

横断勾配を有する一様曲率弯曲部の流れの構造

A Study on the Secondary Flow in Open Channel Bend with Transverse Sloping Bed

北海道大学 正員 森 明 巨
北海道大学 正員 岸 力

1. はじめに

著者ら⁽¹⁾は、河道弯曲部における二次流が、非線形項の作用によりその強度が弱められることを予測し、前回の報告⁽²⁾では、矩形断面流について $k-\epsilon$ モデルを用いた数値実験によりこのことを確かめた。しかし、非線形項の効果は、河床が横断勾配を有する場合により顕著に表われることが理論的に予想されているので、今回は、この場合について調べた。前回と同様に、解 A, B, C を求め、相互の比較から非線形項の効果（以下、単に非線形効果と呼ぶ）を調べた。解 A は、 $V=0, W=0$ において、 U, ν_t を求め、次にこれを固定して求められる V, W, P の解である。 U, V, W は円柱座標系 (θ, r, z) の速度成分、 P, ν_t は、圧力及び渦動粘性係数である。解 B は、 ν_t を解 A に固定して求められる解である。解 C は、総ての従属変数を連立して解いたものである。

2. 計算方法

基礎方程式 流れを解く基礎方程式は、運動方程式 3 成分、 k (乱流エネルギー)、 ϵ (逸散率) の輸送方程式、 k, ϵ, ν_t の関係式については前回と同じであるので省略する。流れの連続条件については、前回は(1)式を用いたが、今回は(2)式を用いた。

$$-\frac{1}{\rho} \left(\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial z^2} \right) = \left[\frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U^2 + V^2}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{VW}{r} \right) \quad (1)$$
$$\frac{1}{r} \frac{\partial r V}{\partial r} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (2)$$

(1)式を用いた計算法では、内部計算点では良好な結果が得られるが、境界点での計算法がむずかしく、精度良い結果を得るためには多くの計算の繰り返しが必要だった。今回は、(2)式を用いた Hopscotch Box 法を新たに開発し、計算法の改良を計った。この方法については別の機会に詳しく述べる積りである。

河床の境界条件 河床付近の計算点を図-1 の様に配置し、図中の⊙地点の U 及び⊙、+地点の V, W を以下の様にと与えた。

河床面に沿って y 軸、これに直角上方に z' 軸を取り、河床横断勾配 α が小さいものとして、河床における、 U 及び y 方向速度 $\tilde{V}$ の運動方程式を(3)、(4)式で与える。

$$\tilde{V} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{U \tilde{V} \cos \alpha}{r} = -\frac{\partial P}{\rho r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z'} \right) \quad (3)$$
$$\tilde{V} \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} - \frac{U^2}{r} \cos \alpha = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\nu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z'} \left(\nu_t \frac{\partial \tilde{V}}{\partial z'} \right) \quad (4)$$

(2)、(4)式を図-1 中の⊙地点について差分化して $U, \tilde{V}$ を求める。+地点の流速は⊙地点流速を内挿する。

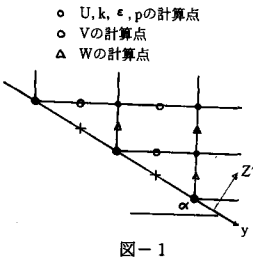


図-1

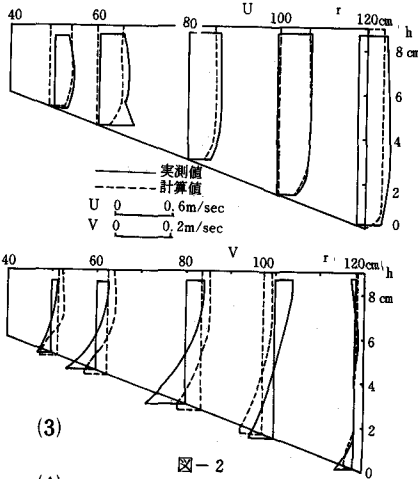


図-2

3. 計算値と実測値の比較

Rozovskii⁽³⁾は、180°弯曲水路に一定横断勾配を持たせて実験を行っている。水理条件は、流量 $Q = 11.4 \text{ l/sec}$ 、水路巾 $B = 80 \text{ cm}$ 、水路中心曲率半径 $R_c = 80 \text{ cm}$ である。このときの U 、 V の実測値と計算値との比較を図-2に示した。実測値は、弯曲流が発達したと思われる弯曲角 $\approx 140^\circ$ の地点のものを選んだ。(注：流速の測定点と計算点の r 座標が異なるため両者の縦軸の位置は一致していない。) 図からわかる通り計算値は実測値の傾向を良く表わしているので、本計算結果を用いて弯曲流の構造を調べる。ただし、上述の実験は滑面水路であるが、著者らの興味は粗面の場合にあるので、改めて粗面流の計算を行い、これについて調べる。

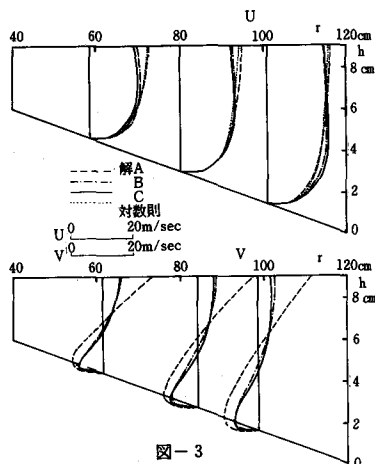


図-3

4. 非線形項の効果

U 、 V の深さ方向の分布、図-3 図-3 中には比較のため対数速分布 (カルマン常数 $= 0.4$) を示した。解 A はこれにほぼ一致している。これに対し、非線形項を含んだ解 B、C では、最大流速点が河床付近に発生し、分布形が平坦化され非線形効果が明確に表われている。

U の分布形に対応して V の分布形も解 B、C は解 A に比べて平坦化され、二次流の強度が弱められているのがわかる。図-4 a, b, c に $\overline{U}/\overline{U}^2$ 、 $\overline{V}^2$ 、 $\overline{UV}$ (一は深さ方向の平均を意味する) の分布形を示した。図-3 から予想される様に、 V の分布形の平坦化の割合が U のものより大きくなっているのがわかる。

$\overline{U}$ の分布形、図-5 図は、水路中央部における $\partial \overline{U} / \partial r$ がいずれの解でも正ではあるが、解 B、C の方が解 A より大であることを示している。これは、前者には、二次流による r 方向への運動量の輸送があるためである。この効果は外岸付近の分布形に強い影響を与え、最大流速点を外岸の極く近くに発生させる。

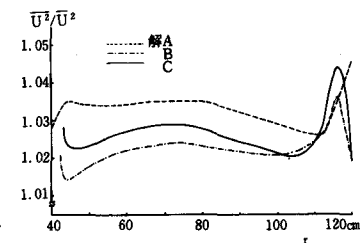


図-4 a

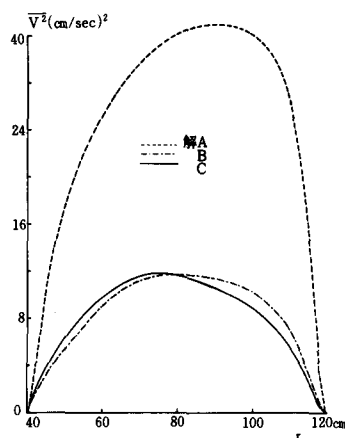


図-4 b

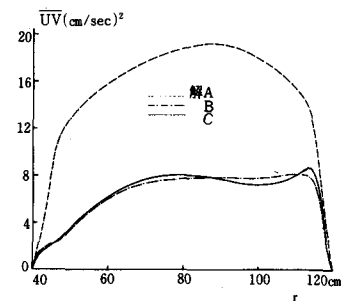


図-4 c

5. 流量と非線形効果

石狩川の河口から 5 km 前後の弯曲部で、S 54.5 融雪出水 ($Q = 2,000 \text{ m}^3/\text{sec}$) 及び、S 56.8 出水 (peak 流量 $= 11,300 \text{ m}^3/\text{sec}$) 時に浮子による流跡測定が行なわれた。その結果によれば S 54.5、出水では弯曲流の特徴が明瞭に見られたが、S 56.8 出水では不明であった。著者らはこの現象を、非線形効果が S 54.5 出水では小さく、S 56.8 出水では、大きかったためと考えた。

これを確かめるために、出水時の横断面形を図-6に示す様にモデル化して計算を行った。モデル断面での想定流量を、S 56.8 出水では $8,000 \text{ m}^3/\text{sec}$ 、S 54.5 出水では $1500 \text{ m}^3/\text{sec}$ とした。

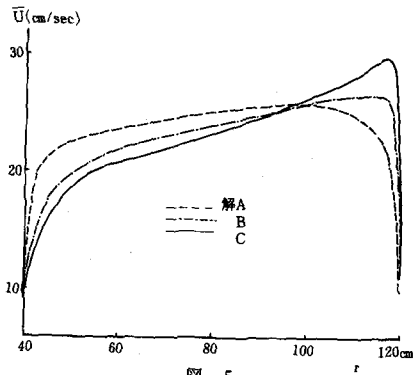


图-5

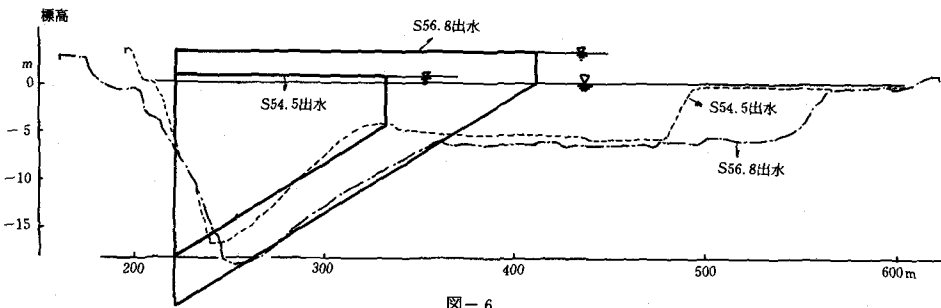


图-6

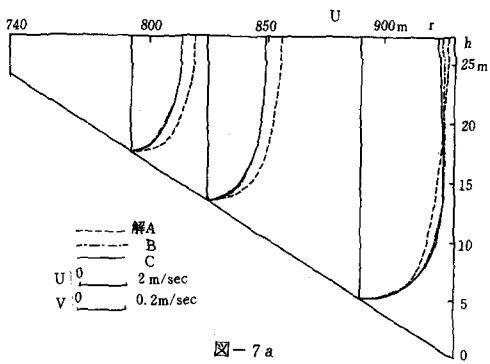


图-7 a

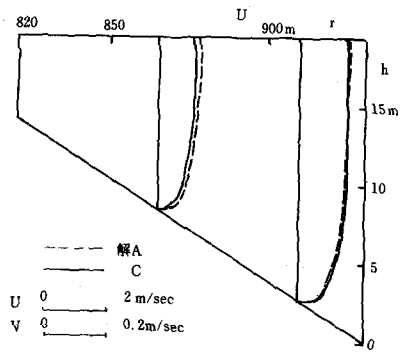


图-8 a

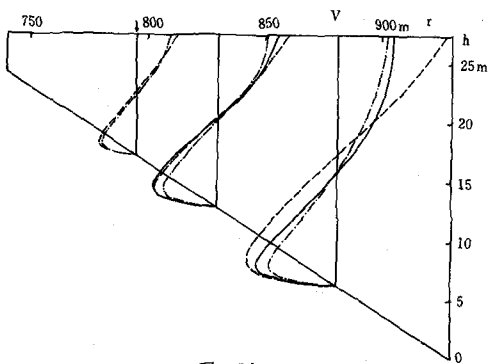


图-7 b

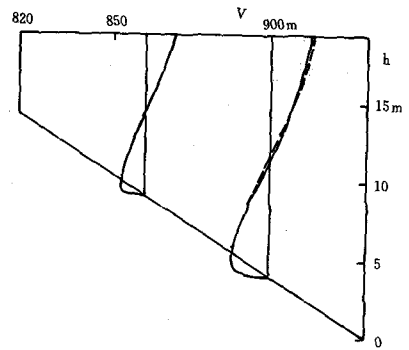


图-8 b

図-7、8に両出水に対する U 、 V の計算結果を示した。図からわかる様にS56.8出水では、非線形効果が強いが、S54.5出水では小さく、著者らの推定が妥当であったことを示している。

図-9 a, bに両出水の $\overline{UV}$ の分布形を示した。図からわかる様に非線形効果の大きいS56.8出水では、解Cは解Aに比べ半分程度になっている。これに対してS56.4出水では解Cと解Aが同程度の大きさである。

図-10 a, bに、両出水の $\overline{U}$ の分布形を示した。図からわかる様に両者とも図-5の例と同様に解Cは $\partial \overline{U} / \partial r$ は解Aより大きく、流れは、外岸側に集中している。

6. 考 察

本節では、非線形効果の強さを表すパラメーター（これを P_t で表わす）について考える。 θ 及び r 方向の運動方程式を(5)、(6)式で近似する。

$$V \frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (5)$$

$$-\frac{U^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (6)$$

(5)式から、 P_t を(5)式左辺と右辺第2項の比で与える。すなわち、

$$P_t = V \frac{\partial U}{\partial r} / \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) \quad (7)$$

(7)式中の V は、水面の $V (=V_s)$ あるいは、河床付近の $V (=V_b)$ を用いて無次元化すべきである。そこで、 $\Delta V = |V_s| + |V_b| = V_s - V_b$ を基準速度に選び、 ΔV のオーダーを(6)式から以下のように見積る。

河床付近の $\partial V / \partial z = 0$ となる地点の z を z_0 とおくと

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial r} = \frac{1}{h-z_0} \int_{z_0}^h \frac{U^2}{r} dz = \frac{\tilde{U}^2}{r} \quad (8)$$

が得られる。ここに、 $\tilde{U}$ は、 $z = z_0 \sim h$ の代表流速で、 $\tilde{U} \approx \overline{U}$ (6)、(8)式から、(9)式が得られる。

$$\int_{z_0}^h \frac{\tilde{U}^2 - U^2}{r} dz = \nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \quad (9)$$

$z = z_0 \sim h$ で、 $U = \tilde{U} + \delta u$ とおき、 $\tilde{U} \gg |\delta u| \propto u_*$ (u_* : 摩擦速度)と仮定する。また、 $\partial V / \partial z = z = h/2$ のもので代表すると、 $V_t \sim u_* h$ である。以上の関係と、 $z_0 \ll h$ であることを考慮すると V の無次元表示として(10)式が得られる。

$$V = \frac{h}{r} \overline{U} v \quad (10)$$

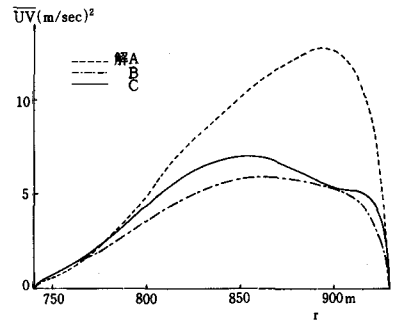


図-9 a

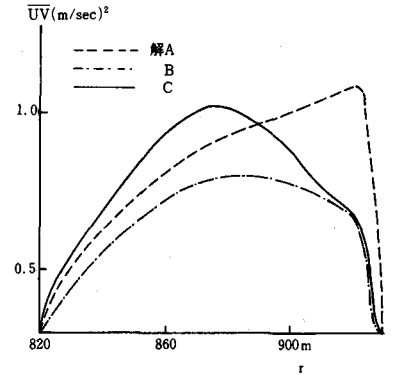


図-9 b

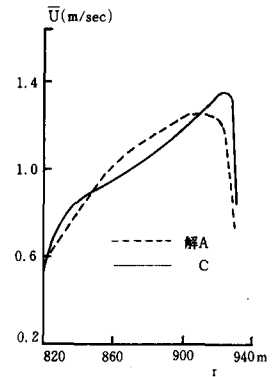


図-10 a

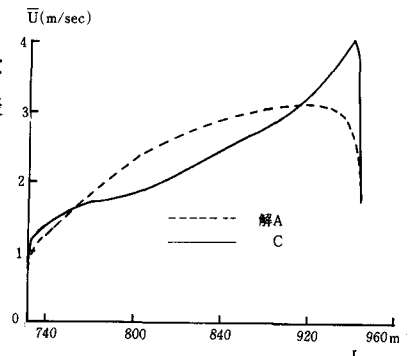


図-10 b

ここに、 v は、 V の無次元化流速。(7)式に(10)式及び、 $U = \bar{U}u$, $z = h\eta$, $\nu_t = \bar{\nu}_t f_\nu(\eta)$ を代入し、

$$i) u \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \gg \bar{U} \frac{\partial u}{\partial n} \text{とし、} \quad \frac{\partial \bar{U}u}{\partial r} \doteq u \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} \quad (11)$$

ii) $\bar{U}$ をマニングの式で表わし、 $I \cdot r = \text{constant}$ の関係を用いて、

$$\frac{1}{\bar{U}} \frac{\partial \bar{U}}{\partial r} = \frac{2}{3} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial r} - \frac{1}{2} \frac{1}{r} \doteq \frac{2}{3} \frac{1}{h} \frac{\partial h}{\partial r} \quad (12)$$

iii) $\bar{\nu}_t \propto u_* h$

と仮定すると、(13)式が得られる。

$$P_i = \text{constant} \times \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi_0 \cdot F, \quad F = uv / \frac{\partial}{\partial \eta} \left(f_\nu \frac{\partial u}{\partial n} \right) \quad (13)$$

ここに、 $\varphi_0 = \bar{U} / u_*$ 、(13)式から常数及び F を取り除いて、改めて P_i を(14)式で与える。

$$P_i = \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi_0 \quad (14)$$

図-7中に矢印を付した地点では、非線形効果が認められるが、その影響はそれほど大きくはない。そこで、この地点の P_i の値を限界値として、これを P_{ic} で表わすと、 $P_{ic} = 2 \times 10^{-3}$ である。矢印の地点より外岸側では、 $P_i = 2 \times 10^{-3} \sim 5 \times 10^{-3}$ である。従がって、 $P_i > P_{ic}$ であるが、図からわかる通り、外岸に向かって非線形効果が大きくなっている。S 54.5出水では非線形効果は小さかったが、この場合は、 $P_i = 6 \times 10^{-4} \sim 2 \times 10^{-3}$ で、外岸近くで限界値付近の値を取る。図-3に示した例では、 $P_i \approx \text{const} \approx 5 \times 10^{-2} > P_{ic}$ で、非線形効果は大きく、かつ r によらず同程度である。以上の結果を見ると、(14)式で定義される P_i は、非線形効果を表わすパラメーターとして適切なように思われる。

おわりに

非線形項の作用は、形式的に、1. 流速分布形を平坦化させる作用、2. 二次流による r 方向への運動量の輸送、にわけられる。

1. の作用は、弯曲部の河床形に大きな影響を与える。著者ら⁽¹⁾は、この作用の小さいS 54.5出水の河床形計算には非線形効果を見捨てても良いが、この作用の大きいS 56.8出水では、非線形効果を考慮しなければ、河床形が説明できないことを示した。

非線形効果に関するパラメーター P_i については、今回の資料の範囲では(14)式は適切であった。しかし、(13)式中の F は厳密には水理量に依存するので、更に広範囲の資料での検討が必要と思われる。

2. の作用は、 $\bar{U}$ の分布形に大きな影響を与える。この作用により、矩形水路でも強制渦型の分布が起こり得ることが著者ら⁽⁴⁾によって示されている。

本報告では、これらの2つの効果が、数値実験により明確に示された。

本研究の遂行に当っては、本学学生佐藤大三君の熱心な協力を得た。ここに記して謝意を表します。

参考文献

- 1) 森明巨、岸力：河道弯曲部の河床形に関する研究、第26回水理講演会論文報告集、1982年
- 2) 森明巨、岸力：河道弯曲部における二次流の構造、第27回水理講演会論文報告集、1983年
- 3) Rozovskii, I. L.: Flow of Water in Bends of Open Channel, Academy Sciences of the USSR, 1957年
- 4) 森明巨、岸力：河道弯曲部の流れに与える二次流の効果、第38回土木学会年次講演集、1983年