

掃流現象のエネルギー的考察
Bed Load Mechanism from the aspect of Energy Balance

早稲田大学 大学院 学生員 関 根 正 人
早稲田大学理工学部 正 員 吉 川 秀 夫
早稲田大学理工学部 学生員 片 山 浩 志
早稲田大学理工学部 学生員 加 藤 大 典

1. はじめに
掃流砂の流送機構は、移動粒子の河床構成材料との不規則な衝突現象のために、かなり複雑なものとなっている。そのため、個々の粒子の運動を把握するためには流れとの関連の力学方程式だけでは不十分であり、その衝突現象を何らかの形で評価する必要がある。こうした観点から、衝突現象を確率論的手法を用いてモデル化し、これと力学方程式とからなるシミュレーション・モデルを提案した。¹⁾²⁾ 本論では、このうち別論文で提案した三次元のシミュレーション・モデルに対する種々の検討を加えるとともに、流送機構に関する諸特性について考察する。また、掃流現象をエネルギーのバランスという面から捉え、現象を解明する一助とする。

2. 三次元シミュレーション・モデルの検討

2-1 概 要

先に現象を二次元的に取り扱う簡易モデルを提案し、これにより流送機構の諸特性についての検討を試みた。しかし、これは、あくまでも現象を二次元的に捉えたにすぎず、流れを横断する方向の運動を無視しており、また、抗力係数 C_D および衝突モデルに関して厳密な意味で現象に忠実であるとは言いきれない。そこで、新たに、現象をより忠実にかつ三次元的に捉えるモデルを考えた。モデルの詳細は別論文²⁾に譲ることにし、ここでは簡単にその概要を示すに留める。

(1)前提条件：モデル化に当たっての仮定を以下に列記する。①河床は定常・平衡・平坦で、河床材料が密に敷き並べられている。②粒子としては簡単のために球を用いる。③モデルで取り扱う粒子の移動距離は原則としてEinsteinの粒径の100倍とする。④移動状態にある粒子同士の衝突はなく、衝突により河床粒子が変位することもない。⑤流れは主流方向のみを考え、鉛直方向の速度分布 $u(z)$ は対数分布則に従う。⑥外力としては重力と抗力のみを考え、揚力や河床材料との接触抵抗などは前者に比べて無視できる。

(2)基礎方程式：流れ方向に x 軸、流れの横断方向に y 軸、鉛直方向に z 軸をとり、上記の仮定の基に、三方向の運動方程式を立てると、式(1)のようになる。

$$m_1 \frac{d^2x}{dt^2} = D_x \quad , \quad m_1 \frac{d^2y}{dt^2} = -D_y \quad , \quad m_1 \frac{d^2z}{dt^2} = -D_z - m_2 g \quad \cdots \cdots (1)$$

ここに、 $m_1 = (\pi d^3/6) \cdot \rho_f \cdot (\sigma_s + 0.5)$ 、 $m_2 = (\pi d^3/6) \cdot \rho_f \cdot (\sigma_s - 1)$ である（ただし、 d ：粒径、 ρ_f ：水の密度、 σ_s ：粒子の比重）。また、 D_x, D_y, D_z は抗力ベクトルの各方向成分

$$\vec{D} = \frac{1}{2} \rho_f C_D A |\vec{V}| \cdot \vec{V} \quad \vec{V} = \left(u - \frac{dx}{dt} , \frac{dy}{dt} , \frac{dz}{dt} \right) \quad \cdots \cdots (2)$$

であり、抗力係数 C_D は、 $|\vec{V}|$ と d を用いた粒子レイノルズ数との関係から、運動中の微小時間毎に決定する。

(3)衝突モデル：河床構成材料である粒子の球面を $\phi = \text{一定}$ 、 $\psi = \text{一定}$ の曲線で分割し、その球面を移動粒子の最終落下角度 $(\theta_{xy}, \theta_{xz})$ に応じて投影した図（たとえば、 $\theta_{xy} = 0^\circ$ 、 $\theta_{xy} = 25^\circ$ に対する投影図を図1に示す）中に衝突可能な区域内の各区画の面積比率が (ϕ, ψ) の出現率に等しいと考える。そこで、任意の $(\theta_{xy}, \theta_{xz})$ に対して、乱数を用い、出現率に応じて (ϕ, ψ) を決定する。なお、 θ_{xy}, θ_{xz} および ϕ, ψ の取り方を図2に示す。また、この図からもわかるように反発面は三次元的となり、衝突前後の扱いが複雑になるこ

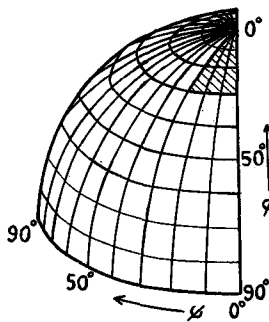


図 1. 河床球面の分割

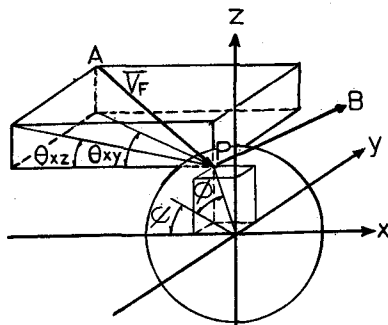


図 2. 衝突機構説明図

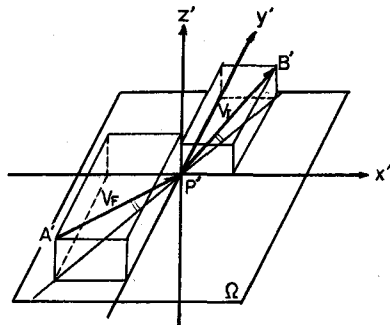


図 3. 反発面の变换

とから、座標変換を行ない、衝突点Pを図3上の点P'に移した新しい座標系で反発を考えた後に、逆変換を施すことにする。

2-2 反発係数eの評価

本モデルでは、反発係数eとして、衝突された河床粒子が動かない場合の値をとることにしたが、この値は、河床粒子の詰まり具合や衝突の仕方により変化する確率量であると考えられる。前報¹⁾²⁾では、このeの値としてその平均値を用い、特に分布をもたせることはしなかった。しかし、実際には、衝突の瞬間毎に河床状態や衝突位置が異なり、また、河床粒子自身の変位も予想されることから、実現像との適合という意味で、eに分布をもたせることが望ましいと言えよう。本論では、反発係数が、実測により得られた平均値 $\bar{e} = 0.7$ のまわりに正規分布をすると仮定し、各衝突毎に乱数を用いてeの値を決めることにした。このようにして行なったシミュレーション結果と、e=一定とした場合の比較については、2-4節で行なうが、比較の対象とするのは(1)e=0.7(一定)とした場合、(2) $\bar{e} = 0.7$ 、 $q_e = 0.1$ (q_e : eの分散)とした場合、(3) $\bar{e} = 0.7$ 、 $q_e = 0.05$ とした場合の3ケースである。

2-3 相当粗度ksの評価

本節では、掃流現象をエネルギーの観点から捉え、移動粒子の存在の有無による流れへの影響について考え、これによりksの値を知ることを目的とする。

流水と流砂とを合わせた一つの系に対し、この系が失なうエネルギーを考えると、定常状態では、①流水が底面せん断力の形で失なうエネルギー、②移動粒子が河床との衝突などにより失なうエネルギーの2つが考えられる。この両者をエネルギー勾配の形に直し、 I_o, I_{co} と表わすことにする。流量および水深を一定とした時に、移動粒子がある場合とない場合を比較すると、外的にはエネルギー勾配の変化(I_{co} の分)が現われるのに対し、内的には相当粗度ksの変化が生じると考えられる。このことから、次式が成り立つ。

$$I_{co} = \frac{\bar{u}^2}{gh} \left[\left(Ar - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{ks + d_{ks}} \right)^{-2} - \left(Ar - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{ks} \right)^{-2} \right] \dots\dots\dots (3)$$

ここに、 $\bar{u}$ は平均流速、hは水深、gは重力加速度、 κ はカルマン定数、Arは定数(=8.5)である。なお、カルマン定数 κ は、本研究の範囲内ではほとんど変化せず、0.4と考えてさしつかえない。

一方、移動粒子が河床との衝突により失なうエネルギーから、エネルギー勾配 I'_{co} を導くと

$$I'_{co} = \frac{Ps \cdot N_b \cdot t^* \cdot (\rho_s - \rho_f)}{\rho' \cdot g \cdot h} \cdot \frac{1}{L} \sum_{j=1}^n (U_{sfj}^2 - U_{s1j}^2) \dots\dots\dots (4)$$

のようになる。ここに、Psは単位時間当りの粒子離脱率、 N_b は河床単位面積上に存在する粒子体積、 t^* は掃流砂の定常化に要する時間、 ρ_s, ρ_f および ρ' は粒子、水および粒子を含んだ流水の各々の密度、nは移動距離Lの間での衝突回数、 U_{sfj}, U_{s1j} はj番目の衝突の前後の移動速度である。

以上より、 $I_{co} = I_{co}$ とすれば、式(3)および(4)から次式が得られる。

$$k_s + \Delta k_s = h \cdot \exp \left\{ -\kappa \left\{ \frac{\alpha \bar{u}^2}{\bar{u}^2 + \alpha^2 \eta \cdot n^*} - \left(Ar - \frac{1}{\kappa} \right) \right\} \right\} \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$\alpha = Ar - \frac{1}{\kappa} + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{h}{k_s}, \quad n^* = P_s \cdot N_B \cdot \frac{\rho_s - \rho_l}{\rho_l} \cdot (1 \text{秒}) \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\eta = \frac{t^*}{L \cdot (1 \text{秒})} \sum_{j=1}^n (U_{SFj}^2 - U_{SIj}^2) \approx \frac{1}{\bar{u}_s \cdot (1 \text{秒})} \sum_{j=1}^n (U_{SFj}^2 - U_{SIj}^2)$$

である。従って、任意の底面せん断力 τ_0 をもつ流れに対し、それぞれの場合について $\bar{u}$ および h が一定であると仮定すれば、後述する式(11)により与えられる粒子の断面平均移動速度 $\bar{u}_s \times (1 \text{秒})$ に相当する距離だけ移動する間の η をシミュレーションにより求め、これを(6)に代入して得られた $k_s + \Delta k_s$ と、シミュレーションの条件として与える値とが等しくなるまで逐次近似を行なえば、相当粗度 $k_s + \Delta k_s$ を求めることができる。粒径あるいは比重が異なる場合について、上記の方法で求めた相当粗度を k_s と書き直して τ_* との関係で図示したのが図4である。図中の縦軸は k_s を粒径 d と粒子の水中比重 $s (= \rho_s / \rho_l - 1)$ で除して無次元したものであり、このように整理することにより、 d あるいは s が異なる粒子に対しても同一の扱いが可能であることがわかる。この図より、 τ_0 ＝一定の下では、 d あるいは s が小さいほど τ_* は大きくなり、その結果、 k_s 自身も大きくなることからわかる。これは、粒径あるいは比重の小さな粒子の場合、移動する単位距離当り、粒子1個当りの衝突によるエネルギー逸散は多少小さくなるものの、移動粒子数の増大の仕方の方が顕著であるため、エネルギー逸散の総和は増大し、それが k_s の増加となって現われるものと考えられる。

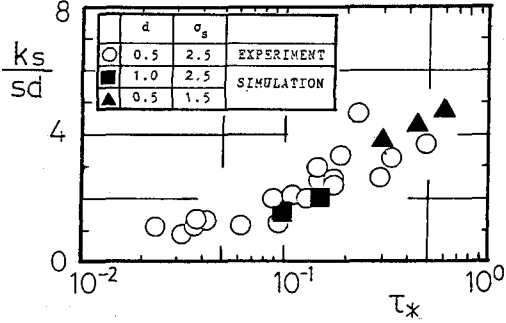


図4. 相当粗度 k_s

2-4 流送機構に関する諸特性の検討

本節では、別論文で検討できなかった「粒径 d の異なる場合」「比重 s_g が異なる場合、「反発係数 e が分布をもつ場合」についての考察を試みる。一例として検討を行なった各ケースの条件を表1に示す。

表1. シミュレーションの条件

CASE	d	s_g	u_{*0}	τ_*	e
A-1	0.5	2.5	12.1	0.20	(1)
A-2	0.5	2.5	14.9	0.30	(1)
A-3	0.5	2.5	14.9	0.30	(2)
A-4	0.5	2.5	14.9	0.30	(3)
B-1	1.0	2.5	12.1	0.10	(1)
B-2	1.0	2.5	14.9	0.15	(1)
C-1	0.5	1.5	8.57	0.30	(1)
C-2	0.5	1.5	12.1	0.60	(1)

(1) 存在確率密度 $f(z)$ の検討

条件が異なった場合の $f(z)$ の比較としては、掃流力(あるいは摩擦速度 u_{*0})の等しい流れを対象とする。これは、前報のように τ_* で整理した場合には、 d あるいは s_g が小さいほど掃流力の小さい流れを考えていることになり、必ずしも意味のある比較とは言えないからである。

u_{*0} ＝一定として、 d 、 s_g および e の変化が $f(z)$ に及ぼす影響を調べたのが図5である。(a)には d あるいは s_g が異なる場合を、(b)では e が変化する場合をそれぞれ示した。図より、 u_{*0} ＝一定の下では、粒径あるいは比重によらずほぼ同一の分布をすることがわかる。また、 e に分布をもたせた場合には、各跳躍毎に異なった跳躍高さを示すものの、平均的には e ＝一定とした場合とほぼ同一の結果となることがわかった。な

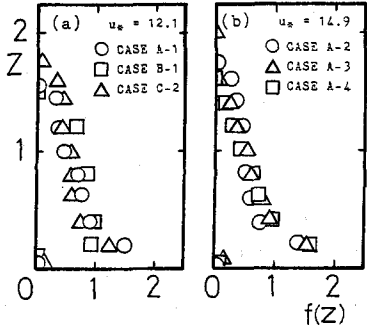


図5. 存在確率密度分布 $f(z)$

お、図の z の原点は流速分布の原点（河床粒子頂から $0.2d$ 下）より $0.5d$ 上にとっている。

(2) 最高跳躍高さ h_B の検討

各ケースについての最高跳躍高さ h_B を無次元掃流力 τ_* との関係で整理したのが図 6 である。図の縦軸は、 h_B を $\sqrt{s d}$ で除して無次元化したもので、こうすることにより、粒径あるいは比重が異なる粒子に対しても、ほぼ同一の扱いが可能であることがわかる。また、図中のプロットがほぼ直線の関係にあることから、 h_B は、概略

$$h_B \propto d^{1/3} s^{-1/6} u_*^{4/3} \dots\dots\dots (7)$$

のように表わせる。このことから、 u_* = 一定の下では、粒径あるいは σ_s のわずかな変化に対しては h_B はあまり変化しないものの、粒径が大きいほど、比重が小さいほど h_B が大きくなる傾向があることがわかる。

(3) 濃度分布 $C(z)$ の検討

掃流砂の濃度分布を考える場合、通常は移動状態にある粒子のみを対象とするが、筆者らは静止状態で存在する粒子をも含めて、各高さに存在する全粒子に対して濃度（粒子の存在濃度）を考慮することにした。これは、移動状態の粒子のみを考えた場合、現象を河床から上方への分散と見る立場からすると、河床上面で濃度が不連続となってしまう、不都合が生じるからである。そこで、河床付近ほど静止状態の粒子が多いことを考慮して、実験結果から、濃度分布を次式のように表現した。

$$\frac{C(z)}{C_0} = \left(1 - \frac{z}{h_B}\right)^{\frac{w_0}{120}} \dots\dots\dots (8)$$

ここに、 w_0 は沈降速度であり、このとき拡散係数は

$$\epsilon = 12.0 h_B (1 - z/h_B) \dots\dots\dots (9)$$

のように直線分布となる。本節では、粒径あるいは比重が異なる場合について式(8)の適合性の検討を行なう。シミュレーションの結果から得られた濃度分布を図 7 の(a)(b)(c)に示す。図より、 z が $h_B/2$ よりも大きい点では式(8)とプロットとが比較的良好に一致することがわかる。これより、粒径あるいは比重が異なる粒子に対しても、式(8)による同一の扱いが可能であることがわかる。なお粒子の移動速度分布を求める際には、濃度分布をこのように仮定したことを考慮する必要がある。

(4) 粒子の移動速度分布 $u_s(z)$ および断面平均移動速度 U_s の検討

粒子の移動速度分布 $u_s(z)$ は、流速 $u(z)$ と密接な関係があり、各高さである分布をもつものの、その平均値はほぼ次式で表わせることを示した。

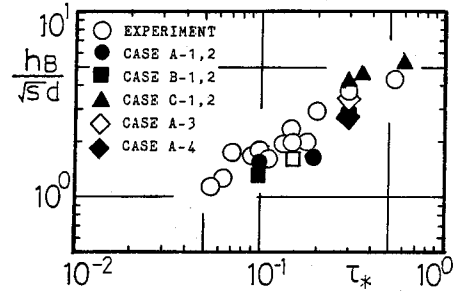


図 6. 最高跳躍高さ h_B

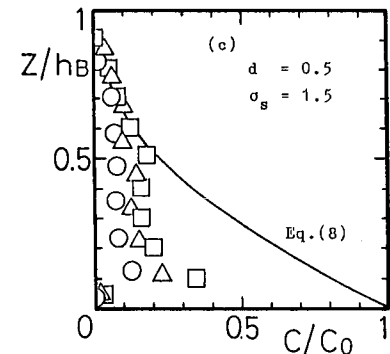
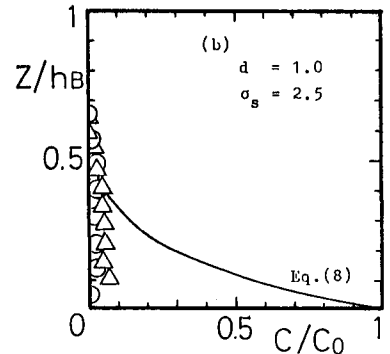
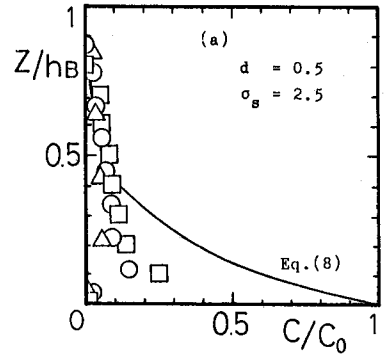


図 7. 濃度分布 $C(z)$

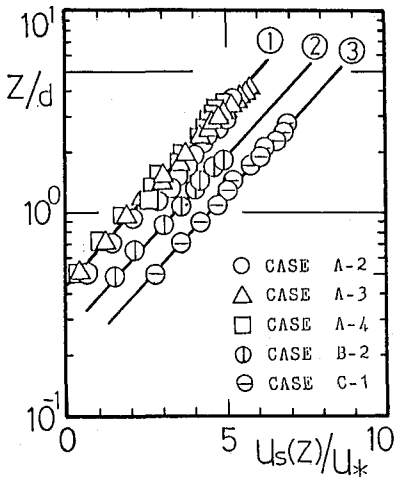


図 8. 粒子の移動速度分布 $u_s(z)$

$$\frac{u_s(z)}{u_*} = 6.1 + 5.75 \log \left(\frac{z}{k_s} \right) \quad \dots\dots\dots (10)$$

これは、粒径 5 mm、比重 2.5 のケースについて得られた関係であるが、粒径あるいは比重が異なる場合について上式の適合性を見たのが図 8 である。図中の①は e が変化する場合、②は d で異なる場合、③は σ_s が異なる場合について式 (10) との比較を行なったものである。図より、各ケースによって相当粗度 k_s に違いがあるものの、いずれの場合も式 (10) が成り立っていることがわかる。なお、図の z の原点は流速の原点と等しくとっている。

また、断面平均移動速度については図 9 のようになり、いずれの場合もほぼ次式を満たしている。

$$\frac{\bar{u}_s}{\sqrt{s g d}} = 6.86 \tau_*^{0.766} \quad \dots\dots\dots (11)$$

3. 非定常状態のエネルギー・バランス

粒子が、水路上流端あるいは固定床と移動床の境付近の河床に静止した状態から、河床を離脱・流送されて定常なエネルギーをもつようになるまでの過程を、エネルギーのバランスという観点から把える。概念図を図 10 に示し、この過程が図の断面 I から II の間で生じるものとする。断面 I で河床を基準とするエネルギー E_w をもつ流水は、この間で内的消費として E_{in} だけのエネルギーを粒子に与えるほか、河床に沿って流下することによるポテンシャル・エネルギー ϕ_w は、底面せん断力等の形で河床に仕事 W_r をすることにより系外へ逸散される。一方、粒子については、断面 I でもっているポテンシャル・エネルギー ϕ が断面 II でもつ定常的なエネルギー E_s に変わる際には、河床粒子との衝突によるエネルギー消費 W_{co} と流水によるエネルギーの内的供給 E_{in} を伴うと考えられる。以上より両断面間のエネルギーの釣り合いを水頭の形で表わすと、

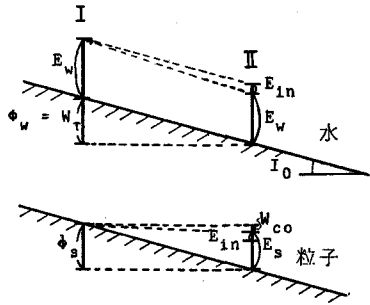


図 10. 概念図

$$H\phi_w + H\phi_s + H_{E_{in}} - H_{E_s} = h_1 w_r + h_1 w_{co} \quad \dots\dots\dots (12)$$

となる。これを書き直すと次式のようになる。

$$\frac{\rho_s - \rho_t}{\rho'} \frac{Q_B}{Q} (I_o - I_{e_o}) L r + H_{E_{in}} - \frac{\rho_s - \rho_t}{\rho'} \frac{Q_B}{Q} \left[\bar{h}_s + \frac{\alpha' \bar{u}_s}{2g} \right] = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

これより、定常状態に達するまでに必要な距離 Lr は、

$$L_r = \frac{\left[\overline{h_s} + \frac{\alpha' \overline{u_s^2}}{2g} \right] - \beta H_{E1s}}{I_o + I_{eo}} \quad \dots\dots\dots 04$$

となる。ここに、 $\overline{h_s}$ は存在確率を考慮した粒子の平均移動高さであり、 α' および β は係数である。エネルギーの内的消費分 H_{E1s} は系外には現われないため、これを見積ることは困難である。そこで、式04から L_r を求めるに当っては、粒子は流れを通じて最終的にはその運動エネルギー分だけのエネルギー供給を受けると考えた。すなわち、 $\beta H_{E1s} = \alpha' \overline{u_s^2} / 2g$ とする。こうして実測結果を基に式04から L_r を算出すると、図11のようになる。図のケース(1)では河床との衝突によるエネルギー逸散を無視しており、これを考慮したのがケース(2)である。式04中の I_{eo} は2-3節で考えた値を用いたが、移動初期においてはこれよりも小さな値となるため、実現象は、この2つのケースの間にあると考えられる。

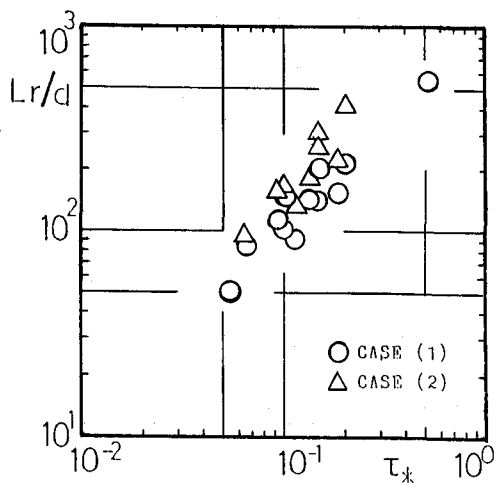


図11. L_r/d と τ_* の関係

4. 結 語

本論では、別論文²⁾で提案した三次元のシミュレーション・モデルに対する検討を加えるとともに、掃流砂の流送機構に関する諸特性について調べた。以下に成果を列挙する。

(1)反発係数 e に分布をもたせた場合には、各跳躍毎に異なる挙動を示すものの、平均的には、これを一定とした場合と同様の結果となった。

(2)相当粗度 k_s は、粒子が河床と衝突することにより逸散するエネルギーとの関係で定まり、本研究のようなカルマン定数 κ の変化が無視し得る場合には、式(5)を用いて逐次計算を行なうことにより図4のように求まった。

(3)最高跳躍高さ h_b と粒径 d および σ_s との関係を明らかにし、図6に示した。

(4)存在確率密度 $f(z)$ 、濃度分布 $C(z)$ 、粒子の移動速度分布 $u_s(z)$ 、断面平均移動速度 $\overline{u_s}$ については、粒径、比重および反発係数が変化した場合にも同様の扱いが可能であることを示した。

また、静止状態の粒子が定常な運動状態に達するまでの距離 L_r の概略値を明らかにした。

参 考 文 献

- 1)藤堂・関根・吉川；土砂の掃流機構に関する基礎的研究、第27回水理講演会論文集 1983
- 2)関根・吉川；掃流砂の流送機構に関する研究、土木学会論文集（投稿中） 1983