

Spatial Distribution of Bed Load Transport Rate over Two-Dimensional Dunes

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
京都大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎
京都大学工学部 正 員 村 上 正 吾
京都大学大学院 学生員 水 橋 雄 太 郎

1. まえがき

移動床水路には条件に応じて種々の河床形態が形成されるが、中でも dunes は流砂量、流水抵抗に与える影響が顕著で、従来、それぞれ有効掃流力、抵抗分割（形状抵抗と摩擦抵抗）といった概念で処理されてきた。しかしながら、河床波上の流れ、流砂についての知見が深まるにつれ、これらの便宜的手法の物理的意義がかえって薄れてきたように思われる。とくに有効掃流力という概念は平坦平衡状態で求められた流砂量式を河床波の形成された非平衡な状態に延用する便法にすぎず、従来摩擦抵抗と同一視されることが多かったが、摩擦抵抗の評価が河床波面の局所底面せん断応力と結びつけて正確に行われるようになると、流砂の非平衡性の重要性が浮彫になり、論理の斉合性が保てなくなる。

本研究ではこうした状況に鑑み、まず dunes の背面に沿う底面せん断応力の分布特性を明らかにし、一方非平衡状態に適用が可能な流砂モデルを作成、これらを組み合わせることで dunes 上の流砂量分布を明らかにする。これによって、dunes によって覆れた河床の合理的な流砂量・抵抗予測のみならず、非平衡流砂状況（規則）によって、どのように河床波の形状・スケールが決定されるか、流量変化に対して個々の河床波がどのように応答して変形するかなどの問題に対しても重要かつ有益な情報を提供するものと期待される。

2. Dune 背面での境界層の発達

dune 上の流砂性状を明らかにするには、何よりもまず dune 背面に沿う底面せん断応力の分布を知る必要がある。dune の crest を過ぎる流れはそこで剝離、渦を形成して、下流側の dune の背面で再付着する。そのため、再付着点（reattachment point）から下流（クレスト）に向って新しく（副次的な）境界層が発達し、dune 背面の底面せん断応力分布はこれに支配されている。椿¹⁾ はかなり早い時期にこれに着目し、平板上の乱流境界層の摩擦係数を用いて摩擦性状の評価を行う試みをしたが、最近では吉川・石川²⁾、Fredsoe³⁾ によって、より詳細な解析がなされている。ここでは、主として流砂の挙動との関連を議論するため、次のような簡単な境界層モデルを展開することにする。

いま、図-1 に示すような、三角形の dune model を考え、再付着点から下流に向って砂面に沿って x 座標、砂面から垂直上方に y 座標をとる。圧力勾配 ($\rho g \cdot \partial h / \partial x$; ρ : 水の密度, g : 重力加速度, h : 水深) 及び速度勾配 ($\partial u_\delta / \partial x$; u_δ : 境界層外縁流速) を考慮した境界層に対する von Kármán の運動量積分式は次式で与えられる。

$$\frac{\tau_0}{\rho} = \frac{\partial}{\partial x} (u_\delta^2 \delta_2) + u_\delta \delta_1 \frac{\partial u_\delta}{\partial x} - g \delta \frac{\partial h}{\partial x} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 τ_0 : 底面せん断応力, δ_1 : 排除厚, δ_2 : 運動量厚, δ : 境界層厚である。Froude 数の大きくない状況を対象として水面波を無視すると、($\partial h / \partial x$) は河床波の波形勾配 θ ($\equiv H / L$; H : 河床波の波高, L : 波長) と結びつけられ、式(1)は次のように無次元表示される。

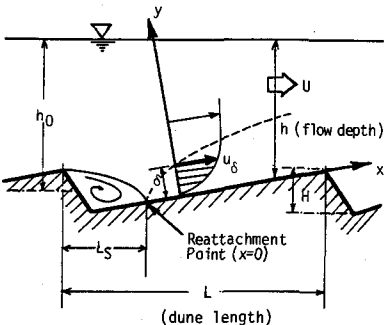


図-1 記 号 図

$$\frac{\tau_0}{\rho u_\delta^2} = \frac{\partial \delta_2}{\partial x} + \left(\frac{\delta_1}{\delta_2} + 2 \right) \frac{\delta_2}{u_\delta} \cdot \frac{\partial u_\delta}{\partial x} + \frac{g\theta\delta}{u_\delta^2} \quad \dots\dots\dots (2)$$

境界層内の流速分布を指数則で表わし、

$$\frac{u}{u_\delta} = \left(\frac{y}{\delta} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots\dots\dots (3)$$

とすると、

$$\delta_1 = \frac{1}{m+1} \delta ; \delta_2 = \frac{m}{(m+1)(m+2)} \delta \quad \dots\dots\dots (4)$$

となり、また、粗面の抵抗則として Manning-Strickler 型を用いるものとする。すなわち、 $u_* (\equiv \sqrt{\tau_0/\rho})$ を摩擦速度として、

$$\frac{u_\delta}{u_*} = A_0 \left(\frac{\delta}{k_s} \right)^{\frac{1}{n}} \quad \dots\dots\dots (5)$$

とする。 k_s としては河床波を構成する砂の粒径 d を用い、 $A_0 = 8.94$ 、 $n = 6$ である。これらを式(2)に代入、整理すると、

$$\frac{d\delta}{dx} + \left[\frac{3m+2}{m} \cdot \frac{1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} + \frac{(m+1)(m+2)}{m} \frac{g\theta}{u_\delta^2} \right] \delta = \frac{(m+1)(m+2)}{mA_0^2} \left(\frac{\delta}{k_s} \right)^{\frac{2}{n}} \quad \dots\dots\dots (6)$$

すなわち、Bernoulli 型の微分方程式となる。よって、 $\xi = \delta^{\frac{n+2}{n}}$ と変数変換することにより簡単に解け、

$$\delta^{\frac{n}{n+2}} = \exp \left\{ -\int f_1(x) dx \right\} \left[\int f_2(x) \exp \left\{ \int f_1(x) dx \right\} dx + c_1 \right] \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。

$$f_1(x) = \frac{n+2}{n} \left[\frac{3m+2}{m} \frac{1}{u_\delta} \frac{du_\delta}{dx} + \frac{(m+1)(m+2)}{m} \cdot \frac{g\theta}{u_\delta^2} \right] \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$f_2(x) = \frac{(m+1)(m+2)(n+2)}{mnA_0^2} \cdot k_s^{\frac{2}{n}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

であり、 c_1 は積分定数である。(初期条件 $x = 0$ で $\delta = 0$ を用いると $c_1 = 0$ である。)

ところで境界層外縁流速は別途段落流モデル(後流モデルの変形など)などで解析されようが、ここでは従来の実験や、次章に示す実験結果より次のように簡単な関数形で近似して解析を進めることとする。

$$\frac{u_\delta}{U} = A_4 \left(\frac{x}{h_0} \right)^{\frac{1}{2}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 U : 平均流速、 h_0 : 平均水深である。河床波のクレスト ($x = L - L_s$; L_s : 下流側クレストから測られた再付着点までの距離) では、加速流の効果により流速分布が一様化していることに着目、そこでの u_δ を一様流速分布の仮定より与えて上式中の定数 A_4 を決めると、

$$A_4 = 2 / \{ (2 - k_L \theta) \cdot \sqrt{k_L (1 - K_R)} \} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となり、ここに、

$$k_L \equiv L/h_0 ; \quad K_R \equiv L_s/H \quad \dots\dots\dots (12)$$

である。このとき、式(6)の解は次のようになる。

$$\frac{\delta(x)}{k_s} = \left(\frac{1}{A_0^2 B_0} \cdot \frac{x}{k_s} \right)^{\frac{2}{n+2}} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$B_0 = \frac{(3m+2)(n+2)+2mn}{2(m+1)(n+2)(n+2)} + \frac{\theta}{A_4^2} \cdot \frac{gh_0}{U^2} \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。式(5)を用いて底面せん断応力を求めると、

$$\frac{\tau_0}{\rho U^2} = A_4^2 \cdot A_0^{-\frac{2n}{n+2}} \left(\frac{k_s}{h_0} \right) \cdot \left(\frac{x}{k_s} \right)^{\frac{n}{n+2}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

が得られる。

3. 河床波上の流れの測定

長さ9 m、幅33 cmの鋼製可変勾配水路に、木製の三角形状河床波模型（河床波表面は砂をニス付けした粗面仕上げとしてある）を15波並べ、その上にほぼ等流状態で通水し、流れの測定を行った。実験条件は表-1に示す通りでG~Hシリーズは流れの測定を行ったもので、後述するように流砂挙動に関する実験をM~Nシリーズとして対応させてある。

表-1 実験条件

RUN	L (cm)	H (cm)	d (cm)	I	U (cm/s)	h (cm)	Fr	C/√g
G-1 M-1	40.0	2.0	0.082	1/500	22.2	4.7	0.33	7.33
G-2 M-2	40.0	2.0	0.082	1/500	36.8	7.8	0.42	9.40
G-3 M-3	40.0	2.0	0.082	1/500	41.1	11.6	0.39	8.61
G-4 M-4	40.0	2.0	0.082	1/500	43.9	13.3	0.38	8.60
H-1 N-1	40.0	2.0	0.082	1/300	26.3	4.4	0.40	6.92
H-2 N-2	40.0	2.0	0.082	1/300	36.2	6.3	0.46	7.98
H-3 N-3	40.0	2.0	0.082	1/300	42.7	8.4	0.47	8.15
H-4 N-4	40.0	2.0	0.082	1/300	46.5	12.1	0.45	7.72

図-2は、河床面付近に注射器で染料を注入して再付着点さがすことで L_s を測定した結果で、

$$K_R \equiv L_s/H = 5 \quad \dots\dots\dots (16)$$

がほぼ認められる。この結果は従来の実験に基づく指摘とも良く一致している。図-3は直径3mmの小型プロペラ流速計を用いて測られた流速分布の河床背面に沿っての変化を示したものである。この結果より流速分布の変曲等を考慮して境界層厚を読みとったものを図-4に示した。またそれにもとづいて境界層外縁流速 (u_δ) の場所的变化を示したものが図-5で、図中の曲線は式(10)を示す。すなわち、前章の解析に用いた仮定の一つが検証された。

さらに図-6には、境界層内の流速分布の実測例が示されており、前章式(3)のような流速分布則を仮定するならば $m=8$ 程度が適当であることがわかる（これで、前章の解析結果である式(13)または式(15)に含まれる未知定数がすべて決定された。式(13)の計算結果を図-4に示したが、流速分布より適当に読みとった境界層厚はかなり大き目であった。境界層厚を与え直して図-5、図-6を新たに得て、計算を繰り返しても最終結果に及ぼす影響はそれ程大きくないと考えられる）。

次に図-7は小型プロペラ流速計に

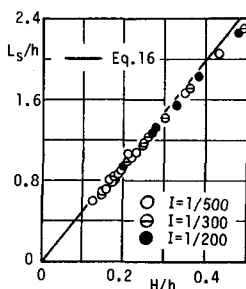


図-2 剝離域の長さ

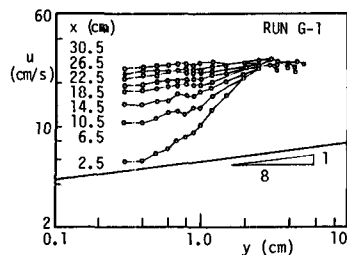


図-3 河床波背面上流速分布

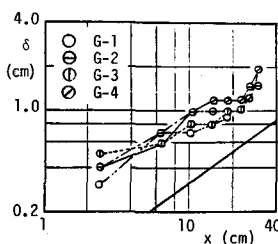


図-4 境界層厚の変化

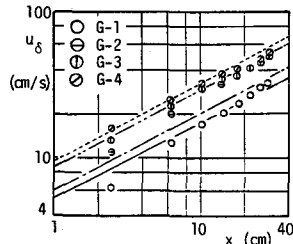


図-5 境界層外縁流速

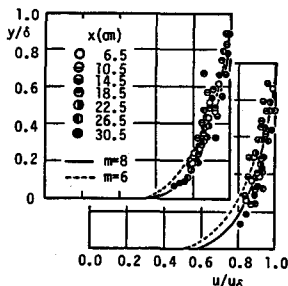


図-6 境界層内流速分布

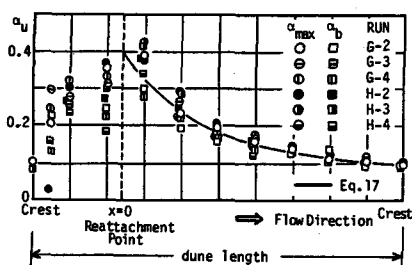


図-7 底面近傍流速変動係数

よって記録された流速変動記録を 0.2 秒間隔で離散化して求めた流速の変動係数（相対乱れ強度）を示している。図中 $\alpha_{\max}$ は各断面中最大の変動係数、 α_b は河床から 0.3 cm の位置での値を示す。これによると、流れの再付着点で極大値をとっており、とくにそれより下流での減衰状況は各ケースで相似形を示している。剝離域では実質的な砂の動きはないので、再付着点から下流について、底面近傍での流速変動係数 α_u を評価する次のような実験式を提案する。

$$\alpha_u = \alpha_{u0} + (\alpha_{ur} - \alpha_{u0}) \exp\left(-\frac{x}{X_L}\right) \quad \dots\dots\dots (17)$$

ここに、 α_{u0} 、 α_{ur} はそれぞれクレスト、再付着点での α_u の値であり、 X_L は乱れの遷滅に関する長さスケールである。実験結果より、

$$\alpha_{u0} = 0.1 \quad ; \quad \alpha_{ur} = 0.4 \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$\xi_L \equiv X_L/L = 0.20 \quad \dots\dots\dots (19)$$

とした。流砂挙動は底面せん断応力の変動と密接に関係しているものと予想され、 $\tau_0 \sim \rho u_b^2$ (u_b : 底面近傍流速) であるから、その変動係数 α は次式で与えられるものとした。

$$\alpha \doteq 2\alpha_u + \alpha_u^2 \quad \dots\dots\dots (20)$$

なお、上述のようにモデル化した流れの特性についてはより多くの実験によって、その普遍性を検証する必要がある。

4. 非平衡状態に対する流砂の Stochastic model

河床波の背面では流れの基付着点で流砂量が零である非平衡な状態となっており、この非平衡流砂によって河床波の進行や変形が支配されている。流砂の非平衡状態の特徴はいわゆる step length で持ち込まれる遅れにより、底面せん断応力と流砂量が一対一に対応しないことで、pick-up rate と step length から構成される (Euler 的に理解された) stochastic model⁴⁾ が有効である。著者らは平均 step length が場所的にほとんど変化しないような軽微な非平衡状態に対してはすでに砂面不安定性の問題⁴⁾ や armoring の解析⁵⁾ へ適用している。しかし、河床波の背面では平均 step length も場所的に異っていることが予想され、こうした状況への適用の可能なモデルの組立が必要である。

いま、ある地点 (x) で動き出した砂が、その地点 (x) で規定される step length の分布に支配される距離スケールを X_D とする。すなわち、砂が運動を開始して X_D 以上の距離を動くべく「予約された」砂は、 $x + X_D$ で河床から動き出した (離脱した) 砂と同一視し得る状態となるものとする。言い換えれば x' の位置から飛び出したとみなせる砂は、 $(x' - X_D)$ より飛び出したと見なせる砂のうち区間 $(x' - X_D, x')$ に落下しなかったものと、 x' より純粋に流れの作用で飛び出したものから成る。純粋に流れの作用によるいわゆる pick-up rate を p_s 、ここで考えたような上流から流れてきてそこでこれと同一視されるに至ったものを含めたみかけの pick-up rate を $\tilde{p}_s$ と表わすと、次式が得られる。

$$p_s(x) = p_s(x') + \tilde{p}_s(x' - X_D) \cdot \int_{X_D}^{\infty} f_X(\xi | x' - X_D) d\xi \quad \dots\dots\dots (21)$$

ここで、 $f_X(\xi | x)$ は場所 x の掃流力によって規定される step length の確率密度関数である。分布形が各点で相似で平均 step length A が場所の関数であるとすると、

$$f_X(\xi | x) = \frac{1}{A(x)} \exp\left\{-\frac{\xi}{A(x)}\right\} \quad \dots\dots\dots (22)$$

である。ところで、

$$\tilde{p}_s(x' - iX_D) = p_s(x' - iX_D) + \tilde{p}_s(x' - (i+1)X_D) \int_{X_D}^{\infty} f_X(\xi | x' - (i+1)X_D) d\xi \quad (23)$$

であるから、

$$K_i \equiv \int_{X_0}^{\infty} f_X(\xi | x - iX_D) d\xi \quad (i \geq 1) \quad (24)$$

$$K_0 = 1$$

とおくと、

$$p_s(x') = \sum_{i=0}^{\infty} \{ (\prod_{j=0}^i K_j) \cdot p_s(x' - iX_D) \} \quad (25)$$

と書ける。すなわち、非平衡流砂過程の基礎式は、上式で与えられる $p_s(x')$ を用いて次の様に表わされる。

$$q_B(x) = \frac{A_3 d}{A_2} \int_{x-X_D}^x \{ \tilde{p}_s(x') \int_{x-x'}^{\infty} f_X(\xi | x') d\xi \} dx' \quad (27)$$

$$\frac{\partial y(x)}{\partial t} = A_1 d \{ p_d(x) - p_s(x) \} \quad (28)$$

$$p_d(x) = \int_{x-X_D}^x \tilde{p}_s(x') f_X(x-x' | x') dx' \quad (29)$$

ただし、 A_1 、 A_2 、 A_3 は砂の形状係数、 $p_d(x)$ は $p_s(x)$ と同様に定義された deposit rate である。

5. pick-up rate と平均 Step length の評価

前章のモデルを用いて河床波上の流砂過程を記述するには、pick-up rate $p_s(x)$ と平均 step length $A(x)$ を各点の掃流力などの流れ特性に関係づけて評価しなければならない。

pick-up rate について、平坦平衡河床では、すでに著者らによって推定式が得られており⁶⁾、それは次式で近似される^{4), 5)}

$$p_{s*} \equiv p_s \sqrt{d/(\sigma/\rho - 1)g} \equiv 0.03 \tau_* \{ 1 - 0.035/\tau_* \}^3 \quad (30)$$

ここで、 σ/ρ : 砂の比重、 τ_* : 無次元掃流力 ($\equiv u_*^2 / \{ (\sigma/\rho - 1)gd \}$) である。この式形を利用して、次のように底面せん断応力の変動の効果を取り入れることにする。すなわち、pick-up rate は τ_0 に変動の無いときは

$$p_{s*0}(\tau_*) = 0.03 \tau_* \{ 1 - (\tau_{*c}/\tau_*) \}^3 \quad (31)$$

で表わされ ($\tau_{*c} = 0.04$: 無次元限界掃流力)、 τ_0 が変動係数 α の正規分布に従って変動するときは、pick-up rate と平均の τ_0 との関係は期待値操作によって得られるものとする。よって、次式が得られる。

$$p_{s*}(\tau_* | \alpha) = 0.03 \tau_{*c} \cdot f_p(\tau_*/\tau_{*c} | \alpha) \quad (32)$$

$$f_p(\eta | \alpha) = \eta \int_{-\infty}^{\infty} H[(1 + \alpha r) \{ 1 - \frac{1}{\eta(1 + \alpha r)} \}^3] \phi(r) dr \quad (33)$$

$$\eta \equiv \tau_*/\tau_{*c} \quad (34)$$

$$\phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{r^2}{2}) \quad (35)$$

なお、 $H[\cdot]$ は次のように定義される。

$$\Pi(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (36)$$

α をパラメータとして式(36)を計算して得られた pick-up rate と平均底面せん断応力の関係が図-8 に示されている。図中の破線は式(30)を表わしており、 $\alpha=0.2$ の曲線とほぼ一致している。また α が大きくなるにつれ、 τ_* の小さい条件でもかなりの砂の移動がみられる。

一方、step length については粒子運動の力学にもとづいて評価式を得る試み⁷⁾はまだ充分な成果をおさめているとは言い難く、平坦平衡河床でも従来から得られている流砂量式と式(36)とから逆算によって求められるものが用いられる現状である。こうした方法で与えられる平均 step length は $\tau_* < \tau_{*c}$ では零となるにもかかわらず、河床波上では強い乱れによって pick-up された砂が、強い乱れと加速流の効果によって結構長い step length を持っていることが観察によってわかる。現時点では step length についての充分な測定データも持たないし、乱れ、加速度 ($\partial u/\partial x$) の効果も定量的には明瞭でないので、ここでは、次式で与えられる平坦 (平衡) 河床の平均 step length A_0 を $A_0 > 100d$ の場合に限り用いることとし、 $A_0 < 100d$ のときは、 $100d$ を平均 step length とすることとした。すなわち、

$$A_0/d = 400 \sqrt{\tau_*} \left(1 - \frac{\tau_{*c}}{\tau_*}\right)^{\frac{3}{2}} / \left(1 - \frac{0.035}{\tau_*}\right) \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$A/d = \begin{cases} A_0/d & (A_0/d > 100) \\ 100 & (A_0/d < 100) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (38)$$

である (図-9 参照)。式(37)を得るに当っては Meyey-Peter Muller 式が用いられた。河床波上の流砂運動の step length についてははまだフィルム解析などにより実測データを収集して知見を広げる必要がある。

6. モデルにもとづく計算結果と河床波上の流砂性状の実測

表-1 に示した条件に対し、本論文で展開した境界層モデルと非平衡流砂モデルにもとづいた計算を行った。また、流砂特性の一部については、実験によって測定、計算結果との比較を試みた。実験は図-10 に示すような局部的な移動床と採砂箱の組み合わせによって河床波背面の各点における pick-up rate と流砂量を測定しようとしたものである。なお移動床部は水路中央部で幅 20 cm のものを設け、pick-up rate は、20 cm × 4 cm の領域からの移動砂粒を測定したものである。

図-11 は、河床波背面に沿う底面せん断応力分布についての計算結果であり、これにもとづいて計算された pick-up rate と流砂量の計算結果をそれぞれ図-12、13 に示す。図-12、13 には、実験水路で得られた測定結果も併示されており、これらによると、量的な評価は必ずしも充分とは言い難い。今後、測定方法を改良して実測データをより多く収集するとともに、モデルについての再検討も行って誤差を解消してゆきたい。なお、図-14、15 にはそれぞれ deposit rate 及び pick-up rate との差で表わされる河床高の時間変化率 $\partial y/\partial t$ の場所的

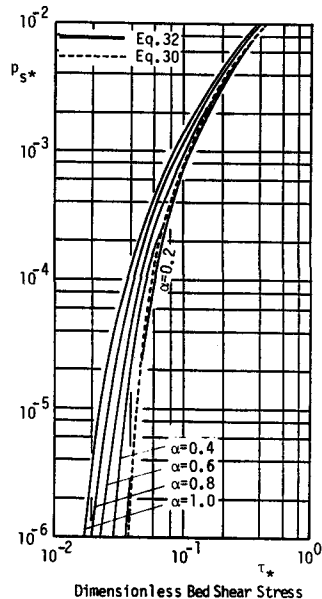


図-8 pick-up rate と掃流力の関係

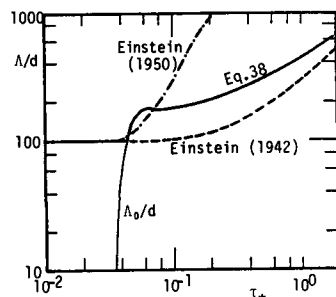


図-9 平均 step length と掃流力の関係

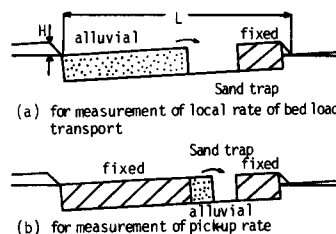


図-10 流砂特性量測定装置

変化について計算結果を示した。

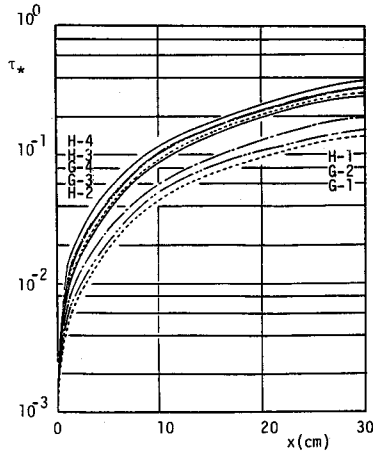


図-11 底面せん断応力分布

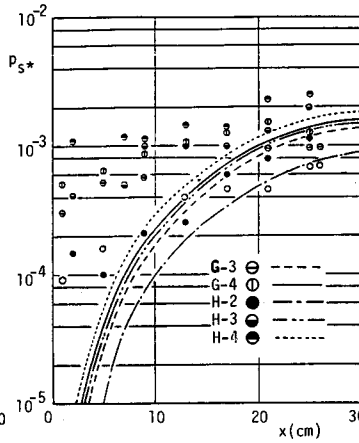


図-12 $p_{s*}(x)$

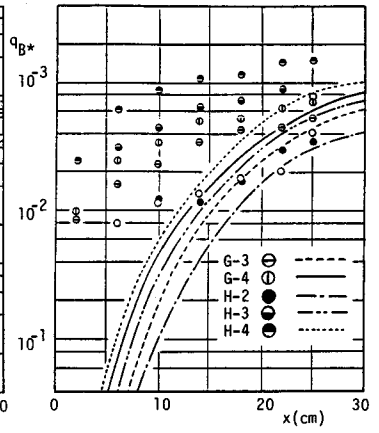


図-13 $q_{B*}(x)$

7. あとがき

本論文では dunes 上の流れと流砂の合理的な予測を目的とし、そのための基礎として一つの dune 上の底面せん断応力と、場所的に大きく変化する掃流力の場での非平衡流砂況を合理的に（斉合性を保って）評価するモデルの組み立てを行った。モデルの組み立てそのものを急ぐあまり、各部において十分な実験的検証を欠く仮定を用いており、今後それらを補う一方さらに

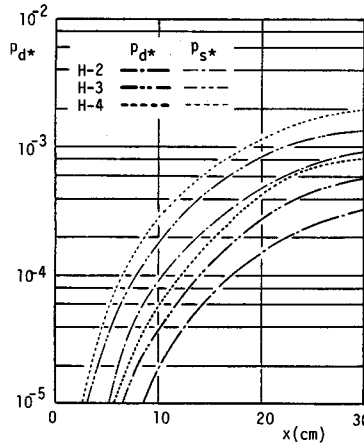


図-14 deposit rate $p_{d*}(x)$

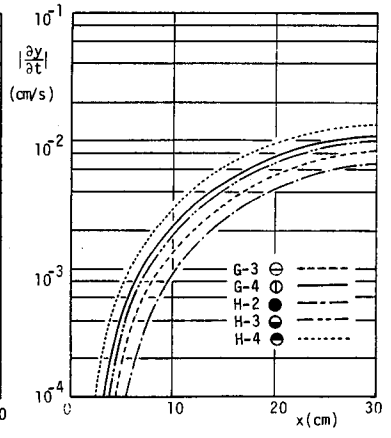


図-15 $\partial y(x)/\partial t$

本モデルの適用性を高める努力をしたい。すなわち、河床波の変形や、流れと流砂の相互作用で決まる dune の形状、スケールの予測、dune 上の流れの抵抗則など広い適用性を確保してゆきたいと考える。

参 考 文 献

- 1) 椿東一郎：土木学会誌，第 40 巻，第 8 号，1955，pp. 14~22.
- 2) 吉川秀夫・石川忠晴：土木学会論文報告集，第 281 号，1979，pp. 58~63.
- 3) Fredsøe, J. : Journal of the Hydraulics Division, Proc. ASCE, Vol. 108, No. 8, 1982.
- 4) Nakagawa, H. & T. Tsujimoto : Proc. ASCE, Vol. 106, HY 12, 1980, pp. 2029~2051.
- 5) 中川博次・辻本哲郎・原稔明：京大防災研年報，第 20 号 B-2，1977，pp. 355~370.
- 6) 中川博次・辻本哲郎：土木学会論文報告集，第 244 号，1975，pp. 71~80.
- 7) Tsujimoto, T. & H. Nakagawa : Proc. 2nd International Symp. River Sedimentation, 1983.
- 8) Meyer-Peter, E. & R. Müller : Proc. 2nd IAHR Congr., Stockholm, 1949.