

隔壁の瞬間的除去に伴う gravity current に関する基礎的研究 Behavior of Gravity Current in Conduit Caused by a Sudden Release of a Bulkhead

東京都立大学工学部 正会員 安 川 浩
 東京都立大学工学部 正会員 宇 井 正 和

1. 緒 言

近年、都市の発展に伴い、地下街、トンネル、大規模下水管路等の建設が盛んに行われるようになり、他方ではこれら諸施設の安全管理上、様々な状況下における過渡的流れの挙動を予測することが必要になるものと予想される。本研究の目的は、大規模な合流式下水幹線内の水流管理、及び大地震時に発生が懸念される地下空間への浸水防止、もしくは被害軽減などの観点から、一様断面管路内隔壁の瞬間的除去に伴う gravity current の挙動を系統的に記述しようとするものである。

対象とする区間内の開水路部分の流れに関しては、基礎方程式を数値的に積分せねばならないが、それには初期条件と境界条件が合理的に設定されねばならない。本報告はそれら初期条件の設定法に関するもので、水平な一様管路の中央部に設けられた手動隔壁を瞬間的に引き抜く場合を想定し、上流側給水源との接続方法を考慮した非粘性解の誘導法を検討し、実験によりその適用性を検討しようとするものである。

2. 開水路不定流の基礎式

Vasiliev (1965)¹⁾ の記法によれば、横流入を考慮せぬ場合の開水路不定流の基礎式は、次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \left(\frac{P}{\rho} \right)_{b=const.} + \frac{Q^2}{A} \right\} &= gA \left(S_0 - \frac{|Q|}{K^2} \cdot Q \right) \\ \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 t は時間、 x は流れ方向への空間座標、 Q は流量、 A は流水断面積、 ρ は流体密度、 P は断面に作用する水圧による力、 g は重力加速度、 S_0 は水路床勾配、 K は通水能を表わす。

式(1)を断面平均流速 u と流水断面積 A について表わし、Escoffier (1962)²⁾ の stage variable Ω を導入すれば次式に変形される。

$$\frac{d}{dt} (u \pm \Omega) = f_1 \dots\dots\dots (2)$$

但し、 $\Omega = \int_0^y \sqrt{\frac{gb(\xi)}{A(\xi)}} d\xi$ 、 y は水深、 $A(\xi)$ 及び $b(\xi)$ はそれぞれ水路床より高さ ξ に水面がある場合の流水断面積及び水面幅、また $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (u \pm c) \frac{\partial}{\partial x}$ 、 $c = \sqrt{gA(y)/b(y)}$ 、 $f_1 = g \left(S_0 - \frac{|Q|}{K^2} \cdot Q \right)$ 。

水平水路上の非粘性流れにおいては式(2)の右辺は零となり、特性曲線 $dx/dt = u \pm c$ に沿い、 $(u \pm \Omega)$ は一定値を保つ (Sakkas・Strelkoff (1973)³⁾)。

3. 下流端隔壁除去に伴うオリフィスを有する管路内非定常流の挙動

図-1 に示すオリフィスを装着した管路における隔壁除去直後の過渡的な被圧管内流を考える。管壁の摩擦力の算定に Darcy・Weisbach 式を準用すれば、断面平均流速 u に関し次式が成り立つ。

$$\frac{du}{dt} = g(I - I_f) \dots\dots\dots (3)$$

但し,

$$I = \frac{1}{l} \left[H - \left\{ 2.0 + \frac{1}{C_v^2} \left(\frac{A}{a} \right)^2 \right\} \frac{u^2}{2g} \right],$$

$$I_f = \frac{f}{d} \cdot \frac{u^2}{2g}, \quad C_v \text{ はオリフィス流量係数 (} \div 0.60 \text{)},$$

a/A はオリフィス開口率, l は管長, f は摩擦損失係数。

故に無次元量で表わせれば次式が成り立つ。

$$\frac{du_*}{dt} = 1 - \alpha^2 u_*^2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\text{但し, } u_* = \frac{u}{\sqrt{gH}}, \quad t_* = \frac{\sqrt{gH}}{l} \cdot t,$$

$$\alpha^2 = \frac{1}{2} \left\{ 2.0 + \frac{1}{C_v^2} \left(\frac{A}{a} \right)^2 + f \frac{l}{d} \right\}.$$

上式において過渡的な流速に対する f の値は変動が予想されるが, オリフィス開口率 a/A が小さい場合にはその影響は無視できると想定される。それ故, 係数 α の値は近似的に定数とみなされ, $t_* = 0$ のとき $u_* = 0$ の初期条件の下で式(4)は次式に積分される。

$$u_* = \frac{1}{\alpha} \tanh(\alpha t_*) \quad \dots\dots\dots (5)$$

式(5)によれば, 管内非定常流速の定常流速への接近の仕方は $\tanh(\alpha t_*)$ の関数形で表わされ, 究極の定常流速の 99.6 % に達するに要する無次元時間 t_{u*} は $\alpha t_{u*} = \pi$ により, また実時間では次式で表わされる。

$$t_u = \frac{\pi l}{\alpha \sqrt{gH}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

それ故, 上式で算定される t_u の値が現象の観察のための所要時間と較べて十分に小さければ, 隔壁の瞬間的引抜き直後から近似的には一定流速の流れとみなすことができるであろう。

4. 満管部と開水路部との隔壁の除去に伴う gravity current に関する初期値問題の解

4.1 下流端自由の場合の Benjamin の解

Benjamin(1968)⁽⁴⁾ は水平な一様断面管路の上流側満管部と自由な下流部との隔壁を瞬間的に除去する際の流れに関し, 一定速度 D_1 で移動する満管部と開水路部の境界 (front) を同じく D_1 で移動する座標系から観察するものとし, 次式を導いた。

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} &= \frac{v_2^2}{2g} + y_2 - y_1 = 0 \\ \rho Q (v_2 - v_1) &= P_1 + A_1 p_0 - P_2 \\ Q &= A_1 v_1 = A_2 v_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

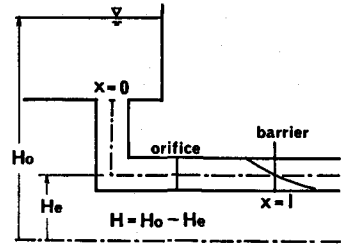


図-1 管路内の過渡的流れ

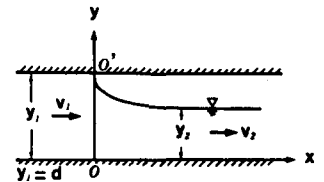


図-2 Benjamin の 解

但し, $v_1 = u_1 - D_1$, $v_2 = u_2 - D_1$, p_0 は断面(1)における管頂部圧力, u は静止している観察者による粒子速度, P は水深 y に対応する水圧による力, A は流水断面面積, 添字は断面(1), (2)に対応するものとする。

式(7)の第1及び第2式より p_0 を消去し、 v_2 について解けば次式が得られる。

$$\frac{v_2^2}{2g} = \frac{P_1 - P_2}{\rho g A_2 \left(2 - \frac{A_2}{A_1} \right)} = y_1 - y_2 \dots \dots \dots (8)$$

式(8)より領域(2)の水深 y_2 及び v_2 が数値的に求まり、管径 d の円形断面に対しては下記で与えられる。

$$\frac{y_2}{d} = 0.5632, \quad \frac{v_2}{\sqrt{gd}} = 0.9324, \quad \frac{v_1}{\sqrt{gd}} = 0.5435 \dots \dots \dots (9)$$

4.2 下流側初期水深 y_0 による解の挙動

下流端自由の Benjamin の仮定に対し、隔壁の下流側に初期水深 y_0 の領域(0)が存在するものとするとき、Benjamin の解として与えられる領域(2)が領域(0)と接続する部分では、一般には水位・流量の不連続を生じるであろう。

このとき、もし初期水深 y_0 が充分小さければ、 y_0 と y_2 との水深差による推力差 ($P_2 - P_0$) は領域(0)の流速 u_0 を領域(2)の u_2 に迄加速するのに充分の大きさを持ちうるであろうが、初期水深 y_0 が増加し y_2 に近づくにつれて、対応する推力差は減少し、遂には u_0 を u_2 に迄加速できなくなり、領域(2)と領域(0)の中間に新しい一様水深部である領域(3)を生じ、領域(2)、(3)及び領域(3)、(0)の間には図-3に示す不連続が生じるであろう。このとき $x=l_2$ 及び $x=l_3$ において不連続条件として運動量方程式と連続式がそれぞれ成り立ち、他方、未知数は y_3 、 Q_3 、 D_2 、 D_3 の4個であるから、方程式系は閉じる。

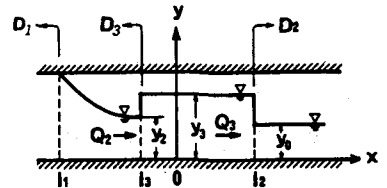


図-3 y_0 による解の挙動(1)

このようにして領域(3)の解が定まるであろうが、初期水深 y_0 の値が更に増大すれば、領域(3)の水深は一層増大し、上流端の伝播速度もまた大きさを増し、遂には開水路部上流端 (front) の移動速度 D_1 に達するであろう。もし初期水深 y_0 がこの第2の限界値を超えれば、Benjamin の解により与えられる領域(2)は消滅し、領域(3)の上流端が新しく front を形成するであろう。それ故、Benjamin の解が存在しうる下流側初期水深 y_0 の上限は $D_3 = D_1$ を満足する y_0 の値までということになると予想される。以下にそれらの量的条件を考察する。

(i) $x = l_3$ における不連続条件

$$\begin{aligned} A_2(u_2 - D_3) &= A_3(u_3 - D_3) \\ \rho A_2(u_2 - D_3)(u_3 - u_2) &= P_2 - P_3 \\ \therefore \frac{Q_3}{A_3} - \frac{Q_2}{A_2} &= \pm \sqrt{\frac{1}{\rho}(P_3 - P_2)\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3}\right)} \dots \dots \dots (10) \end{aligned}$$

(ii) $x = l_2$ における不連続条件

$$\begin{aligned} A_3(u_3 - D_2) &= A_0(u_0 - D_2) \\ \rho A_3(u_3 - D_2)(u_0 - u_3) &= P_3 - P_0 \\ \therefore \frac{Q_0}{A_0} - \frac{Q_3}{A_3} &= \pm \sqrt{\frac{1}{\rho}(P_3 - P_0)\left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_3}\right)} \dots \dots \dots (11) \end{aligned}$$

式(10), 式(11)における複号はエネルギー条件に基づきいずれも負号を採らねばならない。両式より Q_3 を消去すれば, 領域(3)の水深 y_3 に関する次の条件式が得られる。

$$F(y_3) = \frac{Q_2}{A_2} - \frac{Q_0}{A_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_3 - P_2) \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_3} \right)} - \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_3 - P_0) \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_3} \right)} \quad \dots\dots\dots (12)$$

式(12)において領域(3)が生じ始める最初の状態においては $y_2 = y_3$ とみなすことができるから, 第1の平方根は零であり, これより領域(3)の発生に要する y_0 の値は次式により定まる。

$$\frac{Q_2}{A_2} - \frac{Q_0}{A_0} - \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_2 - P_0) \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_2} \right)} = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

一方, 式(12)を満足する y_3 が y_0 をパラメタとして定まり, 対応する D_3 が式(10)より定まるが, この D_3 が式(9)で与えられる v_1 に基づく D_1 と等しくなる y_0 の値が, Benjamin の解が存在するための y_0 の上限となるであろう。円形断面管路における数値的検討によれば, 初期流速 $u_1 = u_0 = 0$ の場合, 図-2 及び図-3 に示す流況が生じるための下流側初期水深 y_0 の範囲は次の不等式で示される。

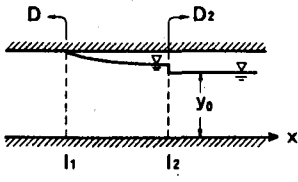
(a) 下流端自由: $y_0/d < 0.3451 \quad \dots\dots\dots (14)$

(b) 領域(3)の発生: $0.3451 \leq y_0/d \leq 0.6956 \quad \dots\dots\dots (15)$

$0.5632 \leq y_3/d \leq 0.7828 \quad \dots\dots\dots (16)$

一方, 式(13)における y_0/d の上限を超えて y_0 が増大する場合, 図-4 の流況を想定し, 式(7)における領域(1), (2)間のエネルギー保存の条件を取り除くならば次式が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1^2}{2g} + \frac{p_0}{\rho g} &= 0 \\ \rho Q (v_2 - v_1) &= P_1 - P_2 + p_0 A_1 \\ Q &= A_1 v_1 = A_2 v_2 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (17)$$



但し,

$$v_1 = u_1 - D_1, \quad v_2 = u_2 - D_1.$$

図-4 y_0 による解の挙動(2)

p_0 を消去し, Q につき解けば,

$$\frac{Q_2}{A_2} - \frac{Q_1}{A_1} = \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1} \right) \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) / \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2A_1} \right)} \quad \dots\dots\dots (18)$$

他方, $x = l_2$ における不連続条件より次式が導かれる。

$$\frac{Q_2}{A_2} - \frac{Q_0}{A_0} = \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_2 - P_0) \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_2} \right)} \quad \dots\dots\dots (19)$$

式08, 式09より Q_2 を消去すれば, y_2 に関し次式が得られる。

$$\left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{A_1}\right) \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_1 - P_2) / \left(\frac{1}{A_2} - \frac{1}{2A_1}\right)} - \sqrt{\frac{1}{\rho} (P_2 - P_0) \left(\frac{1}{A_0} - \frac{1}{A_2}\right)} + \frac{Q_1}{A_1} - \frac{Q_0}{A_0} = 0 \quad \dots\dots\dots 20$$

$Q_1 = 0$, $Q_0 = 0$ の条件下で円形断面管路における数値的検討によれば, $y_0/d > 0.6956$ における式20の解は $y_0/d \rightarrow 1.0$ に至るまで支障なく計算される。

4.3 乾いた下流側水路上への波面の伝播

Benjamin の解は管・開水路流れの境界点 (front) に関する定常解であったが, 隔壁除去に伴う下流側の乾いた水路上への波面の伝播について考察する。

もし, 下流端自由の条件下で Benjamin の解が適用可能であることが実証されうるならば, 上流端と下流端を front 及び波面により境界づけられた不定流区間の上流端近傍には常に Benjamin の解で表わされる constant state : 領域(2), が存在することになる。

Stoker (1957)⁶⁾ に詳述されているように, 隔壁の瞬間的除去に伴う centered simple wave の領域においては, 式(2)より, 放射状の後方特性曲線及び前方特性曲線に沿って次式が成り立つ。

$$\left. \begin{aligned} u - c &= \frac{x}{t} \\ u + \Omega &= u_2 + \Omega_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots 21$$

式21において u を消去すれば, 非定常水深 y に関する次式が得られる。

$$\Omega + c = u_2 + \Omega_2 - \frac{x}{t} \quad \dots\dots\dots 22$$

式20, 式22から明らかなように, 波面先端の伝播速度は $(u_2 + \Omega_2)$ で与えられる。

5. 実験的考察

実験水路は直径 10 cm, 長さ約 9.3 m の水平なアクリル管で, 管路中央部には真鍮製手動隔壁を設けた。実験は上流端を球形弁により閉ざされた Series A と, オリフィス型流量制御弁を介して上流の給水槽と接続する Series B とに区分される。

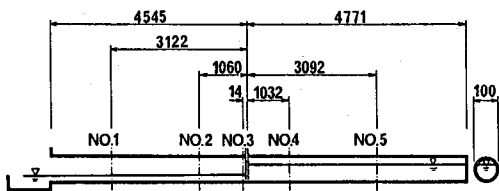


図-5 Series A 実験装置

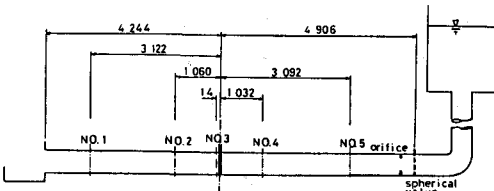


図-6 Series B 実験装置

Series B において隔壁を引き抜いた際, 管内流速が究極の定常流速の 99.6 % に達するのに要する時間 t_u は, 式(3)において $H = 1.15$ m, $l = 9.06$ m, 流量制御弁開度 $\psi = 3$ (開口率 $a/A = 0.059$) に対し $t_u = 0.423$ sec であり, 隔壁除去直後の流れは事実上一定とみなすことができる。

Series A で行った実験のうち、上流側が満管である 3 例と Series B の 7 例を表-1 に示す。そのうち下流側初期水深 y_0 が零で、満管部初期流速 u_1 が異なる No. 2A 及び No. 3B に関する解析結果を図-7 及び図-8 に、また $y_0/d = 0.473$, $u_1/\sqrt{gd} = 0.169$ である No. 7B に対応する結果を図-9 に示す。

図中の No. 1 から No. 5 に至る曲線はそれぞれ図-5 及び図-6 に示された水位計設置地点の水位記録を、また図中のプロットは centered simple wave として算定された結果である。図-7, 図-8 より front 直後に Benjamin の解で与えられる $y/d = 0.563$ の constant state が存在すること、また図-9 では、No. 4 水位計の記録より、Benjamin の解の存在と同時にその直後の $y/d = 0.715$ で示される小段状領域の存在が示されている。実測値と算定値の対応は満足すべきものと言えるであろう。

6. 結 論

dam-break wave を含めた任意断面一様管路内の gravity current に関する初期値問題に対して、Escoffier の stage variable と Benjamin の定常解に基づく上述の解析方法の適用性の実証されたと考えることができるであろう。

7. 謝 辞

本研究は一部、都下水道局の委託によるものであり、御理解と御支援を賜った関係当局、並びに都立大学工学部 川口士郎教授に深く謝意を表します。

8. 参考文献

- 1) Vasiliev etc., Numerical methods for the calculation of shock wave propagation in open channels, Proc. 11th Cong. of IAHR, Vol. 3, paper 44, 1965.
- 2) Escoffier etc., Stability aspects of flow in open channels, Proc. ASCE, HY 6, 1962.
- 3) Sakkas · Strelkoff, Dam-break flood in a prismatic dry channels, Proc. ASCE, HY 12, 1973.
- 4) Benjamin, Gravity current and related phenomena, Jour. of Fluid Mech., Vol. 31, 1968.
- 5) Stoker, Water Waves, Interscience, 1957.

表 1 実験条件並びに算定値

実験番号	$u_1/\sqrt{gd}$	y_1/d	y_1/d	$D_1/\sqrt{gd}$	$D_1/\sqrt{gd}$	y_1/d	$D_1/\sqrt{gd}$
2 A	0	0	0.5632	-0.5423	—	—	—
3 A	0	0.288	0.5632	-0.5423	0.6868	—	—
7 A	0	0.502	0.5632	-0.5423	0.8294	0.6686	-0.4082
3 B	0.1693	0	0.5632	-0.3730	—	—	—
5 B	0.1693	0.267	0.5632	-0.3730	0.8907	—	—
7 B	0.1693	0.473	0.5632	-0.3730	0.9059	0.7152	-0.2951
2 B	0.3856	0	0.5632	-0.1565	—	—	—
4 B	0.3856	0.262	0.5632	-0.1565	1.0332	0.6175	0.0378
6 B	0.3856	0.467	0.5632	-0.1565	1.0153	0.7977	-0.1768
1 B	0.8096	0	0.5632	0.2676	—	—	—

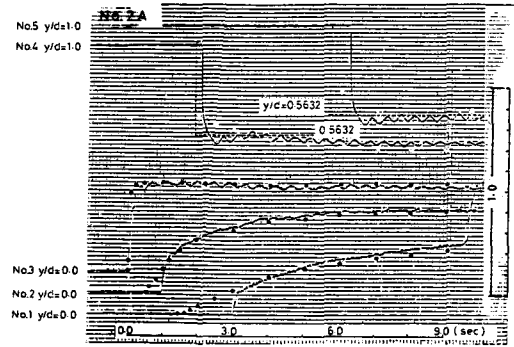


図-7 理論・実験値の比較 (No. 2A)

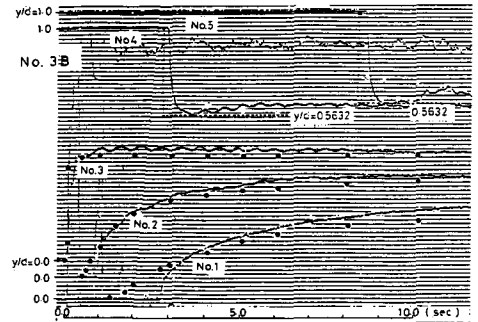


図-8 理論・実験値の比較 (No. 3B)

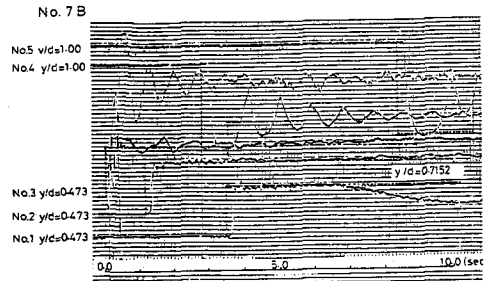


図-9 理論・実験値の比較 (No. 7B)