

有限要素法による洪水流出解析

Finite Element Method for Flood Run-off

国立防災科学技術センター 正会員 大 倉 博

1. はじめに

洪水流出は流域の物理的・地形学的特徴、土地利用の形態、降雨強度とその継続時間、先行降雨などの流域の水理・水文条件に影響される。都市化等、開発に伴う洪水流出の変化は主に流域の土地利用形態の変化によって生じる。開発の対象となる流域の多くは降雨と流出量の長期にわたる観測資料が無く、また、開発計画期間内に十分な観測資料が得られない場合が多い。このような流域の洪水を予測するための流出解析モデルとして流域の水理・水文特性からモデルのパラメーターが簡単に推察できるものが求められる。

流域の水理特性をその空間分布までも表現するモデルとして等価粗度法が多用されている。等価粗度法は流域をいくつかのブロックに細分しこれらのブロックの形状を長方形で単純化することにより、流域を幾つかの長方形のモデル斜面と流路が組み合わされたものと見なし、斜面と流路における雨水流下現象を水理学的に追跡するものである。同様に斜面と流路の雨水流下現象を水理学的に追跡するが、斜面形状を単純化せず、流域の水理・水文特性をきめ細かく表現するモデルとして川原ら（1980）が有限要素法によるモデルを、川谷（1981）が差分法によるモデルを提案している。

有限要素法によるモデルは差分法によるモデルに比べ流域の境界形状を正確に入力でき、また境界条件を簡単に設定できる。さらに、データーカードを差し替えるだけで異なる流域を解析出来るプログラムの作成が容易である。川原らのモデルは基礎方程式を構成する運動方程式に浅水長波方程式を用いている。これに対し、本報告は運動方程式に Manning 式を用いた。これは、Manning 式が等価粗度法の運動方程式に多用され、等価粗度法で得られた知見、すなわち、土地利用と Manning の粗度との関係を利用するためである。

本報告は有限要素法による流出解析モデルの運動方程式に Manning 式を用いた場合の三種類の時間積分法の計算結果をモルタル単斜面からの流出の実験結果と比較し精度と計算安定性を検討する。

2. 基礎方程式

図-1に示される直交座標系内の平面ABC上の二次元流れを考える、 X_i は座標をあらわし、 X_1 と X_2 は水平方向座標を示し、 X_3 は鉛直方向座標を示す。基礎方程式は運動の式と連続の式から成る。Manningの式を運動の式に用いると運動方程式は次式であらわされる。

$$u_i = \frac{1}{N} \cdot h^{2/3} \cdot \Theta_i \cdot (\cos^2 \Theta + \cos^2 \Phi - 1)^{-1/2} \cdot (\sin^2 \Theta + \sin^2 \Phi)^{-1/4} \quad \dots (1)$$

連続の式は

$$\frac{\partial h}{\partial t} + M_{i,i} = I \quad \dots (2)$$

さらに、

$$M_i = u_i \cdot h \quad \dots (3)$$

$$\Theta_1 = \sin \Theta, \quad \Theta_2 = \sin \Phi \quad \dots (4), (5)$$

ここで、 h : 雨水流の水深、 I : 有効雨量強度、 M_i : X_i 軸方向の流量、 N : Manningの粗度係数、 u_i : X_i 軸方向の流速、 Θ : 斜面と X_1 軸の

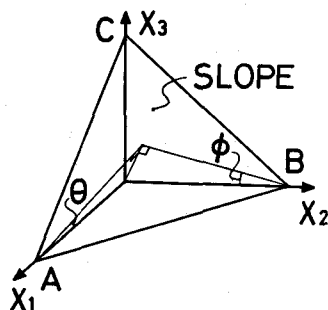


図-1 座標系

なす角度、 Φ : 斜面と X2 軸のなす角度である。また、コンマに続く下添字は添字方向の偏微分をあらわす。さらに、式中の同一項に同じ添字を持つ量が繰り返し現れるときは、その添字について総和を取るものとする。

3. 基礎方程式の離散化

(2) 式をカラーキン法を用いて空間について離散化すると次式が得られる。

$$A_{\alpha\beta} \cdot \frac{\partial h_\beta}{\partial t} + B_{\alpha\beta i} \cdot M_{\beta i} = Q_\alpha \quad \dots (6)$$

$$A_{\alpha\beta} = \int_{\bar{\Omega}_\alpha} \psi_\alpha \psi_\beta d\Omega \quad \dots (7), \quad B_{\alpha\beta i} = \int_{\bar{\Omega}_\alpha} \psi_\alpha \psi_\beta d\Omega \quad \dots (8)$$

$$Q_\alpha = \int_{\bar{\Omega}_\alpha} \psi_\alpha I d\Omega \quad \dots (9)$$

ここで、 h_β と $M_{\beta i}$ は有限要素法の節点 β における水深と X_i 軸方向流量であり、 ψ_α は内挿関数、 $\bar{\Omega}_\alpha$ は節点 α を頂点とする要素の占める領域である。また、 $A_{\alpha\beta}$ は質量行列と呼ばれ、特に (7) 式で定義するときは CM マトリックス (Consistent mass matrix) と呼ばれる。このとき、 $A_{\alpha\beta}$ は行列の対角要素以外にも非零要素を持つ。

(6) 式の時間に関する微分を、 Δt を時間ステップ間隔として後退差分を用いてあらわす。

$$A_{\alpha\beta} h_\beta^{n+1} = A_{\alpha\beta} h_\beta^n - \Delta t \cdot B_{\alpha\beta i} M_{\beta i}^{n+1} + \Delta t \cdot Q_\alpha^{n+1} \quad \dots (10)$$

また、(1) 式の運動方程式と (3) 式から節点 β において次式が得られる。

$$M_{\beta i}^{n+1} = \frac{1}{N} h_\beta^{n+1} \frac{5}{3} \Theta_{\beta i} (\cos^2 \Theta_\beta + \cos^2 \Phi_\beta - 1) (\sin^2 \Theta_\beta + \sin^2 \Phi_\beta) \quad \dots (11)$$

(11) 式が非線型のため、(10) 式と (11) 式の連立方程式は非線型になり、単位時間ステップ先の解を得るには収束解が得られるまで連立一次方程式を反復して解かねばならない。連立一次方程式の元数は節点総数とほぼ等しくなるため、節点総数が増すと連立一次方程式を解くためのプログラムサイズが急増し、さらに、演算時間も急増する。そこで、(10) と (11) 式を連立一次方程式を解く必要のない陽解法に修正した解法アルゴリズム (手法1, 手法2) または、(6) 式の時間微分項を前進差分で離散化した後に陽解法に修正したアルゴリズム (手法3) を用いて単位時間ステップ先の解を得る。

<手法1>

1) 第 n 時間ステップの h^n と M_i^n を用いて次式から $\hat{h}^{n+1}$ を求める。

$$\bar{A}_{\alpha\beta} \hat{h}_\beta^{n+1} = A_{\alpha\beta} h_\beta^n - \Delta t \cdot B_{\alpha\beta i} M_{\beta i}^n + \Delta t \cdot Q_\alpha^{n+1} \quad \dots (12)$$

ここで $\bar{A}_{\alpha\beta}$ は対角行列であり、CM マトリックス $A_{\alpha\beta}$ の α 行の要素の総和 $\sum_\beta A_{\alpha\beta}$ を対角要素 $\bar{A}_{\alpha\alpha}$ に代入し、零を非対角要素 $\bar{A}_{\alpha\beta}$ ($\alpha \neq \beta$) に代入して得られる。これは有限要素法の一要素内の面積をこの要素を構成する節点に等分配し、等分された面積が各節点に集中していると考えて誘導した質量行列と等しくなる。このような質量行列は LM マトリックス (Lumped mass matrix) と呼ばれている。

2) $\hat{h}_\beta^{n+1}$ を (11) 式の h_β^{n+1} に代入し、得られた流量を $\hat{M}_{\beta i}^{n+1}$ とする。

3) 次式から h_β^{n+1} をもとめる。

$$\bar{A}_{\alpha\beta} h_\beta^{n+1} = A_{\alpha\beta} h_\beta^n - \Delta t \cdot B_{\alpha\beta i} \hat{M}_{\beta i}^{n+1} + \Delta t \cdot Q_\alpha^{n+1} \quad \dots (13)$$

4) h_{β}^{n+1} を (11) 式に代入し、得られた流量を $M_{\beta i}^{n+1}$ とする。

<手法2>

<手法1>の (12), (13) 式の右辺第1項の $A_{\alpha\beta}$ も LMマトリックス $\bar{A}_{\alpha\beta}$ に置き換える他は、

<手法1>と同じ。

<手法3>

従来から、差分法で多用される Euler法による陽解法化を有限要素法に適用する。

1) 第n時間ステップの h_{β}^n と $M_{\beta i}^n$ を用いて次式から h_{β}^{n+1} を求める。

$$\bar{A}_{\alpha\beta} h_{\beta}^{n+1} = \bar{A}_{\alpha\beta} h_{\beta}^n - \Delta t \cdot B_{\alpha\beta i} M_{\beta i}^n + \Delta t \cdot Q_{\alpha}^{n+1} \quad \dots (14)$$

2) h_{β}^{n+1} を (11) 式に代入し、得られた流量を $M_{\beta i}^{n+1}$ とする。

4. 計算結果と評価

上述の三手法の特性を調べるため、計算結果を実験結果と比較する。さらに、好結果の得られた手法に対して計算安定条件を求める。

福岡(1981, 1983) は斜面長40m, 幅15.1m, 勾配1/1000のモルタル単斜面に強度49mm/h, 継続時間23分の矩形降雨を与え、斜面からの流出量の測定をしている。この測定値を比較のための実験結果に用いた。しかし、この値は斜面下流端に沿って設けられた集水路(水路長15.1m, 幅40cmの矩形横断面, 勾配 1/220)の下流端における測定値である。三手法による計算結果を単純な条件で実験結果と比較するため、福岡の実験の斜面下流端における流出量を推定した。この推定は斜面と集水路の雨水流にマニング式を適用し、特性曲線法を用いて行った。集水路下流端の実測値と計算値を図-2に示す。また、斜面下流端の推定ハイドログラフを図-4、図-6、図-7の実線で示す。実測降雨強度は変動しているが、計算は降雨強度49mm/h一定の矩形降雨を用いた。

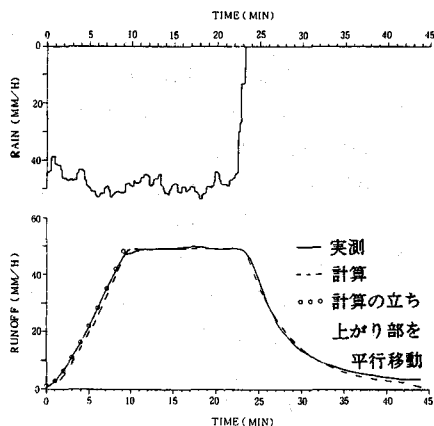


図-2 集水路下流端の実測値と計算値

有限要素法による三手法の計算は実験条件に直接対応するパラメータを一定にしたが、時間ステップ Δt と要素サイズ Δl は異なる値を種々組み合わせて行った。一定パラメータの値は、斜面勾配 θ_1 と θ_2 をそれぞれ

1/1000 と 0, マニングの粗度 N を 0.017, 有効雨量強度 I を $I = 49 \text{ mm/h}$ とした。 $\Delta l = 1.6 \text{ m}$ 場合の要素分割を図-3に示す。辺 AB が斜面の上流端、 DC が下流端である。ここで、境界条件は AB 上で $u_1 = 0 \text{ m/sec}$, AD と BC 上で $u_2 = 0 \text{ m/sec}$ である。

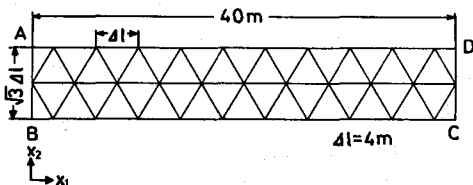


図-3 要素分割

<手法1>に対し $\Delta l = 1.6 \text{ m}$ 一定とし、 Δt を変えた

場合の斜面下流端からの流出量を計算した結果を図-4に示す。 Δt が小さくなるとハイドログラフの上昇部と低減部がなまる。この原因を示すため降雨を零にし、代わりに流出高50mm/hに相当する流量が上流端 AB から斜面へ12分間流入する条件で計算した結果を図-5に示す。図-4と同様に、 Δt が小さくなるとハイドログラフの上昇部と低減部がなまり、さらに、解析解の波頭が到達する前に流出が始まっている。これ

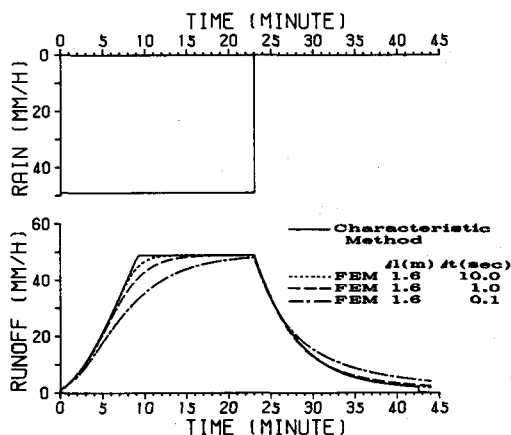


図-4 手法1の計算結果（降雨入力）

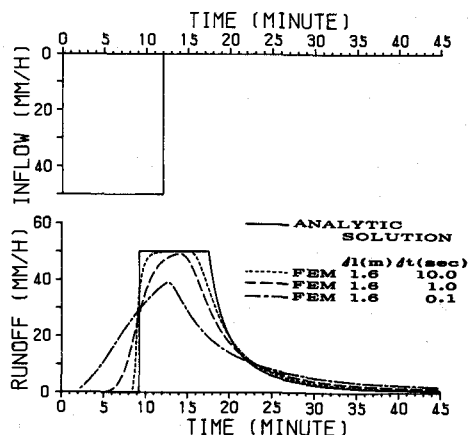


図-5 手法1の計算結果（上流端からの流入）

は(12)式と(13)式の右辺第1項のCMマトリックスが斜面上の水深 h の一様化、すなわち、 h についての重み付き空間移動平均をとるように作用するためである。図-4では水深が上流側で浅く下流側で深いため、上流の水深を増し下流の水深を減ずるように作用し、結果として流れを妨げる。図-5では、水位が急上昇する水流の波頭において水位の急変を和らげるように作用し先端の流れを助長する。このため、解析解の波頭が到達する前に流出が緩やかに始まる。水位低減部に対しては図-4と同様に流れを妨げる。また、ピーク定水位と低減部との遷移点に対しては水位を減じるように作用するので遷移点を実際の位置より下流側へ移動させ、ハイドログラフの50mm/hからの低減の時刻を早める。移動平均の効果は各ステップごとに水面形状に応じて作用するため、 Δt が小さくなると単位時間内のステップ反復回数が増え、移動平均の作用が強まり誤差が増大する。このように「手法1」は精度が Δt に大きく依存する欠点を持つ。

「手法2」に対して $\Delta l = 1.6\text{m}$ 一定として Δt を変えた場合の計算結果を図-6に示す。ハイドログラフの上昇部からピーク平衡状態への遷移点の近傍を除いて特性曲線法による解とよく一致している。また、 Δt が小さくなると遷移点近傍においても特性曲線法による解に近づく。実際、 $\Delta t = 1.0$ と $\Delta t = 0.1$ の結果は特性曲線法による解とほとんど一致している。

「手法3」も「手法2」と同様な結果が得られた。そこで、 Δl に対する安定限界の時間ステップ Δt_{CR} を算出して両手法の計算安定性を評価した。 Δt_{CR} の算出は以下に行う。1) 一定降雨強度 R に対する平衡状態の斜面上の水位を計算し、これを初期条件の水位とする。ただし、擾乱を与えるため斜面下流端の水位を $7/8$ にする。2) 降雨 R を与え続け下流端からの計算流出強度を監視する。3) 計算のオーバーフロー、または、計算開始から4分以上経過した後に5

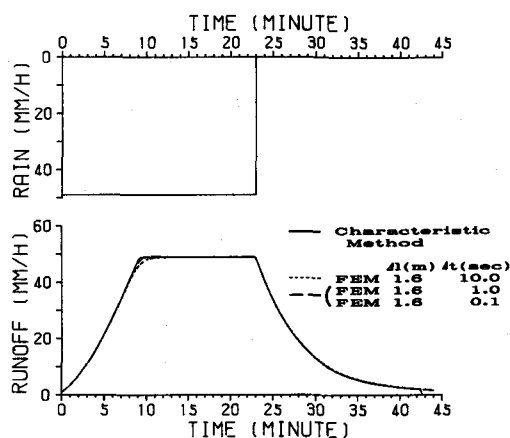


図-6 手法2の計算結果（降雨入力）

ステップ連続して計算流出量の誤差が2%以上になる場合を不安定とする。4) 30分経過した後に20ステップ連続して計算流出量の誤差が2%以下の場合を安定とする。5) 安定となる最大の Δt を Δt_{CR} とする。

$R = 50\text{mm/h}$ のときの Δt_{CR} を表-1に示す。「手法3」の計算安定性は「手法2」に比べ著しく劣る。

時間を1ステップ進めるのに要する演算時間は手法2>が手法1>の2倍である。しかし、この計算条件では一洪水を計算する総合演算時間は手法2>が格段に短くなることがわかる。要素分割、降雨強度、斜面勾配を変えて手法2>の安定限界を調査した結果、次式が得られた。

$$\frac{\Delta t_c}{\Delta l} \cdot \frac{5}{3} \|u_i\| < 1 \quad \cdots (15)$$

ここで、 $(5/3) \|u_i\|$ は擾乱の伝播する速度である。これは、差分法に Euler法を適用し陽解法に定式化したときの従来から知られている計算安定条件に一致する。なお、手法3>の Δt_{CR} は表-1から Δl の約2乗に比例することがわかる。

手法2>の表-1から得られた安定限界点における斜面下流端からの流出量の計算結果を図-7に示す。ハイドログラフの上昇部からピーク平衡状態への遷移点近傍を除き、特性曲線法によるものと良く一致している。また、 Δl が縮小すると当然であるが遷移点近傍の誤差が減少する。なお、 $\Delta l = 4.0$ m の場合のハイドログラフ減少部の誤差は、 Δt が大きいために降雨休止時刻の入力に不整合が生じたものである。

Δl (m)		0.4	1.6	4.0
Δt_{CR} (SEC)	手法2	2.197	8.772	21.95
	手法3	0.053	0.804	4.726

表-1 安定限界時間ステップ (Δt_{CR})

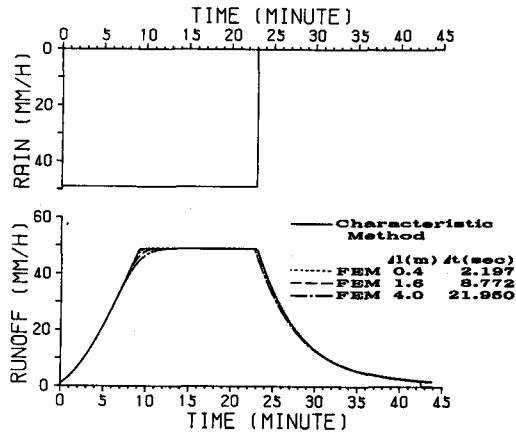


図-7 手法2の計算安定限界における計算結果 (降雨入力)

5. まとめ

流出解析に利用する目的で、運動方程式に Manning式を用いた場合の有限要素法の基本的特性を調査した。ガラーキン法を用いて空間について離散化した後、三種類の陽解法による時間積分の方法の計算結果を実験結果と比較した。この結果、以下ことが得られた。

離散化された方程式の未知水位に対する係数行列に LMマトリクスを用いるときは、既知水位の係数行列にも LMマトリクスを用いなければならない。なぜならば、方程式の既知水位の係数行列に CMマトリクスを用いると計算時間ステップ Δt が小さい場合はハイドログラフの波形が鈍るからである。

有限要素法に Euler法を適用し直接、陽解法に離散化すると安定限界の時間ステップ Δt_{CR} は要素間隔 Δl の約2乗に比例する。これは、差分法に Euler法を適用し陽解法に定式化して得られた、 Δt_{CR} はメッシュ間隔 Δl に比例するという従来からの知見と異なる。これに対し、本報告の手法2>の計算安定限界は

$$\frac{\Delta t_c}{\Delta l} \cdot \frac{5}{3} \|u_i\| < 1 \quad (\text{ここで、}(5/3) \|u_i\| \text{ は擾乱の伝播速度である})$$

となり従来からの知見と一致し、有限要素法に Euler法を適用したものより計算安定性が優れる。

最後に、本文において実験結果として用いた集水路下流端の実測データは福岡輝旗氏より磁気テープで提供していただいた、記して深甚なる謝意を表します。

参考文献

- 1) 福岡輝旗 (1981) : 表面流出に及ぼす排水路の影響について—水理実験と数値実験—, 国立防災科学技術センター研究報告第26号, 63-72, 1981.
- 2) 福岡輝旗 (1983) : 大型降雨実験施設による表面流出実験資料 (I) —流出波形に及ぼす水路網密度の影響に関する実験—, 防災科学技術研究資料, 第82号, 1983.
- 3) Kawahara, M. and Yokoyama, I. (1980) : Finite Element Method for Direct Runoff Flow. Proc. ASCE. HY, 106(4), 519-534, 1980.
- 4) 川谷 健 (1981) : 流域の水理特性を考慮した流出解析. 建設工学研究所報告, 第23号, 187-196, 1981.