

回転流水槽内のエネルギーバランスについて

東洋大学工学部 正 員 荻 原 国 宏

Energy Balance in circulating flow in cylindrical Tank

By Kunihiro Ogihara

はじめに

円形水槽に回転流を作ると2次流として水槽の中心部では上昇する流れが、また外周部では下降する流れが生じてくることを以前に確認している。³

そのときは回転流を作るのを機械的にしていたが今回は水を連続的に流入させて回転流を作るときの現象について考察してみた。

特に水の流入エネルギーと発生する回転流の流速との関係について主体を置いて今回はまとめた。

また2次流の発生機構および、その実験による確認については以前にまとめてある。今回はこれについては概略のみを示しておこう。

2次流についての理論解析

これについては以前に行なったので、今回は結果と考え方のみをまとめておく。

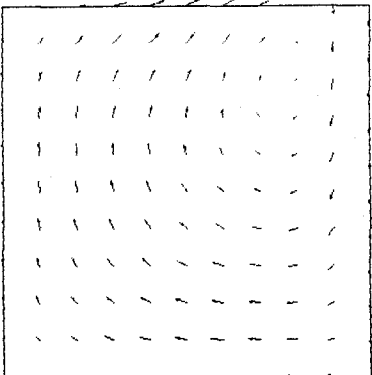
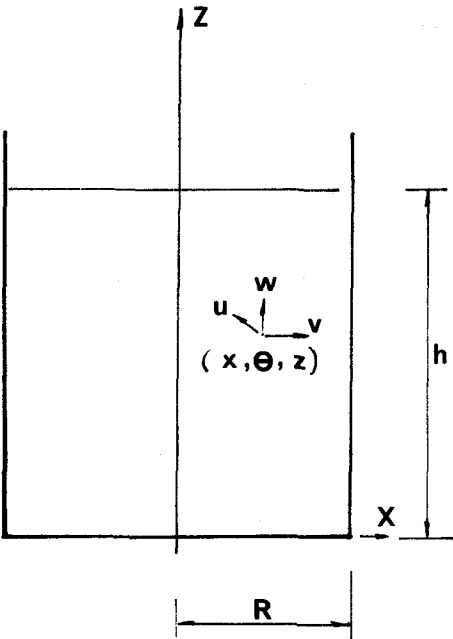
主流の流速は回転流で図-1の θ 方向の u のみで次式で与えられる。

$$u = R\omega \tag{1}$$

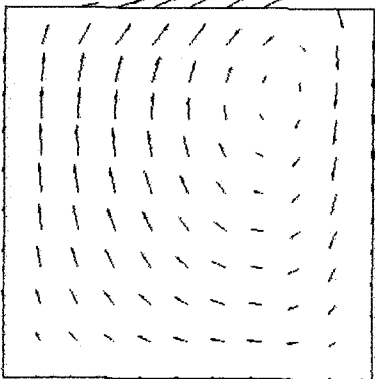
また圧力の分布は運動方程式より次のごとく導びかれる。

$$p = \frac{\rho\omega^2 r^2}{2} + \rho g(h-z) \tag{2}$$

図-1



Flow Vector h/R 0.5



Flow Vector h/R 1

図 2-1

図 2-2

水槽の底部では壁面の影響をうけて流速が水面の部分より遅くなっていると考えられる。その程度を ε で表はして

$$u_b = \varepsilon u \quad (3)$$

とする。

円筒座標系の Navier, Stokes の方程式で 2 次流の流速は主流の流速に比較して小さいと考え、速度の 2 乗項を無視する Stokes 近似をする。その式に (3) 式および圧力の (2) 式を代入し整理すると次式が得られる。

$$\frac{\omega^2 r(1-\varepsilon^2)}{\nu} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \frac{v}{r^2} \quad (4)$$

$$0 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2}$$

ここで 2 次流の流速を

$$v = v(r) + v'(r, z), \quad w = w'(r, z) \quad (5)$$

と表わして (4) 式に代入すると次の様な 3 つの運動方程式と連続の方程式が 2 次流を決定する式として導かれる。

$$\frac{\omega^2 r(1-\varepsilon^2)}{\nu} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v}{\partial r} \right) - \frac{v}{r^2}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v'}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 v'}{\partial z^2} - \frac{v'}{r^2} = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial w'}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 w'}{\partial z^2} = 0$$

(6)

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (vr) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (v'r) + \frac{\partial w'}{\partial z} = 0$$

この方程式を境界条件を満たすように解くと次式を得る。

$$v = \frac{\omega^2 (1-\varepsilon^2)}{8\nu} r(r^2 - R^2) + AJ_1(\lambda r) \sinh \lambda z \quad (7)$$

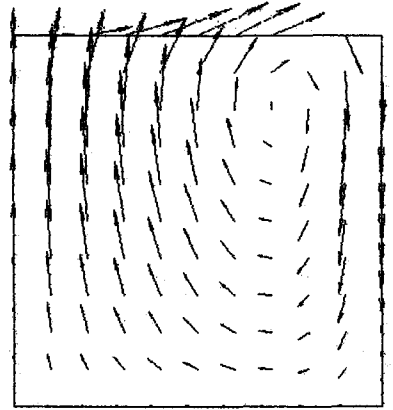
$$w = -\frac{\omega^2 (1-\varepsilon^2)}{8\nu} (4r^2 - 2R^2)z - AJ_0(\lambda r) (\cosh \lambda z - 1) \\ , A = \frac{2R^2 h}{\cosh \lambda h - 1} \frac{\omega^2 (1-\varepsilon^2)}{8\nu}$$

さらに無次元化した表現にして書きなおすと次式のようにになる。

$$\frac{v}{8R_e \beta} = -\frac{r}{R} \left(\left(\frac{r}{R} \right)^2 - 1 \right) + 2 \frac{h}{R} \frac{\sinh \lambda z}{\cosh \lambda h - 1} J_1(\lambda r)$$

$$\frac{w}{8R_e \beta} = \frac{h}{R} \left(-\frac{z}{h} \left(4 \left(\frac{r}{R} \right)^2 - 2 \right) - 2J_0(\lambda r) \frac{\cosh \lambda z - 1}{\cosh \lambda h - 1} \right) \quad (8)$$

図 2-3



Flow Vector h/R 2

ただし

$$v = \frac{v + v'}{\omega R}, w = \frac{w'}{\omega R}, R_e = \frac{\omega R \cdot R}{\nu}, \beta = 1 - \varepsilon^2, \lambda = \frac{\lambda_1}{R} \quad (9)$$

であり、 λ_1 は第ノ種ベッセル関数の零点である。(9)式の右辺の項を計算して速度ベクトル表示したのが図-2である。図2-ノから水深 h と半径 R の比を変えて示してあるが、これから水槽の半径が大きくなる程中心部の上昇流は小さくなる傾向を示し、水深が深くなる程上昇流の流速が速くなる傾向を示している。

流入する水の速度と回転流の速度との関係

回転流を連続的に作るためには、流入する水のエネルギーを利用するのが最も簡便であり有効である。図-3のような水槽を作って流入流速と回転流との関係をつかむための実験をした。

イ) 流入エネルギー

流量 Q が断面積 A_0 のところより供給されているとすれば、単位時間に供給されるエネルギーは

$$E_0 = \frac{\rho A_0}{2} v_0^3 = \rho Q \frac{v_0^2}{2} \quad (10)$$

となる。

ロ) 流出エネルギー

断面積 A_1 のところから流出するエネルギーは同様にして次のようになる。

$$E_o = \rho Q \cdot \frac{v_1^2}{2} = \frac{\rho}{2} \frac{Q^3}{A_1^2} \quad (11)$$

ハ) 回転の運動エネルギー

回転をしている水の運動エネルギーは次のごとくなる。

$$E_m = \frac{\rho R h}{8} (R \omega)^3 \quad (12)$$

ニ) 流体の内部摩擦力によるエネルギー損失

Dissipation Functionを用いて(ノ)式の流速分布のときのエネルギー損失を求めると、単位体積当り

$$\Phi = \frac{8}{3} \mu \omega^2 \quad (13)$$

であり、水槽全体では次のようになる。

$$E_d = \frac{8\pi}{3} \rho \nu (R \omega)^2 h \quad (14)$$

ホ) 水槽壁面での摩擦力によるエネルギー損失

壁面での摩擦力を τ_0 として乱流、層流の場合とも次のように表わすことにする。

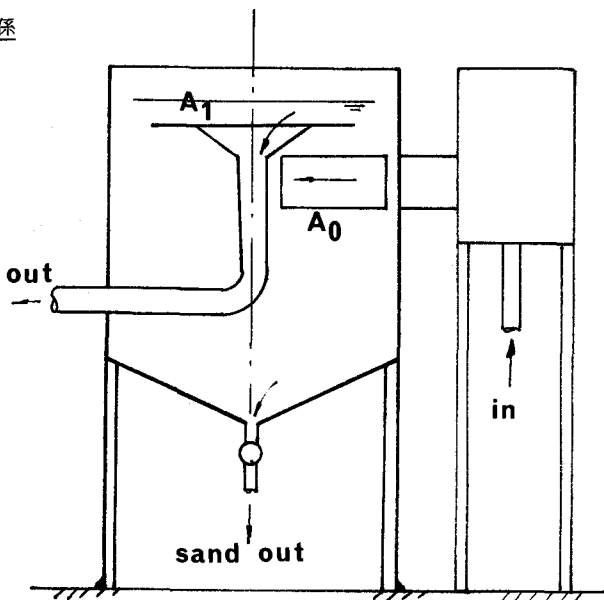


図-3

$$\tau_0 = C_f \frac{\rho u^2}{2} \quad (15)$$

係数 C_f は後述のごとく Reynolds 数によって決まるものとする。水槽の壁面および底面でのエネルギー損失は次のようになる。

$$E_f = \rho \pi R h \cdot C_f (R\omega)^3 \quad (16)$$

$$E_f' = \frac{\rho \pi C_f}{5} \cdot (R\omega)^3 \cdot R^2 \quad (17)$$

これらのエネルギーの関係は $E_0 = E_o + E_m + E_d + E_f + E_f'$ であり、各式を代入して整理すると次のようになる。

$$\left(\frac{V_0}{R\omega}\right)^3 = \frac{Rh}{A_0} \frac{2\pi}{(1 - (\frac{A_0}{A_1})^3)} \left(\frac{1}{8\pi} + \frac{16\pi}{3} \frac{1}{R_e} + C_f + \frac{C_f}{5} \frac{R}{h}\right) \quad (18)$$

$$R_e = \frac{2\pi R \cdot R\omega}{v} \quad (19)$$

係数 C_f については層流の場合には

$$C_f = \frac{1.328}{R_e^{0.5}} \quad (19')$$

で乱流の場合には次のようになる。

$$C_f = 0.074 \cdot R_e^{-0.2}, \quad 5 \cdot 10^5 < R_e < 10^7 \quad (20)$$

結局 (18) 式の右辺の () の部分を C と書き、これは R_e 数と R/h で決定されるものと考え、流入流速と回転流速の関係は次の式で求められる。

$$C = F(R_e, \frac{R}{h}) = \left(\frac{V_0}{R\omega}\right)^3 \cdot \frac{A_0}{2\pi R h} \cdot (1 - (\frac{A_0}{A_1})^3) \quad (21)$$

実験結果との比較

実験は $d=43\text{ cm}$, $h=50\text{ cm}$ の小形水槽 (case 1) と $d=200\text{ cm}$, $h=200\text{ cm}$ での大形水槽での実験 (Case 2)、および同水槽で流入口の断面積を $1/2$ に絞った場合 (case 3) の3つの場合について行なっている。小形水槽の結果の一部は年購に発表してある。

今回はその内の流速に関連したものだけをまとめることにし、沈砂に関連したものは別の機会にしたいと考えている。

i) 流入流速と回転流速の関係

流入部での平均流入流速を流量と流入部断面積より求め、また回転流の周辺部流速は速度計によって求めてグラフにしたのが図-4である。ケース1については水槽周辺部での回転流の流速を水面より20 cm間隔で鉛直方向に10点測定した値の最大と最小の間を線で結んでプロットしてある。

ケースの2, 3については同じく水槽周辺部の流速を水面より10 cm間隔に測定した4点の値の平均をとってプロットしてある。

このグラフから流入流速と回転流の流速の間には比例関係があることが判り、しかしケースごとには異なった比例定数をもっていることが判る。

同じデーターを使用して Reynolds 数との関係でプロットしたのが図-5である。

この図でも判るごとく比例関係にあることは当然である。この図での Reynolds 数は次式のように定めている。

$$\begin{aligned} Re_w &= \frac{2\pi R \cdot R\omega}{\nu} \\ Re_0 &= \frac{2\pi R V_0}{\nu} \end{aligned} \quad (22)$$

各ケースごとには流入流速と回転流の流速との間には比例関係があることは判明したが、全体を通して統一できてはいない。

そのためには式(22)に含まれている流入、流出部の断面積、および水槽の次元によるパラメーターによって整理をしなければならない。

そのために各ケースのそれらの値を表-1に示しておく。

またそれらの値を使って(22)式に含まれている2つのパラメーター

$$\begin{aligned} \left(\frac{A_0}{2\pi R h}\right)^{\frac{1}{3}} &= p_1 \\ \left(1 - \left(\frac{A_0}{A_1}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{3}} &= p_2 \end{aligned} \quad (22)$$

を求めたのが表-2である。

この2つのパラメーターを流入流速に乗じて回転流の流速との関係をプロットしたのが図-6である。

これを見ると判るごとく、図-4で各ケース毎に異なった直線にのっていたデーターが同一の直線にのっていることが判る。

この図で回転流の流速が大きいところほどデーターの散らばりが少なくなっていることが判る、これは流速が速い程水槽内で一様な回転流が形成されているためと考えられる。

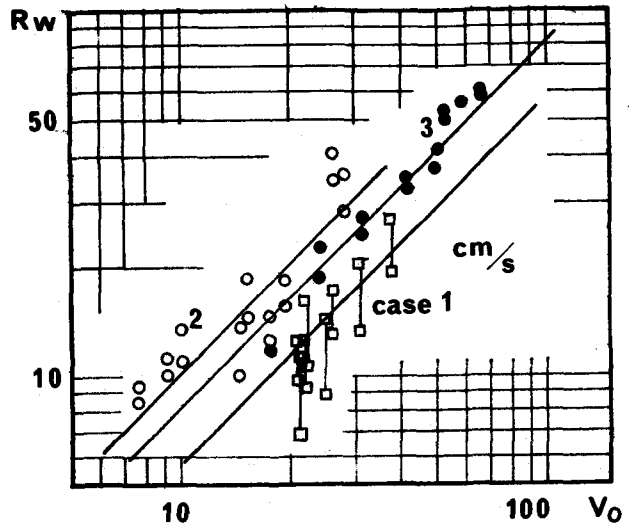


図-4

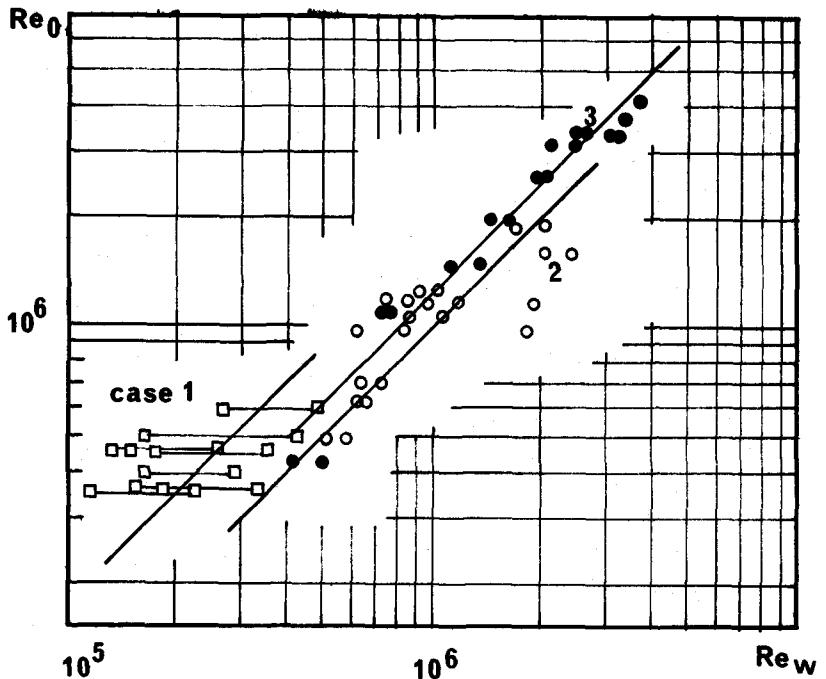


図-5

次に(2/)式で定まる係数Cについて考えてみる。この値は先に述べたごとくReynold数と水槽の水深と半径の比によって決まるはずである。

全データについてこのCの値を求めて検討する手法をとるべきであるが、ほとんどのデータが直線にのっているので、この直線式より係数Cの値を決定することにした。

図-4の各ケースの直線よりCの値を求めたところ

case /	0.0/94
2	0.0/81
3	0.0/94

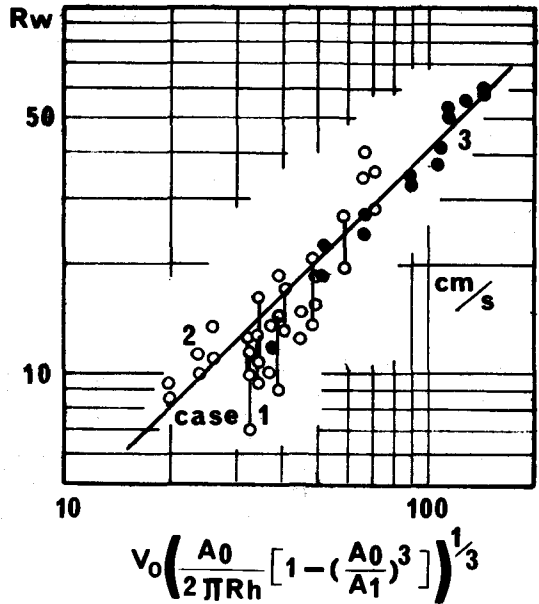
のごとくなった。

図-5でのデータの散らばりを考えると、この値は0.0/5~0.020の範囲にあると考えても良い。

おわりに

今回の研究で流入流速より回転流の流速を推定する式を決定できた。またこれによって水槽内の2次流の強さも決定できる。

しかし係数Cの値の詳細な検討および2次流の流速については今後に残された事項であり、土砂の分離作用と合わせて研究を続行中である。



	p1	p2
case 1	0.1548	0.9993
case 2	0.2725	0.9651
case 3	0.2159	0.9956

表-2

	A0	R	h	A1=2πRh
case 1	20	21.5	40	169.6
2	1900	100	150	4084.1
3	950	100	150	4084.1
	cm ²	cm	cm	cm ²

表-1

参考文献

- 1) Streeter, "Handbook of Fluid Dynamics", McGRAWHILL
- 2) 水理公式集, 流水中におかれた物体の抵抗, p 39~43
- 3) 萩原国広, 上出勝幸, 回転流に伴う2次流について, 第26回水理講演会論文集, p 647 / 982
- 4) 萩原国広, 回転流を利用した固液分離槽, 土木学会年次学術講演会, / 983