

開水路彎曲部において二次流が発達するのに要する水路長 Development of the Secondary Flow in a Curved Open Channel

立命館大学 理工学部 正会員 小沢功一

1 はじめに

開水路の流れにおいて、それが直線部から曲線部へ流下して行くと二次流が発生し、発達してくる。この二次流のうちの横断方向成分は河床砂のその方向への移動に関して重要な要素であるとされている。¹⁾

河道における彎曲部は二次流によって外岸側の河床砂が内岸側へ運ばれ、外岸側に局所洗掘の傾向が現われるような事もある。したがって護岸とか床止めを施す必要が生ずる場合も出てくる。その際、それらの工事・工作物をどの程度の規模でどのような場所に設置したら良いのかという事は二次流の発生・発達の段階と関連してくるものと思われる。

横断方向の二次流成分についてはこれまで水深に比較して曲率半径や水路幅が相当大きい水路の中央部における鉛直分布について、横断方向の運動方程式を積分して求めたり、²⁾ 二次流に関する流れ関数を用いて同様な鉛直分布を計算したりされている。³⁾ あるいは渦度保存則を利用して検討されたりもしている。⁴⁾

二次流の鉛直分布のうちで河床砂の移動に強く影響するのは河床面近くの流速の大きさである。この値についてはそれぞれの誘導された関係式によって異なっており、中には計算値が発散して決らない場合もある。したがって実験値と比較した時、必ずしも計算値と一致しない事もある。

これらの鉛直分布については二次流の完全発達域について検討されたものであるが、鉛直分布自身が前述のように不明確な面もある。

よって二次流が完全に発達する迄の長さを求めようとするときも一義的に決まるようなものでもない。実際、二次流の発達域から完全発達域への移行も漸次に行われるものであるから一線を引いて区別するのは困難である。

したがって二次流が完全に発達する迄の水路長の概略値を求めるのにつぎのような手法によった。すなわち運動方程式を単純化して積分し、得られた完全発達域までの計算式によって求めたその長さを実験値を参考にして検討した。

実験値としては計算によって得られたその長さの前後2、3点において、二次流の鉛直分布を調べた。それを二次流の完全発達域における鉛直分布と比較した。二次流が完全に発達する迄の水路長以降での鉛直分布は計算値と実験値とがよく一致する筈である事を利用して実験的にその長さの妥当性を確かめた。

2 基礎式について

2.1 概要

開水路彎曲部における流れを表わす運動方程式は図-1のような円筒座標を用いる。また流れは定常であり、曲率半径や水路幅は水深に比較して相当大きいと仮定する。粘性項については、流体の分子粘性は流れの乱れによる粘性に比べて無視できるとする。このような場合の横断方向の運動方程式はつぎのように表わされる。²⁾

$$U_{\theta} \frac{\partial U_r}{r \partial \theta} - \frac{U_{\theta}^2}{r} = -g I_r + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\epsilon \frac{\partial U_r}{\partial Z} \right) \dots\dots\dots (1)$$

ここに、 U_{θ} 、 U_r はそれぞれ流下方向、横断方向の速度成分、 I_r は水面の横断方向へのこう配、 ϵ は渦動粘性

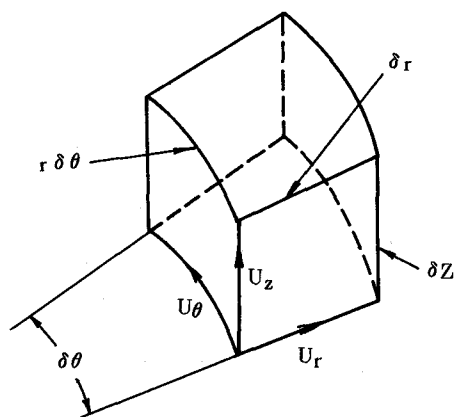


図-1 円筒座標

係数、 g は重力加速度を表わしている。 ϵ については流下・横断方向に対して等方性であるとし、 U_θ の鉛直分布については対数則を用い、せん断応力の鉛直分布は座標 Z の一次式で表わされるとすると

$$\epsilon = \kappa u_* Z \left(1 - \frac{Z}{h}\right) \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここに、 κ は Karman 定数、 u_* は摩擦速度、 h は水深を示している。

また連続方程式については、二次流の完全発達域において流れは流下方向へ一様であると仮定すると

$$\frac{\partial U_r}{\partial r} + \frac{U_r}{r} + \frac{\partial U_z}{\partial Z} = 0 \dots\dots\dots (3)$$

と表わされる。

2.2 二次流

二次流が完全に発達し、流下方向へは一様になった地点における横断方向の運動方程式は式(1)から

$$-\frac{U_\theta^2}{r} = -g I_r + \frac{\partial}{\partial Z} \left(\epsilon \frac{\partial U_r}{\partial Z} \right) \dots\dots\dots (1)'$$

となる。

主流の鉛直分布としては対数則を用い、渦動粘性係数としては式(2)を使って式(1)を積分すると水面の横断こう配が得られる。これを代入してもう一度積分すると二次流の鉛直分布が求められる。積分定数については、内岸側へ向かう二次流と外岸側へ向かうものとで鉛直方向にバランスするということから決められる。¹⁾

その結果境界が滑面である場合はつぎのようになる。

$$U_r = \frac{U_m}{\kappa^2} \frac{h}{r} \left[F_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F_2(\eta) \right] \dots\dots\dots (4)$$

ここに、 U_m は主流の鉛直方向についての平均流速、 $C/\sqrt{g}$ は無次元 Chezy 係数、 η は無次元鉛直座標 ($\eta = Z/h$) である。

また壁面が粗である場合は $F_2(\eta)$ の代りに $F_4(\eta) = F_2(\eta) + 0.8(1 \ln \eta + 1)$ と置き換えることによって得られる。

二次流の鉛直分布を表わすその他の式としては、二次流の流れ関数から求められたものとか、渦度保存則を基にして導かれた式がある。これらを纏めて示すと図-2 のようである。比較のためにパラメーターを変えて二つの場合について示してある。図中の $\eta - 2 \eta \ln \eta + \ln \eta$ は渦度保存則からのものであり、 $\kappa \{ F_A - (\sqrt{g}/\kappa C) F_B \}$ は二次流の流れ関数からのものである。

2.3 二次流が衰退するのに要する長さ

開水路彎曲部のモデルとして図-3 に示すような単一の180度彎曲部の前後に直線部が接続している水路を用いる。彎曲部への入口から角 θ までに二次流が完全に発達し、彎曲部の出口から直線部で徐々に二次流が衰退するものとする。このときの座標としては彎曲部の出口を原点とし、流下方向へ χ 軸をとる。

彎曲部を越えた直線部においては、主流の方向変換に伴う加速

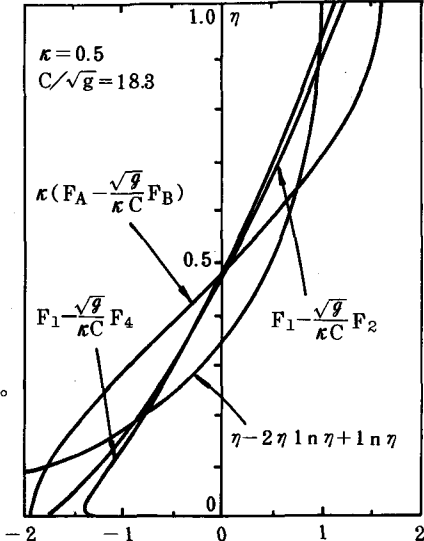


図-2-1 二次流の鉛直分布

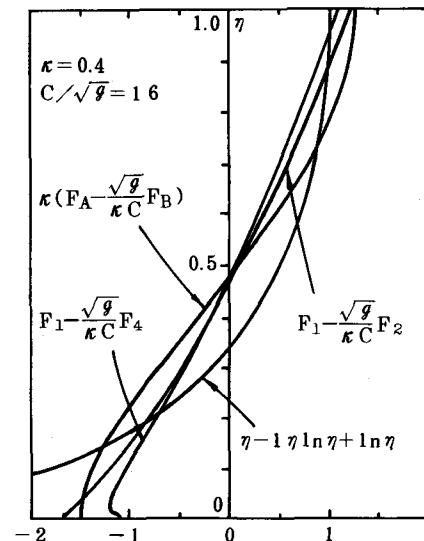


図-2-2 二次流の鉛直分布

度項や水面の横断こう配は無くなって来る。したがって横断方向の運動方程式(1)において U_θ の換りに U_χ 、 $r\partial\theta$ の換りに ∂x と置き換えると

$$U_\chi \frac{\partial U_r}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial Z} \left(\epsilon \frac{\partial U_r}{\partial Z} \right) \dots\dots\dots (5)$$

となる。

式(5)を計算する際、二次流の衰退域でのその鉛直分布は完全発達域での鉛直分布と相似である(図-4)と仮定する。すなわち $U_r/U_{rs}=U_{r0}/U_{r0s}$ であるとする。ここに、添字sは水表面における値を示している。

また主流 U_χ の鉛直分布としては対数則を使い、渦動粘性係数 ϵ としては式(2)を用いることにする。

このように仮定し、さらに簡単のために

$$f(\eta) = \frac{(\sqrt{g}/2\kappa C) \ln^2 \eta + (1 + \sqrt{g}/\kappa C) \ln \eta + 1}{[1 + (\sqrt{g}/\kappa C)(\ln \eta + 1)](F_1(\eta) - (\sqrt{g}/\kappa C)F_2(\eta))}$$

は図-5から明かなように1の近くで変化する η の関数であるがほぼ1に近い定数であるとするとき式(5)は積分できる。境界条件は $\chi = 0$ において $U_r = U_{r0}$ として決めると

$$\ln \frac{U_r}{U_{r0}} = - \frac{2\kappa\sqrt{g}}{hmC} \chi \dots\dots\dots (6)$$

となる。ここに、 $\ln$ は自然対数、 hm は平均水深を表わしている。

二次流 U_r の大きさが最初の値 U_{r0} の1割まで衰退するのに要する水路の長さを求めると式(6)から

$$\chi = 2.3 \frac{hmC}{2\kappa\sqrt{g}} \dots\dots\dots (7)$$

となる。

2.4 二次流が発達するのに要する長さ

二次流の発達域、完全発達域におけるそれぞれの横断方向の運動方程式(1)、(1)'に関して、主流の方向変換に伴う加速度項や水面の横断こう配は二つの領域で等しいとする。また完全発達域においては二次流は流下方向へ一様であるとする。これらの事を考慮して二つの領域での式を連立させて、発達域における基礎式を導くと

$$U_\theta \frac{\partial (U_{r0} - U_r)}{r \partial \theta} = \frac{\partial}{\partial Z} \left\{ \epsilon \frac{\partial (U_{r0} - U_r)}{\partial Z} \right\} \dots\dots\dots (8)$$

となる。

この式(8)を二次流が衰退する領域での式(5)と比較すると、式(8)における U_θ 、 $(U_{r0} - U_r)$ が式(5)におけるそれぞれ U_χ 、 U_r に相当している。主流速度 U_θ の鉛直分布としては U_χ と同様、対数則を用いることにすると式(8)は式(5)と同型の微分方程式となる。したがって式(8)を解く場合、式(5)の解である式(6)を利用することができる。この場合の境界条件としては、彎曲部への入口において二次流 U_r は $U_r = 0$ であるから、彎曲角が0のとき $U_{r0} - U_r = U_{r0}$ とおくことになる。よって式(8)の解は式(6)の χ の換りに $r\theta$ と置き換えて

$$\ln \frac{U_{r0} - U_r}{U_{r0}} = - \frac{2\kappa\sqrt{g}}{hmC} r \theta \dots\dots\dots (9)$$

と表わされる。

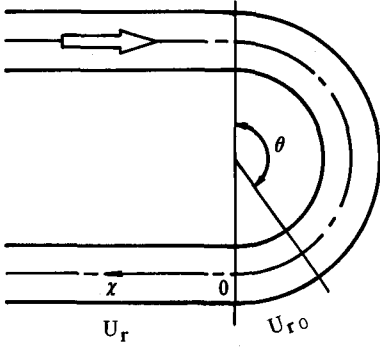


図-3 定義図

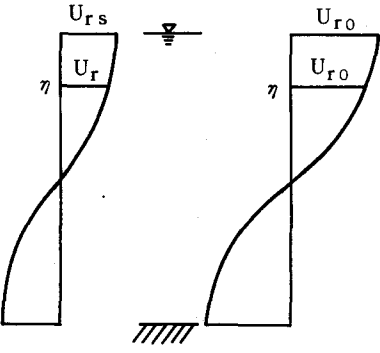


図-4 二次流の変化

完全発達域における二次流の大きさ U_{r0} の 9 割程の値にまで発達するのに要する水路の長さは式(9)から

$$r\theta = 2.3 \frac{hmC}{2\kappa\sqrt{g}} \dots\dots\dots (10)$$

となる。

3 実験的検討

3.1 概要

二次流が完全に発達する迄の水路長の概略値は前節におけるように求められる。しかしこれは種々の仮定をした上での近似値であるからその妥当性は実験的に確かめられなくてはならない。理論的に得られたその長さの前後数点において、二次流が鉛直方向にどのように分布しているのかを調べた。そして二次流の完全発達域での理論的な鉛直分布と実験値とを比較する。二次流が完全に発達する迄の水路長より下流の地点では計算値と実験値とが一致する筈であることから、その長さの妥当性を確かめようとした。

実験水路としては幅が 50 cm、水路中央での曲率半径が 1 m の 180 度彎曲部の前後にそれぞれ 5 m、2.5 m の直線部が接続しているものを用いた。側壁、底面ともに鋼製で砂などを使わない固定床水路の状態で行った。

流下実験において用いた流量等の条件については表-1 に示すようである。

二次流がほぼ完全に発達する迄の、彎曲部への入口からの水路中央での長さは式(10)から計算されるが、この場合の無次元 Chezy 係数 $C/\sqrt{g}$ についてはつぎのように求められる。すなわち水路は滑面であるとする

$$\frac{U}{u_*} = \frac{C}{\sqrt{g}} = 3.0 + 5.75 \log \frac{u_* h_m}{\nu}$$

と表わされるから $\nu = 0.0103 (19^\circ \text{C})$ 等を代入して $C/\sqrt{g} = 18.8$ が得られる。

また Karman 定数 κ については、直線水路の清水の場合通常 $\kappa = 0.4$ が用いられるが、彎曲水路の場合二次流が発達して乱れの構造が直線水路のときとは異なるようで κ の値はそれより大きな値の方が適しているようである。主流の鉛直分布を示す対数則を実験値と比較して κ の値を推定すると $\kappa = 0.4$ から 0.7 程度にまでなるようである。^{2), 5)} この平均的な値として $\kappa = 0.5$ を用いることにする。

3.2 二次流の鉛直分布

横断方向への二次流の鉛直分布は、水深の約 1/2 より底面側では外岸から内岸方向へ向かっており、水面側では逆に内岸側から外岸側への向きであり、底面から水面まででほぼお互いにバランスしている。

この二次流の測定についてはピトー管を用いた。水路の中央においてピトー管を最大流速の方向へ向け、その大きさと方向とを測定し、二次流の値としては方向角の正弦を乗じて求めた。⁶⁾

測定位置については高さ方向に底面に近い点から水深約 4.3 cm の水面近くまで 5 mm 間隔に 7、8 点で測定した。流下方向の位置については図-3 の水路において彎曲角が $\pi/6$ 、 $\pi/3$ 、 $2\pi/3$ の点で測った。

測定値を主流速度の鉛直方向についての平均値等で割って無次元の形にして示すと図-6 のようである。ここに $\times$ 、 $\triangle$ そして $\circ$ で表わしたプロットがそれぞれ $\pi/6$ 、 $\pi/3$ 、 $2\pi/3$ の位置での値である。

完全発達域における二次流の鉛直分布の計算式としては前節に示したように、運動方程式を鉛直方向に積

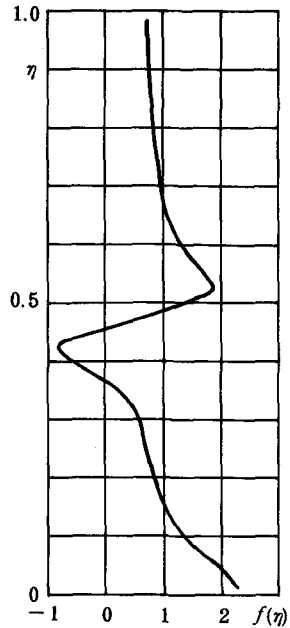


図-5 $f(\eta)$ の変化

分して得られるもの、二次流の流れ関数から求められた式、渦度保存則を基にして導かれたものなどがある。これらを示した図-2から明らかなように渦度保存則から求められた式による分布においては底面近くで二次流の絶対値がかなり大きくなり実験値と合わなくなる。その点を除いてはどのような考え方から得られた式もほぼ同じような鉛直分布の傾向を示すと言える。

実験値と比較するのに Rozovski²⁾により求められた計算式(4)を用いると図-6のようになる。彎曲角が $\theta = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3$ の位置における実験値と計算値とを比較してみると、彎曲角が大きくなるにつれてそれらは徐々に近づいてくように見ることができる。すなわち彎曲角とともに二次流が次第に発達してくる状況が表われていると思われる。 $\theta = 2\pi/3$ における実験値は計算式(4)による実線とよく一致していると見られる。

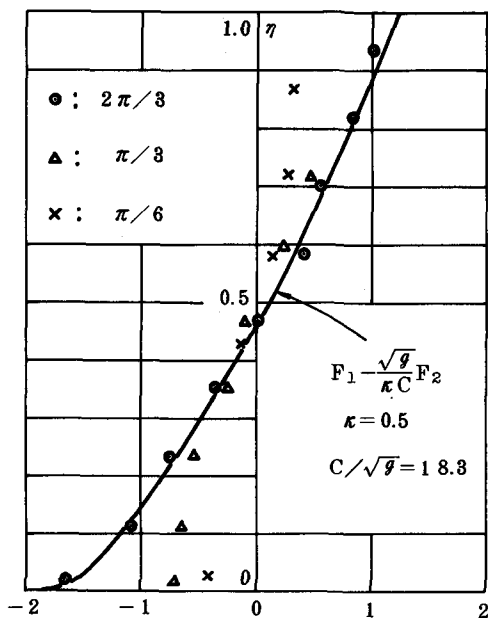


図-6 二次流の実測値と計算値

3.3 二次流が発達するのに要する長さ

彎曲部の平面形状としてはここで検討している180度

他に、90度の場合とか任意の角度、あるいは逆方向に彎曲している複合彎曲部の場合もある。これらそれぞれにおいて流れの状況が異なるものと考えられ、二次流の発達・衰退についても各々の特徴がある筈である。

180度彎曲部の場合についても、二次流の完全発達域で河床砂の移動に関係がある底面附近のその大きさや鉛直分布等を正確に予測することは必ずしも出来ていない。

したがって二次流が完全に発達するのに要する水路長を求めようとする場合においてもあくまでも概略値を推定しようとしているに過ぎない。

実際、式(9)を基にしてその長さを求める場合、左辺は対数であるから二次流の大きさ U_r が完全発達域での大きさ U_{r0} に等しいと置くことができない。したがって最終の値の9割程にまで発達した時点ではほぼ二次流は完全に発達したとして取扱っている。

このように仮定して得られた式(10)から明らかなように、水深が浅い程二次流が完全に発達する迄に要する水路長は短いことになる。また $C/\sqrt{g} = R^{1/6}/n\sqrt{g}$ であることから、河床粗度が大きい程二次流は短距離のうちに発達してしまうということができる。

実験に用いた条件等、水深は約4.3cm、無次元Chezy係数は1.8.8、Karman定数は0.5を式(10)に代入して計算すると二次流が完全に発達する迄の水路長は約1.71mとなる。水路幅の中央における彎曲部への入口からの角度では約1.79rad.(0.572 π)である。

二次流の鉛直分布を測定した位置は彎曲角で $\theta = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3$ の点であるが、計算結果と比較してみると前の2点は二次流が発達段階にある地点であり、最後の点は二次流の完全発達域内の場所であると言える。図-6に示されているように完全発達域における二次流の鉛直分布の計算値は $\theta = 2\pi/3$ での実験値とよく一致している。このことから二次流が完全に発達するのに要する水路長の計算値1.79rad.は妥当な値であると考えられる。

4 おわりに

開水路彎曲部における水流には遠心力が作用する。この力の働き方は主流速度の鉛直分布によってその方向に相違が生ずる。このことから流れに螺旋流の要素が出てくる。すなわち二次流が発生することになる。この二次流によって運動量の輸送が行なわれ、主流速度

の鉛直分布において表面近くの速い流速は遅くなり、逆に底面近くの遅い流速は速くなるように変化してくる。それに伴って二次流は発達してくる。しかしやがてはそれらの間に平衡関係が生じて、それ以上は二次流も発達しなくなり、流下方向への変化はなくなる。すなわちこの地点で二次流は完全に発達したことになる。

彎曲部への入口からこの地点までの水路長に関してその概略値は次のように求められる。すなわち、まず最初に彎曲部の出口から直線部を流下する時の二次流の衰退についての基礎式は式(5)のようになる。この式の近似解は式(6)のようである。つぎに彎曲部への入口から二次流が完全に発達する迄の水路長を求める場合の基礎式は式(8)のようになる。これは先の式(5)と同型であるから、その時の解を利用してこの場合は式(9)となる。

180度彎曲部の前後に直線部が接続している水路において $Q = 4.51 \ell / S$ の流量を流下させるとき、二次流が完全に発達する迄の彎曲部入口からの水路長を式(9)を基にして計算すると角度で $\theta = 0.572\pi$ となった。この角度の前後に渡る $\theta = \pi/6, \pi/3, 2\pi/3$ の点において二次流の鉛直分布を測定して、その完全発達域での計算値と比較すると $\theta = 2\pi/3$ でよく一致した。このことから計算から得られた、 $\theta = 0.572\pi$ は妥当な値であると考えられる。

今後に残された課題としては二次流の測定について実験値を充実させることである。すなわち彎曲角の細かい間隔で二次流を測定して、発達・完全発達の状況を把握する必要がある。また計算式を導く際、たとえば式(6)から式(7)を得るときの仮定 $f(\eta) \approx 1$ が必ずしも適当ではないことも問題点である。

最後に、実験は立命館大学理工学部土木工学科における彎曲水路を用いて行なった。その際尽力いただいた水理卒研生に謝意を表します。

参考文献

- 1) Engelund, E.: Flow and Bed Topography in Channel Bends, Proc. ASCE, Vol. 100, 1974.
- 2) Rozovskii, I. L.: Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Sciences of Ukrainian SSR, Kiev, 1957.
- 3) 池田駿介: 移動床河川の彎曲部における二次流と動的横断平衡河床について, 土木学会論文報告書, 第229号, 1974.
- 4) 村本嘉雄: 開水路彎曲流の内部機構(Ⅰ), 京都大学防災研究所年報, 第9号, 1966.
- 5) 小沢功一: 彎曲水路における主流速度の鉛直分布について, 第27回水理講演会論文集, 1983.
- 6) Shukry, A.: Flow around Bends in an Open Flume, Trans. ASCE, Vol. 115, 1950.

表-1 実験条件

流量	平均水深	平均流速	フルード数	レーノルズ数	流速係数	摩擦速度
Q	h_m	U_m	F_r	Re	ϕ	U_*
(ℓ/S)	(cm)	(cm/S)		($\times 10^3$)	(U_m/U_*)	(cm/S)
4.51	4.27	21.1	0.826	9.02	18.3	1.15