水中を運動する礫の衝撃力について

Study on Impact Force of Moving Gravel in Water

東洋大学工学部　正　員　荻　原　国　宏
東洋大学工学部　学生員　有　賀　　稔

1. はじめに

河川等における水理構造物に及ぼす影響は、流砂量に関する問題、河床変動に関する問題として多くの研究が理論的に、かつ実験的に研究がなされているにもかかわらず、これらに誘因する問題として水理構造物に対する砂礫の衝撃力についての研究例は少ない。衝撃力の問題は、衝突・磨耗しいては、破壊へとつながる重要な問題である。

衝撃力の研究については、砂防ダムにおける土石流の衝撃力をどの様に設計に組み入れたらよいのか、[1] また、水路床における損傷[2]としてなされているが定量的な把握には困難さをきわめている。衝撃力を考えるに当たっては、衝撃に働く力を水流による流体圧力と考えて、その流体内部における土砂の粒径分布や密度等を考慮に入れて濃度的に取り扱う衝撃力、また、単一あるいは複数の礫が流体運動を伴って衝突する衝撃力など、運動形態の取り扱い方により複雑となっている。

そこで、本研究は、その第一歩として単一粒径の礫の挙動と衝撃力について、基礎的な研究を行なってみた。単一礫の運動は、滑動（Sliding）・転動（Rolling）・跳躍（Saltation）といった運動に分類され、それに加えて流れの特性の為に複雑な運動形態をとるから、力学的な取り扱いは困難、きわまりない。ここでは、跳躍運動して行く礫について基礎的な運動方程式を立て、跳躍高さの状態を抗力係数と反発係数の関係について比較検討してみた。合わせて、衝撃力を算出してみたが、河床近傍における粒子挙動に問題点を残した。

2. 実験内容

実験は長さ４ m、高さ 40 cm、幅 10 cmのアクリル製水路で行ない、勾配を０とした。使用した粒子諸量は表－１であり、粒子番号№１～５はガラス製球、№６は鉄製球、№７はゴム製球である。ここで、σ/ρ：比重、d：粒子の直径（cm）である。粒子の沈降速度においては、別に用意した水槽を使っても行なってみた。粒子の跳躍運動を見るために、水路の任意の高さ（本実験では、落下高さ $h = 27.0\ cm$）と位置を設定し、水路幅の中央より落下させた。実験は、初めに流水前において空気中で、それぞれの粒子の反発係数を求めるために行ない、静水中と流水中の両方について行なった。水中を運動する粒子をストロボ装置で照射することで、側面より写真撮影を行ない、写真をグラフィック・タブレット装置を使って電算処理をした。静水中における床面近傍の運動はビデオ撮影することで、ポジションアナライザーを使用して読み取った。流水中の実験は、流量 1.20 ℓ/sec として下流側のセキを上げることで水深を一定に保った。流速測定は、ピトー管を使用した。本研究では、CASE１が空気中、CASE２が静水中、CASE３が流水中の実験である。

NO.	σ/ρ	d	記号
1	2.47	2.991	○
2	2.47	1.599	△
3	2.43	1.230	□
4	2.67	1.112	●
5	2.40	0.507	▲
6	7.93	1.100	■
7	1.12	4.281	×

表－１　粒子諸量

3. 基礎式

粒子の運動は鉛直方向のみを考えるとき、粒子に働く流体力は、速度に比例した抵抗と速度の２乗に比例した抵抗と仮定した場合とにわけられる。本研究において高レイノルズ数領域で、しかも礫の運動を想定していることにより速度の２乗に比例する抵抗を適用する。したがって、仮想質量を考慮に入れ、しかも粒子の回転がないものとして運動方程式を立てると、一般に、

$$\frac{\pi d^3}{6}\sigma\frac{dw}{dt} = \pm\frac{\pi d^3}{6}(\sigma-\rho)g - \frac{1}{2}\left(\frac{\pi d^2}{4}\rho\right)C_D w^2 - C_m\frac{\pi d^3}{6}\rho\frac{dw}{dt} \qquad (1)$$

で表わされる。ここで複合は、上昇運動において負、下降運動において正である。C_m：仮想質量係数、C_D：抗力係数、w：粒子の速度、である。(1)式を簡単に整理すると、

$$\frac{dW}{dT} = \pm 1 - W^2 \qquad (2)$$

ここに、 $W = \frac{w}{w_f}$, $T = \frac{(\sigma/\rho-1)}{(\sigma/\rho+C_m)}\frac{gt}{w_f}$, $Z=\frac{3}{4}\frac{C_D}{(\sigma/\rho+C_m)}\frac{z}{d}$, $w_f=\sqrt{\frac{4}{3}\frac{dg}{C_D}\left(\frac{\sigma}{\rho}-1\right)}$

であり、w_f は最終沈降速度である。粒子の跳躍運動して行く概要を図－１に示す。

粒子の運動が下降して行く時には、複号を正にとり、(2)式を初期条件 $T=0$ で $W=0$ として積分すると、

$$W = -\tanh T \qquad (3)$$

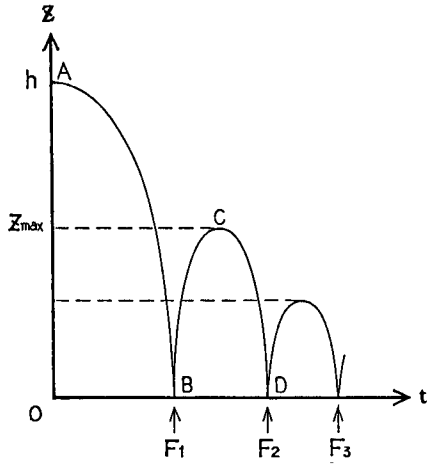
となる。(3)式をさらに初期条件 $T=0$ で $z=h$ の時の無次元高さを $Z=H$ として積分することで、下降に要する時間 T_{AB} は、(4)式となる。

$$T_{AB} = \operatorname{arccosh}[\exp(H)] \qquad (4)$$

粒子の運動が上昇して行く時には、(2)式における複号を負として、初期条件 $T=0$ で $W=W_0$ の初速度を考えて積分すると、

$$W=\frac{(W_0 - \tan T)}{(1 + W_0\tan T)} \qquad (5)$$

となり、(5)式を初期条件 $T=0$ で、$Z=0$ のもとで積分すると、上昇高さは、



図－１ 座 標

$$Z = \ln[W_0\sin T + \cos T] \qquad (6)$$

また、１回目の衝突後の最大跳躍高さは、(5)式において、$W=0$ の時であるから、最大跳躍高さまでの時間 T_{BC} は、

$$T_{BC} = \arctan W_0 \qquad (7)$$

となる。故に、１回目の衝突後の最大跳躍高さ Z_{max} は、(6)式に(7)式を代入することで、

$$Z_{max} = \frac{1}{2}\ln[1+W_0^2] \qquad (8)$$

となって表わされる。

今、ここで初速度 W_0 を反発係数 e を使って表わす。つまり、任意高さ H より落下して来た粒子の床面衝突直前速度 $Z=0$ の点で $W_{Z=0}$ として考える。

$$W_0 = eW_{z=0} \qquad (9)$$

とする。W_0 は、(3)式に(4)式を代入することにより求められる。この関係を表わしたのが図－2である。これは、任意の高さより落下して、床面衝突直前速度を表わしている。

また、跳躍高さの関係は、(9)式を(8)式に代入することで、

$$Z_{max} = \frac{1}{2}\ln[1+e^2(1-\mathrm{Exp}(-2H))] \qquad (10)$$

となる。(10)式において、上昇時と下降時における抗力係数が異なるならば、無次元高さHに含まれる抗力係数C_Dを下降時における値として、上昇時には無次元高さZ_{max}に含まれる抗力係数をC_{D1}として上昇時の値を使うことになる。

しかし、上昇時と下降時において粒子のレイノルズ数が大きく、抗力係数が一定として考えると、(10)式より跳躍高さの比として表わすと、

$$\frac{z_{max}}{h} = \frac{1}{2H}\ln[1+e^2(1-\mathrm{Exp}(-2H))] \qquad (11)$$

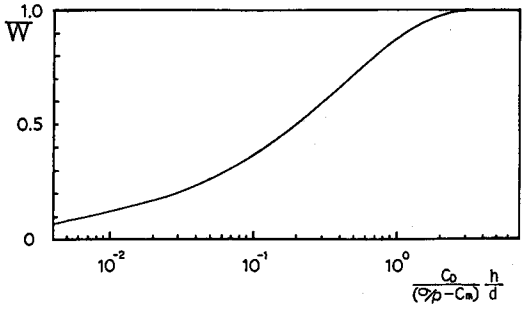
となる。ここで、Hは無次元化した衝突前の跳躍高さであり、hはその時の高さ、z_{max}は衝突後の跳躍高さである。その関係を反発係数0.1～1.0まで変化させて表わしたのが図－3である。

以上の計算を逐次くり返すことにより、鉛直方向における減衰状態がわかる。

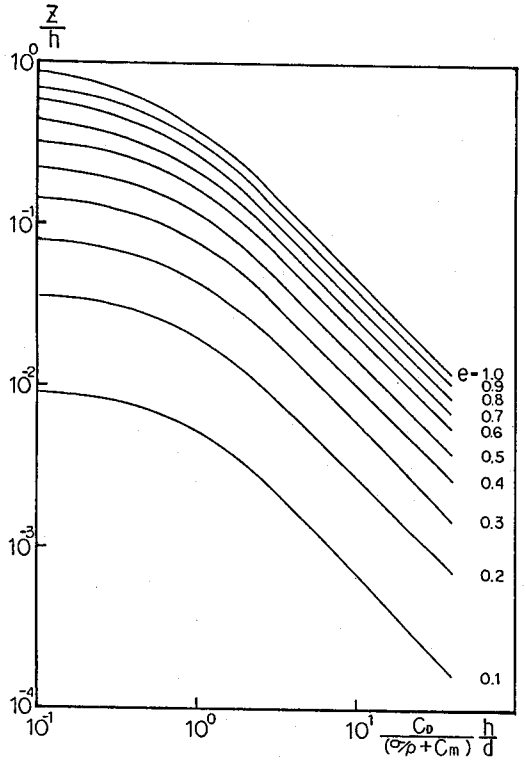
また、(11)式において、衝突前における落下高さが、床面衝突直前で等速運動になるなら、つまり$W \simeq 1$において、

$$\frac{z_{max}}{h} \simeq \frac{1}{2H}\ln[1+e^2] \qquad (12)$$

で近似してもよいことになる。



図－2　h－Wの関係



図－3　h/d－z/hの関係

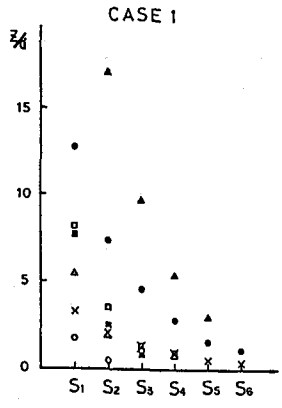
4. 実験結果

鉛直方向の運動は、(11)式によって表わされた。また、水平方向の運動は、流れの乱れによる特性で、さらに複雑になってくる。流速分布における境界層の取り扱い、また揚力の働きなどにより粒子の回転運動が助長されることから、跳躍高さに変化をもたらすので、ここでは特に静水中における運動を主として比較して見る。実験において跳躍高さの様子が図4－6である。縦軸に各跳躍時の高さを横軸に跳躍回数を取っている。図－4は空気中における跳躍高さであり、これより反発係数の値を決めた。図－5と6を比較すると、粒子№1～4までは、ほぼ同じ値である。№5と№7は、それぞれ高い値を示している。これは、№5において直径が小さいこと、№7においては、比重が小さいことによる。また、流れの状態において、床面近傍で流速が速く、水深が浅くなるほど遅い噴流状態で実験を行なったために、揚力が働いているためであるが、

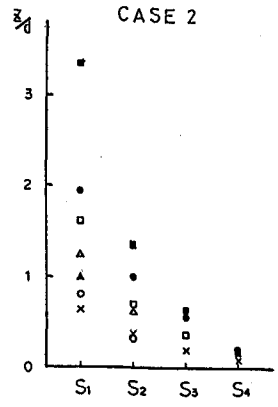
これについては、今後、回転速度を考慮に入れて研究していくつもりである。

静水中における跳躍高さの状態、図－5をさらに検討するため、$h/d-z/h$として表わしたものが、図－7である。図－3を重ね合わせることで特徴がわかる。つまり、跳躍高さの分布より逆に反発係数の値が明らかにされる。抗力係数と反発係数の比較検討したものが表－2である。Aは、空気中において測定した粒子の反発係数の値である。Bは、実験より求めた最終沈降速度に対する抗力係数C_Dと跳躍高さ分布を比較した時の反発係数eの値である。また、Cは跳躍高さの分布が一番よく反発係数の値に合った時のC_Dとeの値である。（図－7中の各線を示す。）比較的合っているのが粒子№4であるが、全体に反発係数の値が高いことがわかる。以上の比較より、水中における粒子の跳躍運動は、空気中より高い反発係数の値で合っていると言えよう。また、抗力係数の値に対して、過少評価することで検討して見たが、やはり結果は同じであった。このことに対して考察すると、粒子の床面近傍における流体との挙動が上げられる。また、粒子が沈降して行く時において、粒子の回転は余りに小さいから、この点において静水中では無視してもよいと考えている。しかるに、粒子が床面に近ずくと、それに伴なって粒子の運動方向の射影面積、つまり鉛直方向に水が圧縮された形となり、ひとたび反発し、上昇することで水が粒子を押し上げて行くことにより跳躍高さが大きくなると考えられる。このことより、床面近傍における粒子の挙動が水と相互運動になるから仮想質量係数の値について考える必要がある。

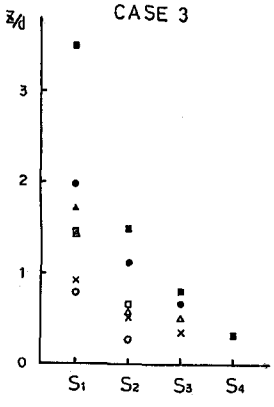
今後、これらの問題に対して、抗力係数と仮想質量係数について研究するつもりである。



図－4　跳躍高さ（空気中）



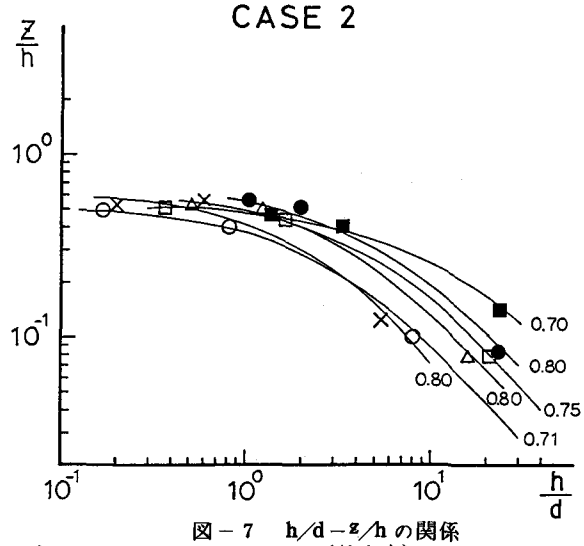
図－5　跳躍高さ（静水中）



図－6　跳躍高さ（流水中）

粒子番号	A	B		C	
	e	e	C_D	e	C_D
1	0.46	0.6 ~0.8	0.68	0.71	0.73
2	0.58	0.65 ~0.8	0.54	0.80	0.52
3	0.64	0.75	0.52	0.75	0.50
4	0.76	0.85	0.52	0.80	0.50
5	0.75	—	—	—	—
6	0.57	0.60	0.57	0.70	0.38
7	0.76	0.8 ~0.9	0.93	0.80	0.69

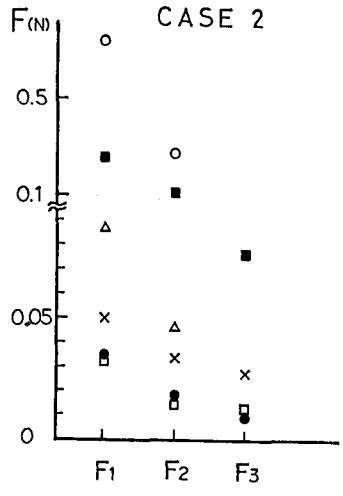
表－2　C_D-eの関係



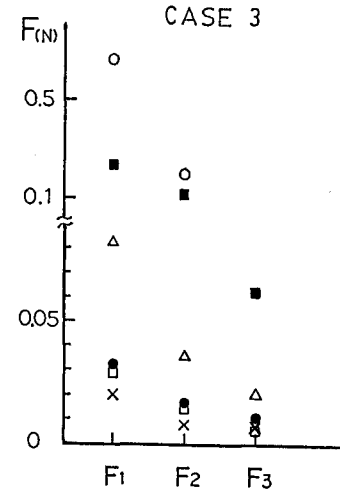
図－7　$h/d-z/h$の関係（静水中）

5. 衝撃力

衝撃力を運動方程式に代入することで求めた図を8,9に示す。縦軸に衝撃力F（単位：N）を横軸に衝突回数を取っている。両者の比較は、ほぼ同じであるが、粒子№7においてCASE 3がきわだって低い値となっている前述したが、跳躍高さは静水中より高く分布しているにかかわらず衝撃力は低いことになっている。つまり揚力が強く働らいていることがわかる。ここで、運動量を考えて(3)、(4)式から



図－8　衝撃力（静水中）



図－9　衝撃力（流水中）

$$M=(1+e)\sqrt{1-Exp(-2H)}\ mw_f \qquad (13)$$

となる。ここに、M：運動量〔単位：N・S〕、m：礫の水中重量である。衝撃力の算出において、その作用時間が問題となるので、(13)式で表わすにとどめる。

6. おわりに

本研究において、水中における礫の挙動として跳躍高さの関係から衝撃力について検討した。しかし、床面近傍における挙動については、抗力係数と付加質量係数について考える必要がある。また、粒子の回転運動を考えて跳躍運動をさらに明確にして行くことで衝撃力の算出は確かなものとなるので、今後、更に研究を進めて行くつもりである。

なお、実験およびその解析については、学生中谷哲也君に手伝ってもらいました。ここに記して感謝します。

参考文献

1）水山：砂防ダムに対する土石流衝撃力算定とその問題点、新砂防、112（S54）
2）石橋・磯部：砂礫の流下による水路床の損傷について、第23回年講（S43）
3）土屋・渡戸・青山：水流による砂れきのSaltationの機構(1)、京大防災研年報第12号B（S44）
4）土木学会：水理公式集