第29回水理講演会論文集　1985年２月

貯留関数型洪水流出モデルの比較評価

Comparative Study of Storage Function Models of Flood Runoff

京都大学工学部　正　員　高棹 琢馬
京都大学工学部　正　員　宝　　馨
京都大学大学院　学生員　楠橋 康広

１．緒言

システム（ある現象を生じる場）を理想化・抽象化し，何らかの方法で表現したものがシステムモデルである。したがって，システムモデルは，その現象および場の本質を損なわない程度に理想化されたものでなければならない。降水流出系という大規模かつ複雑なシステムの場合，系内の諸量の空間的・時間的均質化といった形でモデル化されるが，その際，均質とみなしてよいスケールの問題が極めて重要である。この問題は現在のところ十分な解明を見ておらず，その意味で流出モデルは研究途上にあると言える。

一方，工学的な要請として，理想化された流出モデルをさらに簡略化することがある。例えば，斜面流出系を取り上げると，一つの斜面に限れば上述のスケールの問題は一応考慮外に置いてよいし，理想化されたモデルとして Kinematic Wave モデルが存在する。しかしながら，広い流域全体をいくつもの斜面およびそれに付随する河道の Kinematic Wave モデルで覆い尽くす場合，今日の高速のコンピュータをもってしてもなお計算上の問題（主として計算時間）が厳然と存在する。こうした意味で，理想化されたモデルをさらに簡略化したモデルの必要性がある。

本研究では，斜面流出系を対象として，Kinematic Wave モデルを簡略化したものと考えられる既存のいくつかの貯留関数型モデルの比較評価を stochastic な観点から試みる。

２．流出モデルとその評価について

洪水流出系は，一般に次のように記述できる。

$$\{Q\} = f(\{R\},\ H_0,\ A) \qquad (1)$$

ここに，$\{Q\}$ は系からの出力（流量），$\{R\}$ は系への入力（降雨），H_0 は降雨開始時の流域の初期条件，Aは流域場の条件，f はそれらの汎関数である。すなわち，流域は，降雨を流量に変換する変換場とみなせるが，（1）式は必ずしも deterministic な変換を意味しない。つまり，$\{Q\}$，$\{R\}$，H_0，A といった諸量は，本来，空間的・時間的に変動するものであるし，われわれの認識（あるいは観測）自体もそれらを確定的にとらえられるものではない。したがって，それらの平均的な量として $\{\overline{R}\}$，$\overline{H}_0$，$\overline{A}$を用いることにより，（1）式は，理想化されたモデルとして

$$\{Q\} = f(\{\overline{R}\},\ \overline{H}_0,\ \overline{A},\ \{\varepsilon\}) \qquad (2)$$

と置き直すことができよう。ここに，$\{\varepsilon\}$ は $\{R\}$，H_0，Aを平均化したことによって生じる変動成分である。$\{\varepsilon\}$ の平均値が $\{0\}$ であるとすれば，系の平均的挙動は，出力を $\{\overline{Q}\}$ と記して，

$$\{\overline{Q}\} = f(\{\overline{R}\},\ \overline{H}_0,\ \overline{A}) \qquad (3)$$

で与えられよう。$\{Q\}$ と $\{\overline{Q}\}$ との偏差は $\{\varepsilon\}$ に起因するものであり，これを $\{\delta\}$ と記せば，

$$\{Q\} = \{\overline{Q}\} + \{\delta\} \qquad (4)$$

となる。

さて，系の平均的挙動を表す（3）式 f を簡略化したモデルを次式のように表す。

$$\{\overline{Q}\} \fallingdotseq \{\overline{Q^M}\} = g(\{\overline{R}\},\ \overline{H}_0,\ \overline{A}) \qquad (5)$$

$\{\varepsilon\}$ なる変動成分を考慮したときのモデル g による計算流量を $\{Q^M\}$ とすれば

$$\{Q^M\} = g(\{\overline{R}\},\ \overline{H}_0,\ \overline{A},\ \{\varepsilon\}) \qquad (6)$$

（4）式と同様に考えて，

$$\{Q^M\} = \{\overline{Q}^M\} + \{\delta^M\} \qquad (7)$$

従来は，主として，{Q} と $\{\overline{Q}\}$ との偏差あるいは {Q} と $\{\overline{Q}^M\}$ との偏差の"大きさ"に着目して流出モデルの評価を行ってきた。しかしながら，多くのモデルがある程度のハイドログラフの適合度を得ることができるので，そうした評価方法では，どのモデルがよいのか明確な答えを得られないようである。流出現象が physical and stochastic であるという立場に立てば，$\{\delta\}$ や $\{\delta^M\}$ の"大きさ"だけでなく，その確率統計的性質にも着目する必要があろう。

こうした観点から，流出モデル評価の手順として以下のようなものを考えてみた。

① 理想化されたモデルとして Kinematic Wave モデルを想定し，$\{\overline{R}\}$，$\overline{H}_0$，$\overline{A}$を与えて，$\{\overline{Q}\}$ を求めておく。

② ある確率統計的性質をもつ確率変数の系列 $\{\varepsilon\}$ を与え，①と同じ条件のもとに流出計算を行う。これにより得た流量を {Q} とみなし，$\{\delta\} = \{Q\} - \{\overline{Q}\}$ を求める。

③ 簡略化されたモデルとしていくつかの貯留関数型モデルを想定し，$\{\overline{R}\}$，$\overline{H}_0$，$\overline{A}$，$\{\varepsilon\}$ を与え，$\{Q^M\}$ を求め，$\{\delta^M\} = \{Q^M\} - \{\overline{Q}\}$ を求める。

④ $\{\delta\}$ の確率統計的性質と $\{\delta^M\}$ のそれとを比較検討する。これが十分近いモデルが，もとのモデルの確率変換特性を保存するという意味で，よい簡略化モデルであると言える。

この手順を適用した例は **4**．において示される。

3． 斜面流出の無次元化モデル

当該流域の最適なモデルを見出そうとしても，冒頭に述べたスケールの問題，実測の雨量・流量データに含まれる誤差の評価などが隘路となる。ここではそうした難点を排除する意味で斜面流出系のみを取り扱うこととし，理想化された斜面流出モデルを簡略化したモデルの評価に問題を限定する。

斜面流出のKinematic Wave モデル（以後，K.W.と記す）は，次式で与えられる。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = r \qquad (t_0 \leqq t,\ 0 \leqq x \leqq \ell) \qquad (8)$$

$$w = \alpha h^m \qquad (9)$$

ここに，t：時間，x：斜面上流端からの距離，h：流積，w：斜面単位幅流量，r：有効降雨強度，ℓ：斜面長，α，m：斜面流定数である。

以後の解析のために，$t = t_* T$，$x = x_* X$，$h = h_* H$，$w = w_* W$，$r = r_* R$ として (8)，(9)式を次のように無次元化する。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \frac{\partial W}{\partial X} = R \qquad (10)$$

$$W = H^m \qquad (11)$$

ここで，無次元化に用いた規準化演算子は次のようである。

$t_* = (\ell\,\overline{r}^{\,1-m}/\alpha)^{1/m}$　（到達時間），　$x_* = \ell$，　$h_* = \overline{r}\,t_*$，

$w_* = \alpha h_*^{\,m} = \ell\,\overline{r}$，　$r_* = \overline{r}$　（平均降雨強度）

(10)，(11) 式の無次元 K.W. モデルを簡略化（集中化）したモデルとして，次の３つの貯留関数型モデル

モデルF：　$S = K_1 Q^{P1}$　(12)

モデルP：　$S = K_1 Q^{P1} + K_{2P} \dfrac{dQ}{dT}$　(13)

モデルH：　$S = K_1 Q^{P1} + K_{2H} \dfrac{dQ^{P2}}{dT}$　(14)

を考える。ここに，Sは単位幅当たり貯留量，Qは流量である。(10) 式に相当する連続式は，

$$\frac{dS}{dT} = R - Q \qquad (15)$$

藤田[1]は，(12) 式のK_1，p_1を，矩形降雨の場合のK.W.の理論解より，

$$K_1 = m/(m+1),\quad p_1 = 1/m \qquad (16)$$

とおき，三角降雨の場合にも (16) 式を採用している。

Prasad[2]は，S－Q曲線の2価性をdQ／dTの項を導入して(13)式の形で表現しようとした。これに対し，星・山岡[3]は，矩形降雨に対する K.W. モデルから得られる貯留方程式より，K_{2P}が流量Qの関数となることに注目し，これが流量に依存しないようにするためにp_2を導入して，Prasad モデルを含む形の (14) 式を提案した。そして，矩形降雨の場合は，

$$K_{2H} = 0.1m^{0.2},\quad p_2 = m^{-3/2} \qquad (17)$$

三角降雨の場合は，降雨ピーク時刻 T_a と降雨終了時刻 T_r の比 T_a/T_r とmの関数でそれらを与えた。

Prasadモデルの場合，K_{2P}はそのような形で与えられていないので，ここでは，K_{2P}がmのみの関数であると仮定して，次のような方法で数値実験的にK_{2P}の関数形を決めることとした。すなわち，mを 1.0～2.0 の間で 0.1毎に動かして流出をシミュレートし，最適化手法（目的関数は，計算時間間隔ΔT=0.05毎の流量の誤差二乗和とした）により，それぞれのmに対してK_{2P}を求めた。ただし，降雨波形は，矩形，三角形（T_a/T_r = 0.2, 0.5, 0.8）の4ケースとして，平均降雨強度1，継続時間2とした。結果を図-1に示す。これより，K_{2P}を次式で与えておく。

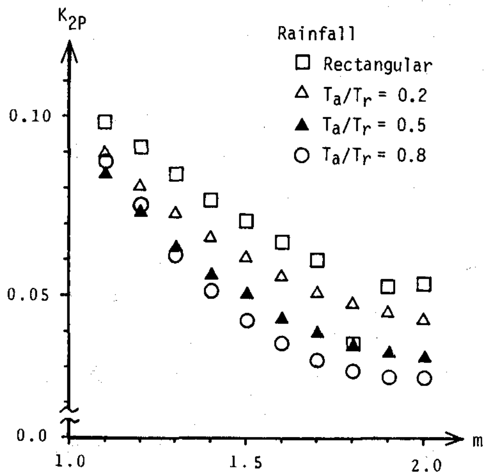

図-1 K_{2P}と m の関係

表-1 (18)式の定数a，bの値

降雨 (T_a/T_r)	a	b
矩形降雨	-0.7790	-1.5235
三角降雨 (0.2)	-0.9195	-1.3830
三角降雨 (0.5)	-1.2564	-1.0462
三角降雨 (0.8)	-1.5148	-0.7878

$$K_{2P} = \exp(am+b) \qquad (18)$$

各ケースに対して最小二乗法で求めた定数a，bの値を表-1に示す。m＝ 5/3（すなわち，Manning 則を想定）の場合に，同じ方法で最適化した値もこの曲線の近傍に求められた。

以後，斜面流が Manning則に従うとして，m＝ 5/3と固定する。このとき，(12)～(14)式のモデルパラメタ値は，上記の降雨に対して，(16)～(18)式などにより，表-2のように決まる。図-2にそれらのパラメタを用いた場合のK.W.および，モデルF，P，Hのハイドログラフを示す。(18) 式で与えたモデルPのハイドログラフの適合度は良好であり，モデルFとモデルHの中間的存在となっている。なお，数値計算は，K.W.モデルは Lax-Wendroff 型の差分スキーム，貯留関数型モデルは Runge-Kutta-Gill 法によった。

4． 無次元領域における検討

前章に挙げた4つのモデルに，2．で述べた方法を適用する。初期条件，場の条件は，それぞれ，

$\overline{H}_0$: K.W.の場合　$H(X,0)=0$, $W(X,0)=0$, $0 \le X \le 1$

貯留関数型モデルの場合　$S(0)=0$, $Q(0)=0$

$\overline{A}$: m = 5/3

とする。降雨 $\{\overline{R}\}$ は 3. と同様の矩形降雨と３種の三角降雨を考える。系内に存在する変動成分 $\{\varepsilon\}$ は，ΔT 毎の系列でその確率分布は NID(0, $\sigma_\varepsilon{}^2$) に従うとする。ここでは，$\{\varepsilon\}$ は形式上，降雨の変動としてとらえることにし，σ_ε は，R = 1 であることを考慮して，0.1, 0.5, 1.0 の３種類の値とする。

表-2 貯留関数型モデルのパラメタ値

降雨 (T_a / T_r)	K_1	p_1	K_{2P}	K_{2H}	p_2
矩形降雨	0.625	0.6	0.05950	0.11076	0.4648
三角降雨 (0.2)	0.625	0.6	0.05418	0.07572	0.5537
三角降雨 (0.5)	0.625	0.6	0.04327	0.09608	0.4509
三角降雨 (0.8)	0.625	0.6	0.03643	0.10441	0.3586

4．1　Kinematic Wave モデルの確率変換特性

$\{\overline{R}\}$ を入力とするK.W.モデルの出力 $\{\overline{Q}\}$ は図-2に既に示した。$\{\overline{R}\}$ に $\{\varepsilon\}$ が加わった場合，この $\{\varepsilon\}$ が原因となって出力 {Q} にゆらぎが生じる。すなわち，系内に確率変動成分が存在すれば，出力も確率的変動をするはずである。本節では K.W. モデルのこうした確率変換特性(残差系列 $\{\delta\}$ の統計的性質)をシミュレーションにより調べる。

平均値 0，標準偏差 σ_ε の正規乱数を付加した降雨を用いて流出を 100回シミュレートし，ΔT 毎に $\{\delta\}$ を

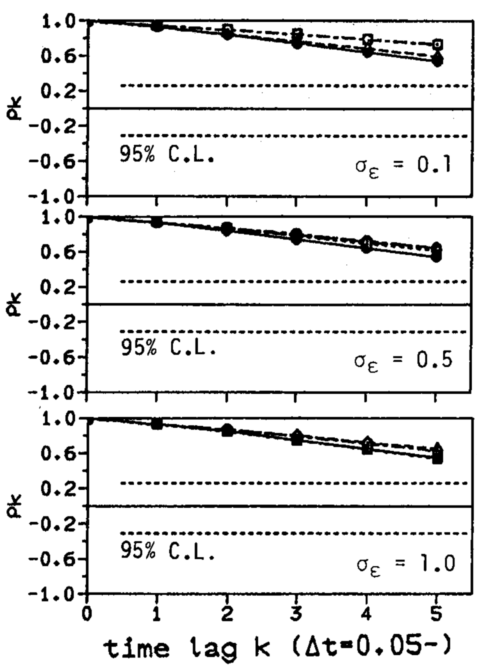

図-3 残差系列のコレログラム（矩形降雨）

—●— K.W.モデル　…○… モデルF
--□-- モデルP　--▲-- モデルH

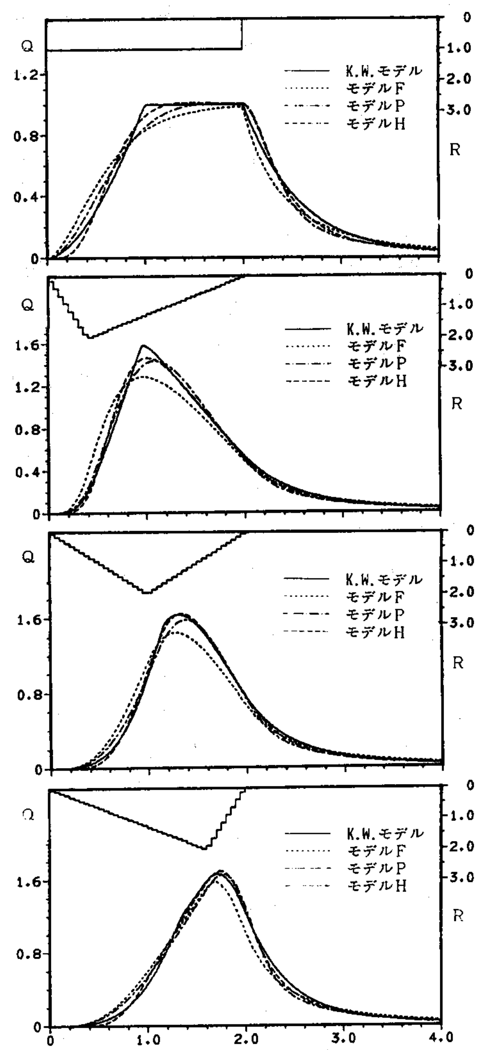

図-2 $\{\overline{R}\}$ を入力とした場合のハイドログラフ

表-3　各モデルの残差系列の統計量

σ_ε	モデル	矩形降雨 $\bar{\delta}$	矩形降雨 σ_δ	三角降雨 ($T_a/T_r=0.5$) $\bar{\delta}$	三角降雨 ($T_a/T_r=0.5$) σ_δ
0.1	K.W.	0.00014258	0.0097963	-0.0010327	0.0046318
	F	-0.087067	0.055411	-0.025122	0.028526
	P	-0.036667	0.029327	-0.015828	0.016980
	H	0.036298	0.023210	0.012697	0.012529
0.5	K.W.	-0.0029228	0.048584	-0.012616	0.024294
	F	-0.090676	0.091164	-0.045547	0.056649
	P	-0.038584	0.062355	-0.031312	0.040035
	H	0.033628	0.051751	0.0036320	0.018521
1.0	K.W.	-0.017496	0.086349	-0.043043	0.063981
	F	-0.11064	0.14173	-0.095890	0.11519
	P	-0.053848	0.10150	-0.072382	0.088816
	H	0.020466	0.085685	-0.022719	0.060008

求め，それについてコレログラムとヒストグラムを描く。ただし，全時間T＝4に対し，ΔT ＝0.05であるから1つのハイドログラフあたり80個のδが得られるが，降雨継続時間は2であるので，降雨すなわち｛ε｝の影響が小さいと考えられる後半30個のδは除去して，結局 5000 個のδを取り扱った。結果を表-3及び図-3，図-4に示す。図-3より，K.W.モデルの残差系列｛δ｝はかなり高い相関をもつと言える。表-3より，入力としての降雨の中に含まれる変動成分は，斜面流出系という場における変換によって，矩形降雨の場合10分の1程度の出力の変動に平滑化されることがわかる。σ_ε ＝0.1，0.5，1.0 のすべてについて同様のことが言える。三角降雨の場合｛δ｝の標準偏差はさらに小さくなる。これは，矩形降雨の場合，急に降雨の強度が大きいところから始まり，急に降雨が終了するため三角降雨の場合ほどハイドログラフがなめらかでないことに一つの原因があると考えられる。

4．2　貯留関数型モデルの評価

貯留関数型モデルF，P，Hについても前節と同様にそれぞれの残差｛δ^F｝，｛δ^P｝，｛δ^H｝を求め，コレログラム，ヒストグラムを描いた。

コレログラムは，図-3に示すように，｛δ｝のそれとよく一致している。三角降雨の場合

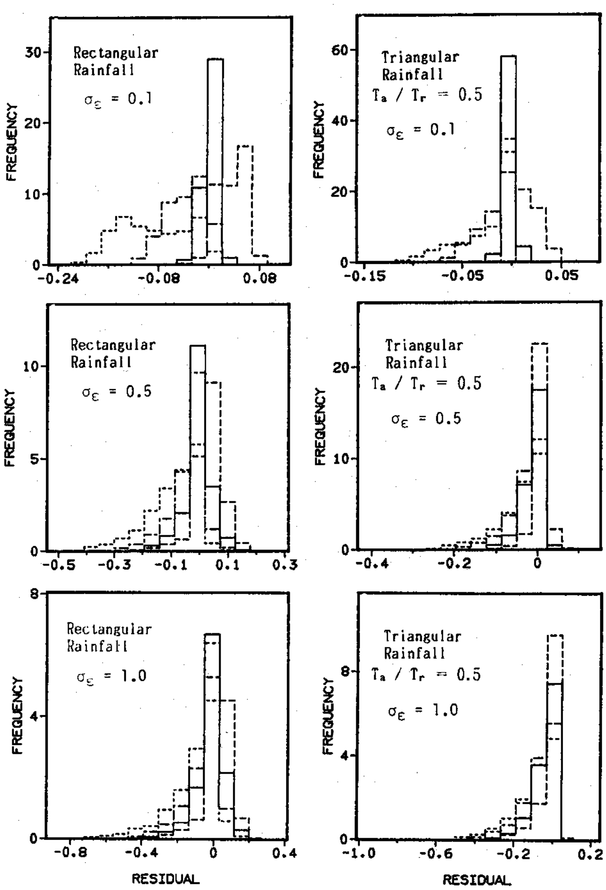

図-4　残差系列のヒストグラム

——— K.W.モデル　　┈┈┈ モデルF

—·—·— モデルP　　- - - - モデルH

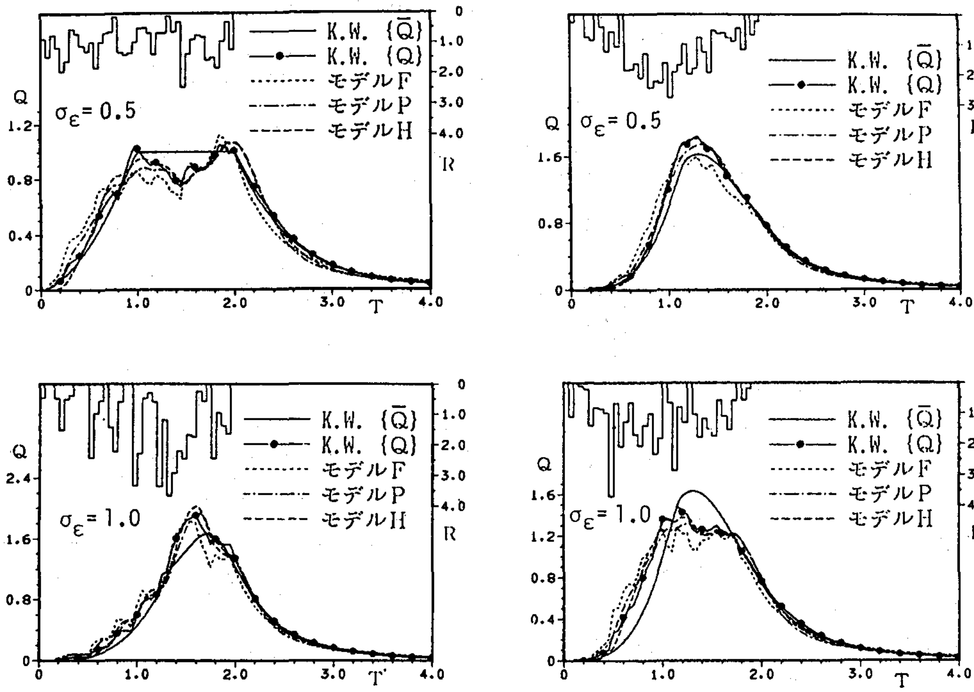

図-5　確率変動 {ε} を考慮した場合のハイドログラフ

も同様の結果であった。次に，残差系列の分布形を調べてみる。矩形降雨・中央ピーク型降雨の場合の各モデルの残差系列の統計量及びヒストグラムを表-3及び図-4に示す。モデルHの残差系列 {δ^H} の平均値と {δ} の平均値との差は，モデルPの残差系列 {δ^P} の平均値と {δ} の平均値との差と同程度であるがモデルHの残差系列 {δ^H} の標準偏差は {δ} のそれに常に近い値をとっている。結局，{δ^H} の統計的性質が最もK.W.モデルのそれに近く，モデルHが他の二つのモデルより優れていると考えてよい。他の三角降雨についてもこれらの場合とほぼ同様の結果を得た。

確率変動 {ε} を考慮した場合のハイドログラフの若干の例を図-5に示す。モデルHが他のモデルよりもK.W.モデルの挙動をよく再現していることがこの図からも見てとれ，表-3及び図-4の結果を裏付けている。

本評価法によれば，モデルHが最も優れていると言える。ただし，この結果は無次元領域の単位幅斜面流出系という最も単純な場の設定のもとに得られたものである。

5．結語

簡略化したモデルがもとのモデルの確率変換特性を保存するか否かといった stochastic な観点からモデルの評価を試みた。こうした方法を実流域に持ち込むには，例えば，系内に存在すると考える {ε} の評価が，流域の基準とすべきスケールの問題とあいまって容易ではないことなどいくつかの克服すべき課題が残されているが，モデル評価におけるこのような考え方自体は非常に重要であると思われる。

【参 考 文 献】

1）藤田睦博：斜面長の変動を考慮した貯留関数法に関する研究，土木学会論文報告集，第 314号，1980，pp.75-86.

2）Prasad, R.: A Nonlinear Hydrologic System Response Model, Jour. of Hydrau. Divi., Proc. of the ASCE, Vol. 93, No. HY4, pp.201-221, 1967.

3）星　清・山岡勲：雨水流法と貯留関数法との相互関係，第26回水理講演会論文集，1982，pp.273-278.