+1) \text{ then } \cdots \text{ then } Q(t-1) \text{ then } Q(t) \text{ then } r(t-n) \cdots\cdots\cdots\cdots \text{ then } r(t-1) \quad (3\cdot2)$$

この命題は、時刻毎に変化するので、式(3・2)を R_t とおくことができる。したがって、t 時刻までに $R_1, R_2, \cdots, R_t$ の条件付命題が得られるので、時刻 t の時点での全体の「あいまい関係」を次のように表わすことができる。

$$\Pi_t = R_1\ or\ R_2\ or\ R_3\ or\ \cdots\ or\ R_t \quad (3\cdot3)$$

いま、$M_{Q(t)}, M_{r(t)}$ を $Q(t), r(t)$ のメンバーシップ関数とするならば、時間ステップを1時刻だけ進めた $(t+1)$ 時刻の $Q(t+1)$ のメンバーシップ関数、すなわち、「あいまい推論」は式(2・7),(2・8)を参照すると

$$M_{Q(t+1)} = M_{Q(t-m+1)} \circ M_{Q(t-m+2)} \circ \cdots\cdots \circ M_{Q(t)} \circ M_{r(t-n+1)} \circ M_{r(t-n+2)} \circ \cdots\cdots \circ M_{r(t)} \circ \Pi_t \quad (3\cdot4)$$

と書くことができる。R_t は、式(2・3)より次のようになる。

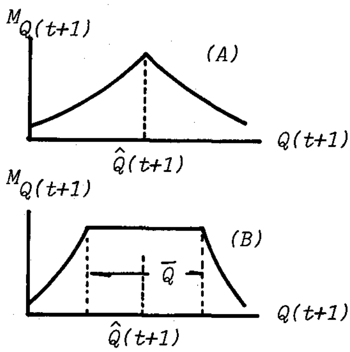
$$R_t = M_{Q(t-m)} \times M_{Q(t-m+1)} \times \cdots \times M_{Q(t)} \times M_{r(t-n)} \times M_{r(t-n+1)} \times \cdots\cdots\cdots\cdots \times M_r(t-1) \quad (3\cdot5)$$

したがって、式(3・5),(3・3),(3・4)を順次用いと、1ステップだけ将来時刻の流出量のメンバーシップ関数が得られることになる。

次に、降雨量や流出量の観測値にメンバーシップ関数を導入する意味を考えてみよう。これらの観測値をそれぞれの量の近似値と考えるならば、当然、これらの観測値がその近似値に帰属する度合も考えることができる。したがって、どのよう

な形のメンバーシップ関数を採用するかという問題が残るが、メンバーシップ関数を導入する意味は理解できよう。

「あいまい推論」によって得られる結果は、式(3・4)に示すように流出量 $Q(t+1)$ のメンバーシップ関数で、流出量そのものではない。それゆえ、$M_{Q(t+1)}$ から $(t+1)$ 時刻の推定値 $\hat{Q}(t+1)$ を求めようとする場合、最も常識的な手法は図－3・1(A)に示すようにメンバシップ関数 $M_{Q(t+1)}$ のグレードが最大となるときの $Q(t+1)$ を $\hat{Q}(t+1)$ とするものである。また、(B)のように最大値がある区間に渡っているとき、その中間値を $\hat{Q}(t+1)$ とする。



図－3・1 予測値の推定法

4．実測値を用いた計算例

神流川流域における時間雨量,時間流出量を用いた計算結果を示す。降雨量は流域平均雨量を採用し、流出量は実測値である。

式(3・1)において $m=n=1$ とし、降雨量,流出量ともに指数関数形のメンバーシップ関数を採用した計算例は既に報告している[6]。ここではこれをmethod－1とし、新たに式(3・1)を次のようにした手法(これをmethod－2と呼ぶ)を示し、両者を比較した。

$$\begin{aligned}\Delta Q(t) &= f\{\Delta Q(t-1), r(t-1)\}\\ \Delta Q(t) &= Q(t)-Q(t-1)\end{aligned} \qquad (4\cdot 1)$$

したがって、「あいまい推論」では $\Delta Q(t+1)$ のメンバーシップ関数 $M_{\Delta Q(t+1)}$ を推論することになる。図－3・1に示す手法を用いると、予測値 $\hat{Q}(t+1)$ を次のように書くことができる。

$$\hat{Q}(t+1) = Q(t) + \Delta\hat{Q}(t+1) \qquad (4\cdot 2)$$

次にメンバーシップの関数形であるが、図－4・1に示すように種々の関数が用いられている。ここでは、method－1,2ともに図－4・1(2)の指数関数形のメンバーシップ関数を採用した。降雨量 $r(t)$ のメンバーシップ関数を次式に示す。

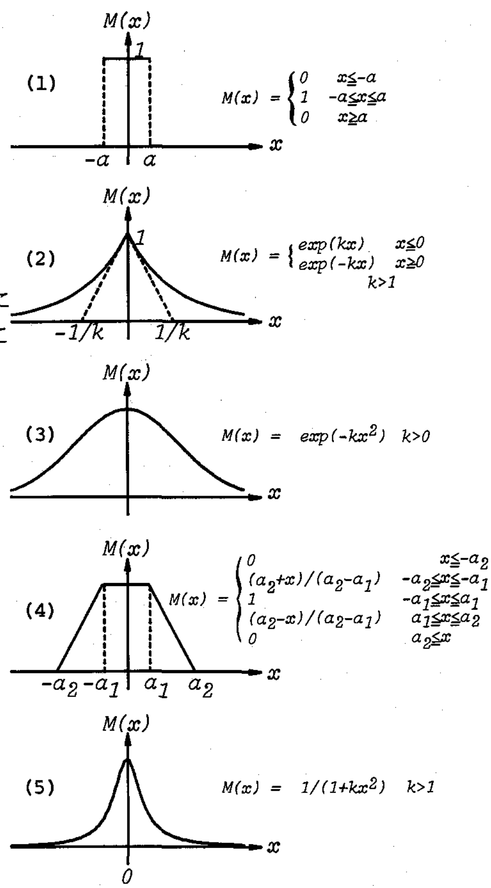
$$M_{r(t)} = \begin{cases} exp\{-0.4|x-\bar{r}_t|\} & x \geq 0 \\ 0 & x<0 \end{cases} \qquad (4\cdot 3)$$

$$\bar{r}_t = 2\cdot Int\{\frac{r(t)+1}{2}\} \qquad (4\cdot 4)$$

式(4・4)は、降雨量の単位変動幅を2mm／hrとしたことを意味する。また、$Q(t)$, $\Delta Q(t)$ のメンバーシップ関数は、次式を用いた。

$$M_{Q(t)} = \begin{cases} exp\{-0.8|y-Q(t)|\} & y \geq 0 \\ 0 & y<0 \end{cases} \qquad (4\cdot 5)$$

$$M_{\Delta Q(t)} = exp\{-0.4|z-\Delta Q(t)|\} \qquad (4\cdot 6)$$



図－4・1 近似値0のメンバーシップ関数[7]

$Q(t)$, $\Delta Q(t)$ の単位変動幅は、それぞれ1mm／hr,0.5mm／hr とした。式(4・3),(4・5)の第2式は、$r(t)$, $Q(t)$ が負値をとらない条件である。

図－4・2,4・3は、それぞれのメンバーシップ関数を図示したものである。図－4・4,4・5と図－4・6 4・7は、同一の資料を用いたmethod－1,2の計算結果を示している。図－4・5,4・7は、流出量のピークの前後12時間のメンバーシップ関数 $M_{Q(t+1)}$, $M_{\Delta Q(t+1)}$ を図示したものである。(計算では全区間にわ

たってメンバーシップ関数を求めている)また、図- 4・4,4・6の実測流出量(実線)上に描かれている棒状の印は、メンバーシップ関数が図- 3・1 (B)のようになったときグレードが最大となる範囲 $\overline{Q}$ を示している。メンバーシップ関数が図- 3・1 (A)のように1点でグレードが最大となる場合、これを黒丸印で表わしている。図- 4・4,4・6の棒印は、いわば、予測値の幅を示しており、棒印の長さが短く、かつ、実測のハイドログラフと交差しておれば、予測の精度が高いと解釈できる。図- 4・8～4・10は、メンバーシップ関数の形状の図を省略しているが、図- 4・4,4・6と同様にmethod- 1,2の計算結果をそれぞれ(A),(B)に示している。いずれの場合も、method- 2が良好な結果を与えている。

5. まとめおよび今後の展望

指数関数形のメンバーシップ関数を採用し、流出系のシステム方程式に相当する式(3・1)を式(4・1)のように変形して良好な結果を得た。他の関数形のメンバーシップ関数を用いた計算は必ずしも計算例が豊富でないが、例えば、図- 4・1(3)のメンバーシップ関数を用いたとき、図- 4・5,4・7に示すような $M_{Q(t+1)}, M_{\Delta Q(t+1)}$ の形状は変化するが、図- 4・4,4・6のように表示すると大差は認められなかった。

本研究において、t 時刻に得られる条件付命題 R_t を用いてこの時刻までの全体の「あいまい関係」を式(3・3)で表わした。したがって、中には矛盾する命題があったとしても、全体として妥当な値を推定すると考えられる。しかし、詳しく検討すると、今後以下のような点に留意した研究が必要であると思われる。ここに示した「あいまい推論」とカルマンフィルター法による予測手法を比較すると、表- 5・1のようになり、その対応関係が明瞭である。　ただし、両者間に次のような相異点を挙げることができる。周知のように、カルマンゲインは予測値とその実現値との誤差にも関係している。本研究の「あいまい推論では、一方的に予測するだけで予測誤差が次の時間ステップに全く関与していない。したがって、式(3・3)に示すように t 時刻までの全体の「あいまい関係」Π_t を各時刻の条件付命題 R_t を機械的に「 *or* 」で結合するだけでなく、不都合な命題を削除したり、予測誤差の大小により条件付命題を修正するようなアルゴリズムの開発が必要になろう。例えば、式(3・3)の Π_t から i 時刻の命題 R_i を削除するには

$$\Pi_t \ and\ \overline{R}_i \rightarrow \Pi_t \qquad (5\cdot 1)$$

とするとよく、R_i を R_i' とするには次のようになり

$$(\ \Pi_t \ and\ \overline{R}_i\ )\ or\ R_i' \rightarrow \Pi_t \qquad (5\cdot 2)$$

かなりの程度複雑な操作も可能と思われる。[8]

表- 5・1 カルマンフィルター法との対応

カルマンフィルター法	本手法
システム方程式	式(3・2)
状態方程式	式(3・3)
観測方程式	式(3・4)

参考文献

1) L.A.Zadeh : Fuzzy Sets,Information Control,8,338～353,1965
2) C.P.Pappis and E.H.Mamdani : A Fuzzy Logic Controller for a Traffic Junction,IEEE Transaction,on Systems,man, and Cybernetics,Vol.SMC- 7,No.10,1977
3) 例えば
浅居喜代治,他：あいまいシステム入門,オーム社,1978
西田俊夫,他：ファジイ集合とその応用,森北出版,1978
4) E.Hisdal : A Fuzzy If Then Else Relation with Guaranteed Correct Inference,Edited by R.R.Yager,Fuzzy Set and Possibility Theory,Pergamon Press,1982
5) E.H.Mamdani Application of Fuzzy Algorithms for Control Simple Dynamic Plant,Proc.IEEE 121- 12,1585～1588,1974
6) 藤田睦博：Fuzzy 理論を用いた流出予測,第21回自然災害科学総合シンポジウム講演要旨集,1984
7) A.Kaufman : Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets,Vol.1,Academic Press,1975
8) 菅野道夫：あいまい集合と理論の制御への応用,計測と制御,Vol.18,No.2,150～160,1979

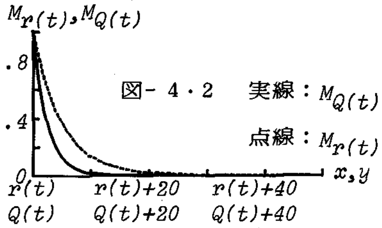


図- 4・2　実線：$M_{Q(t)}$
点線：$M_{r(t)}$

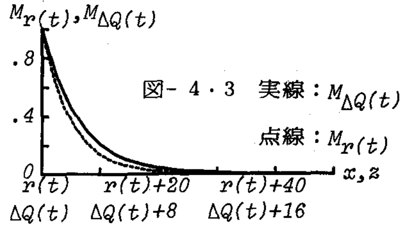


図- 4・3　実線：$M_{\Delta Q(t)}$
点線：$M_{r(t)}$

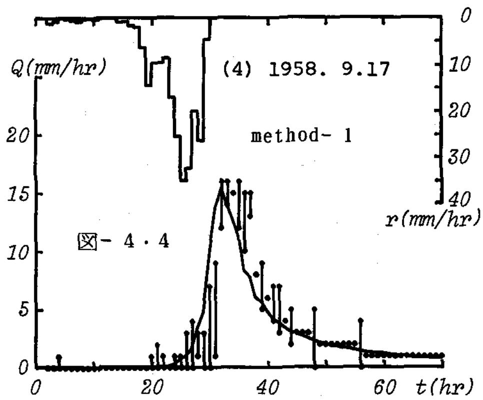


図- 4・4

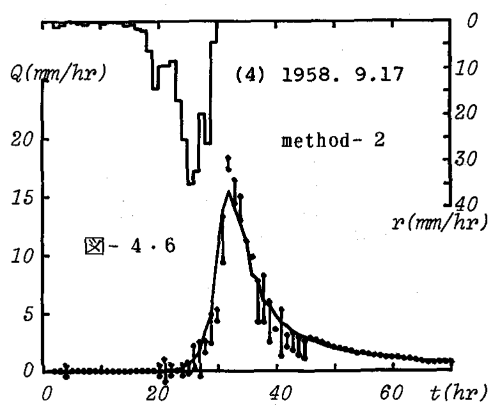


図- 4・6

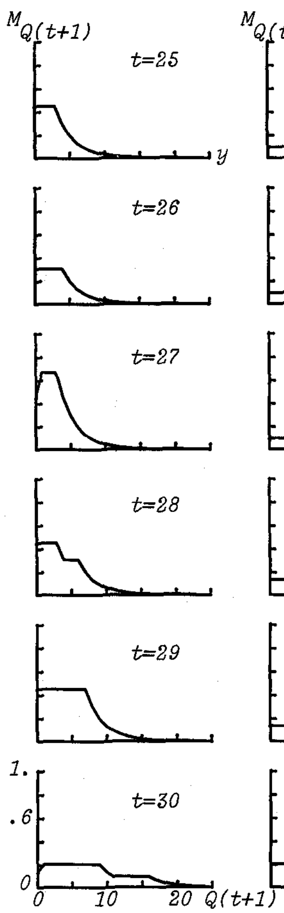


図- 4・5

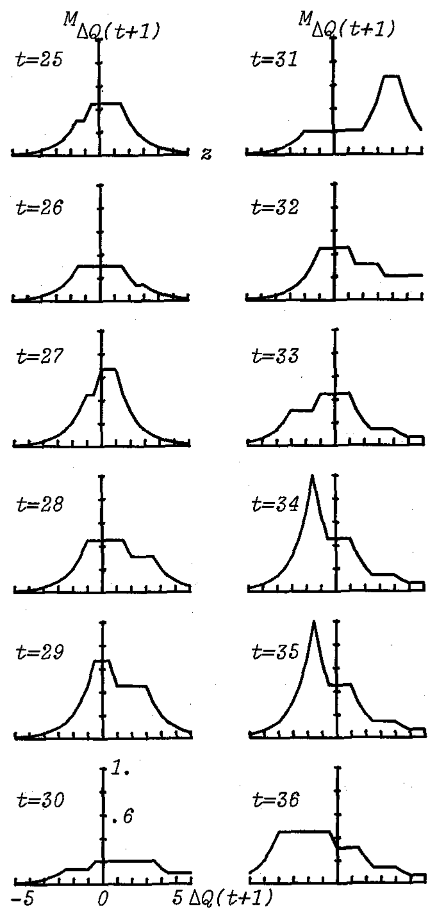


図- 4・7

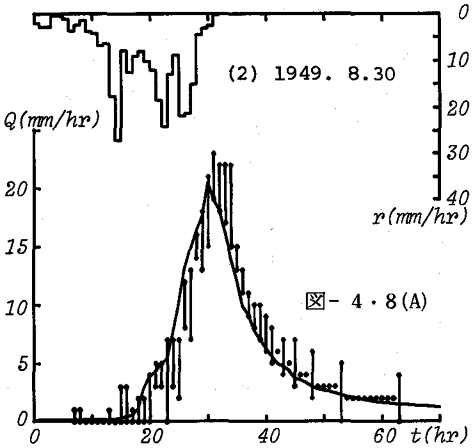


図- 4・8(A)

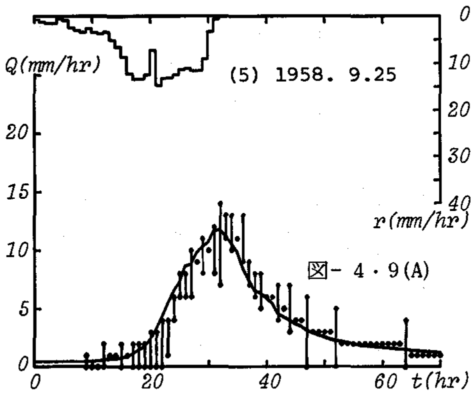


図- 4・9(A)

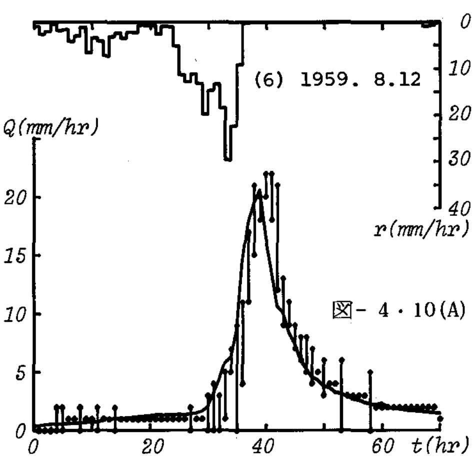


図- 4・10(A)

(method- 1)

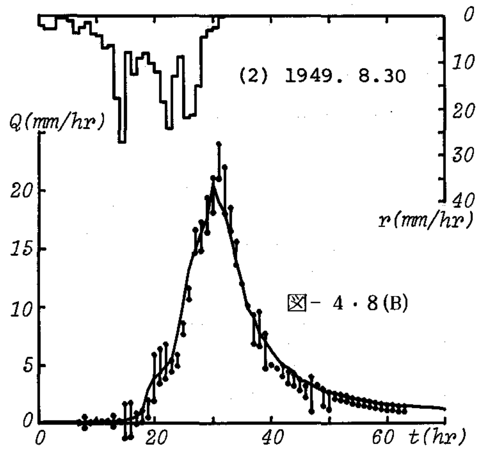


図- 4・8(B)

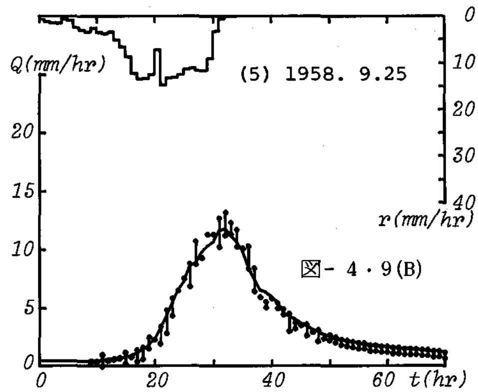


図- 4・9(B)

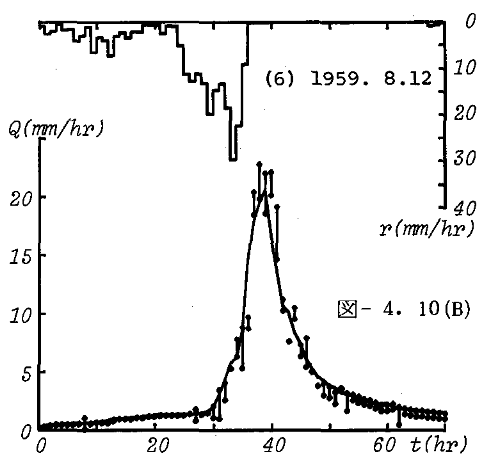


図- 4. 10(B)

(method- 2)