

浮遊砂の基準面濃度の推定について

On Reference Concentration of Suspended Sediment Load

京都大学工学部	正員	中川博次
京都大学工学部	正員	辻本哲郎
京都大学工学部	正員	村上正吾
京都大学大学院	学生員	小藪仁

1. まえがき

一般に流砂を扱う際、その運動形態から掃流砂と浮遊砂に分け、それぞれを全く異なるモデルで扱っている。掃流砂のみ、あるいは浮遊砂のみが存在しているような場合にはこうした取り扱いが適当であろうが、掃流形式と浮遊形式が同時に存在する場合、両者の遷移機構や、中間的な運動形式をとるものの流砂量推定法を明らかにしておく必要がある。著者らはこの点に鑑み、系統的な研究を進めているが、その一環として今回、先に行ったsaltation確率過程論的解析とそれにもとづくシミュレーションの結果¹⁾を利用して、いわゆる浮遊砂の基準面濃度を推定する方法を新たに提案し、それにもとづく若干の議論をまとめたので、ここに報告することにする。

2. 浮遊砂の基準面濃度に関する従来研究

浮遊砂量の推定は浮遊砂の濃度分布と流速分布の積の水深に亘る積分によって行われるが、濃度分布は拡散理論²⁾や確率過程モデル³⁾によって相対濃度が与えられるだけで、そのスケーリングファクターと言うべき基準面濃度を別途与えなければその絶対量を知ることができない。すなわち基準面濃度を与える高さとその位置の濃度を与えるモデルが必要となる。これについて従来、①掃流砂濃度と接続させる方法、②河床近傍からの浮遊粒子の上昇フラックスを評価しこれを沈降速度で下降するフラックスと均衡させる方法の2型に分類できるモデルが提案されている。①の型式の最初のもは、Einstein⁴⁾によるもので、掃流層を考えその上限で掃流砂濃度を浮遊砂濃度と接続するものである。彼は掃流層厚を粒径の2倍とし、また掃流砂濃度は自身の掃流砂関数から与えられるものとした。最近のsaltation運動の解析^{5,6)}や観察によると掃流層厚に関連するであろうsaltation高さが掃流力の関数となることから、Kennedyら⁷⁾は掃流層厚に若干の修正を加えたモデルを提案している。この種のモデルでは基準面高さは粒径のせいぜい数倍程度で、相対水深の大きい場合、基準面濃度を与える相対高さ($\eta_a \equiv a/h$; a : 基準面高さ, h : 水深)はかなり小さくなる。例えばRouse式²⁾を浮遊砂濃度分布式として用いると高さのわずかな誤差が濃度に大きな誤差を産むことがわかり、この点がこの種のモデルの最大の短所となる。また、掃流砂の鉛直方向存在確率密度分布に関する研究^{1),8)}からみると、掃流砂濃度も一様でなく上述のように決定された基準面高さで、平均値としての掃流砂濃度がどのような物理的意味をもつかが相当曖昧である。

一方、②の型式はLane-Kalinske⁹⁾によって提案され、芦田・道上¹⁰⁾によって発展させられた。その基本的枠組は次の通りである。基準面における浮遊砂の下向きフラックスは基準面濃度を C_a 、沈降速度を w 。とするとそれらの積で表わされ、一方上向きフラックスは単位時間当りに浮遊状態にはいる確率を考えて、

$$(p_e N_e / t_{EX}) \cdot A_3 d^3 \quad (1)$$

と書ける。ここに、 p_e : 砂粒子が浮遊状態にはいる絶対確率、 N_e : 単位面積当り浮遊砂となるかどうか選別を受ける対象となる砂粒数、 t_{EX} : 浮遊砂に遷移するのに要する時間(いわゆるexchange timeに相当⁴⁾)である。すなわち p_e / t_{EX} はいわゆるpick-up rateに相当している。こうした考えから、

$$C_a = (p_e N_e / \bar{w} t_{EX}) \cdot A_3 d^3 \quad (2)$$

として基準面濃度を得ている。 p_e としては水流の乱れの鉛直方向成分が w_e を超す確率、 N_e はたとえば河床に露出している砂粒個数、 t_{EX} は w_e と d などから作られる時間スケールとして C_a が推定されている。このフレームワークからわかるように、この種のモデルでは具体的に基準面高さを確定する仕組みには何ら触れていない

ので、仮に p_o, N_o, t_{EX} についてより具体的に砂粒の運動機構にもとづいた議論がなされても、¹¹⁾ 結局は最後に全体的な実験定数を持ち込まねばならないことになる。すなわち上向きフラックスが式(1)で与えられる高さを特定できないことがこの種のモデルの弱点と言えよう。但し、底面付近における具体的な砂粒運動機構（たとえば saltation の機構）や底面近傍の乱れ特性（たとえば bursting）などの関連で、浮遊砂への遷移機構を検討する^{11), 12)} 上で、型式①にない可能性を秘めていると思われる。

3. 掃流砂濃度分布

一般に掃流砂は、転動、滑動、小跳躍（saltation）によって河床と間断ない接触を保ちながら輸送されるもので、一方浮遊砂は流れの内部にとり込まれてほとんど河床とは接触しないで運搬される。ここではとくに掃流砂と浮遊砂の遷移に着目して検討を進めるので、掃流砂運動はすべて saltation 運動で代表されるものとする。そしていわゆる不規則な successive saltation を呈しているものとする。この場合砂粒運動の不規則性は主として床面との反発事象のそれに起因している。すなわち、一つ一つの saltation 軌跡はほとんど乱れによるゆらぎは受けない。逆に乱れによって saltation 軌跡が歪められるものを浮遊砂と定義するのが適当と考えられる。

著者らは先に、saltation の運動方程式を saltation 特性量の分布間の関係を支配するものと理解し、床面での砂粒の不規則な反発事象をモデル化することにより、successive saltation のシミュレーションを行って掃流現象の理解を深めた¹⁾。すなわち、このシミュレーションにより、個々の saltation 特性量の分布のみならず、successive saltation の特性量（step length, moving period など）の分布、さらに掃流砂の鉛直方向存在確率密度分布の掃流力の変化に対する変化を明らかにした。もちろんこのモデルにより掃流砂量式も誘導されるが、このような現象の最小限の構成要素（砂粒）に着目した解析では巨視的な量（たとえば平均流砂量）の推定に誤差を産み易いので、ここではシミュレーションで得られた結果の一部と、より巨視的な立場で得られた従来の流砂量公式を併用して（誤差の累積を避ける）議論を進めることとする。

さて、シミュレーションで得られる掃流砂の鉛直方向存在確率密度は次式によって掃流砂濃度と関連づけられる。

$$C_B(y) = \nu_g A_3 d^3 f_B(y) \quad (3)$$

ここで、 C_B ：掃流砂濃度、 ν_g ：単位面積当たり掃流されている砂粒数、 $f_B(y)$ ：掃流砂れきの鉛直方向存在率密度である。 ν_g は著者らが先に導いた推定式により与えられる pick-up rate と、シミュレーションで求められる平均 moving period の積で与えられるが、シミュレーションモデルが必ずしも完全でない現状では先述の理由により、次のように従来の流砂量式を用いるのが有利であろう。すなわち、

$$\nu_g A_3 d^3 = \{ (q_{B*} / \phi_*) / \sqrt{\tau_*} \} d \quad (4)$$

であり、

$$q_{B*} \equiv q_B / \sqrt{(\sigma / \rho - 1) g d^3}; \quad \phi_* \equiv \bar{u}_g / u_*; \quad \tau_* \equiv u_*^2 / \{ (\sigma / \rho - 1) g d \} \quad (5)$$

である。ここに、 q_B ：掃流砂量、 σ / ρ ：砂の比重、 $\bar{u}_g$ ：掃流砂れきの平均運動速度、 u_* ：摩擦速度である。掃流砂量式としてスイス公式を用い、 u_g を掃流砂れきの平均存在高さ $E[y]$ での流速で与えることにすると、

$$q_{B*} = 8(\tau_* - \tau_{*c})^{3/2} \quad (6)$$

$$\phi_* = (1/\kappa) \ln(30.1 \psi_* / X) \quad (7)$$

$$\psi_* \equiv E[y] / d + 0.5 \quad (8)$$

であり、ここに τ_{*c} ：無次元限界掃流力、 κ ：Kármán 定数、 $X \equiv k_s / d$ (k_s ：等価砂粗度)：砂粒 Reynolds 数の関数となる補正係数である。ここで ψ_* が irregular successive saltation のシミュレーションによって与えられ、図-1 にその結果を示している。この結果を近似する式として、

$$\psi_*(\tau_*) = \{ A_3 (q/\rho + C_M) / A_2 C_D \} \tau_*^{0.7} + 0.5 \quad (9)$$

を用いることとする。ここに A_2, A_3 ：砂の形状係数、 C_D ：抗力係数、 C_M ：付加質量係数である。

一方、シミュレーションで得られる掃流粒子の鉛直方向存在確率密度分布は次式で近似される（これは吉

川・山田⁸⁾が全く別の方法で導いたものと同形)。

$$f_*(\xi) = K(\xi)/K_0 \quad (10)$$

$$K_0 = \sqrt{2\pi} [\Phi(1/\alpha_y) - \Phi(-1/\alpha_y)] \quad (11)$$

$$K(\xi) = \exp\left\{-\frac{(\xi-1)^2}{2\alpha_y^2}\right\} + \exp\left\{-\frac{(\xi+1)^2}{2\alpha_y^2}\right\} \quad (12)$$

$$\Phi(r) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^r \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \quad (13)$$

ここで $f_*(\xi)$ は規準化された密度関数で, $\xi \equiv y/E[y]$, α_y : 掃流砂粒の存在高さの変動係数 (α_y の τ_* による変化はシミュレーションによると図-1の破線のように表われ, ほぼ0.65の値をとる)である。

$$f_*(\xi) d\xi = f_B(y) dy \quad (14)$$

を考慮することより, 掃流砂濃度は結局次式で与えられる。

$$C_B(y) = \frac{q_{B*}}{\phi_*} \frac{1}{\sqrt{\tau_*}} \frac{1}{\psi_*} \cdot f_*\left(\frac{1}{\psi_* d} \cdot y\right) \quad (15)$$

4. 掃流から浮遊への遷移

第2章の考察によると, 底面付近での上下方向浮遊砂フラックスを正当に評価する方が確かに砂粒運動との関連で検討し易い面があるが, それ以上に基準面高さの評価を含め上向きフラックスの合理的評価が難しい。そこで, ここでは前章で得られた掃流砂濃度分布と浮遊砂濃度分布をいかにつなぐか, すなわちEinstein型の検討を進めることとし, その最大の難点であった基準面高さが床面に近すぎること, 平均掃流砂濃度が意味を持たぬことなどを解消することに努める。

いま, y_B を掃流と浮遊の遷移の生じる界面とする。そこでの掃流砂濃度 $C_B(y_B)$ は式(15)で与えられる。これによって生じる浮遊砂濃度 $C(y|y_B)$ は,

$$C(y|y_B) = C_B(y_B) \cdot f_S(y|y_B) \quad (16)$$

と書ける。ここで $f_S(y|y_B)$ は, $y=y_B$ の位置に存在した粒子が乱れの影響を受けて y に存在している確率密度である。浮遊粒子の運動, すなわち乱れによる粒子位置の変位を離散的に表わすと, いわゆる確率過程モデルが組み立てられる。水流中の各高さにおける粒子の変位量の確率密度(遷移確率)が与えられると, 初期に y_B に存在する粒子の n ステップ後の位置についての確率密度が得られ³⁾, $f_S(y|y_B)$ は n についての条件を開放することによって得られる。この手法は数値シミュレーションに依るしかなく, また離散化する際, 適切な時間スケールを選ぶ必要があるがこれが相当難問となる。そこで便宜に, 確率過程モデルも拡散モデルも現状では効力に差がなく, 同じ結果を産むと考えてよいことから, これを利用することにする。すなわち, 拡散理論で与えられる濃度分布はあくまで相対濃度であり, 少なくとも形式的にはこれを用いて $f_S(y|y_B)$ を次のように $a=y_B$ とおいた形で表わされると推定される。Rouse式を用いると,

$$f_S(y|y_B) = \left[\frac{h-y}{y} \cdot \frac{y_B}{h-y_B} \right]^z \quad (17)$$

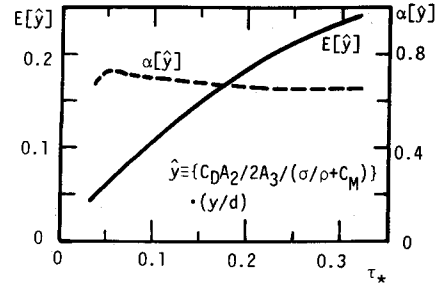


図-1 掃流粒子の平均存在高さと変動係数

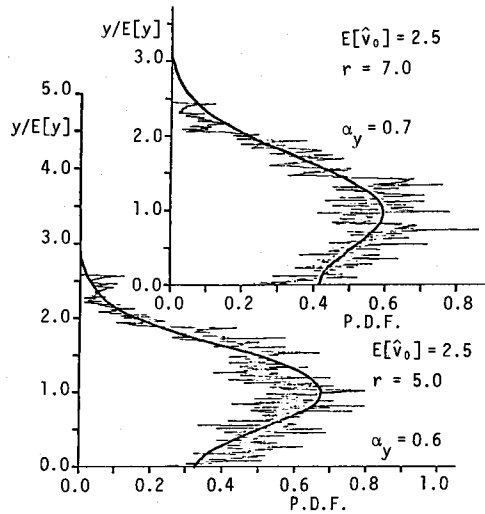


図-2 掃流粒子の存在確率密度分布

$$Z = w_o / \beta \kappa u_* \quad (\beta = 1.2) \quad (18)$$

である。ところで、全体のうち $y = y_B \sim y_B + dy_B$ の高さで掃流運動から離れ上述の乱れによる不規則運動すなわち浮遊砂に遷移するものの割合は、 $f_B(y_B)dy_B$ で与えられる。このことを考慮すると結局浮遊砂濃度分布は次のように書ける。

$$C(y) = \int_0^y \left[\frac{h-y}{y} \cdot \frac{y_B}{h-y_B} \right]^Z \cdot f_* \left(\frac{y_B}{\psi_* d} \right) \cdot \frac{1}{\psi_* d} \cdot C_B(y_B) dy_B \quad (19)$$

ここで $C_B(y_B)$ は式(15)で与えられる。上述の考え方では基準面は必ずしも必要でない。しかし便宜的に基準面を与えておくことと浮遊砂量の計算は容易となる。今 $y = a$ での基準面濃度を C_a とすると、式(15)を用いて次式のように基準面濃度が与えられ、種々の浮遊砂濃度分布式に利用できる。

$$C_a = \frac{q_{B*}}{\sqrt{\tau_*} \psi_*^2 \phi_*} \cdot \frac{1}{d} \int_0^a \left[\frac{h-a}{a} \cdot \frac{y_B}{h-y_B} \right]^Z \cdot \left\{ f_* \left(\frac{y_B}{\psi_* d} \right) \right\}^2 dy_B \quad (20)$$

5. 浮遊砂の基準面濃度、総流砂量など

前章で述べたように本モデルでは基準面は物理的には陽に出て来ず、便宜的に決めれば良いということになる。そこで従来より頻繁に用いられ、実測データも存在していることを考慮し、 $a = 0.05 h$ とすることにする。このとき、 $\eta \equiv y/h$ と無次元表示して、

$$C_a = \frac{q_{B*}}{\sqrt{\tau_*} \psi_*^2 \phi_*} \cdot \frac{h}{d} \int_0^1 \left[\frac{19\eta_B}{1-\eta_B} \right]^Z \left\{ f_* \left(\frac{\eta_B}{\psi_*} \cdot \frac{h}{d} \right) \right\}^2 dy_B \quad (21)$$

が得られ、 C_a は w_o/u_* 、 τ_* 、 h/d などによって変化することがわかる。

浮遊砂量は次式によって与えられる。

$$q_{S*} \equiv q_S / \sqrt{(a/\rho - 1)gd^3} = \sqrt{\tau_*} \frac{h}{d} \frac{C_a}{\kappa} \int_{\eta_{\min}}^1 \left(\frac{1-\eta}{19\eta} \right)^Z \ln \left(\frac{30.1\eta}{\chi} \cdot \frac{h}{d} \right) d\eta \quad (22)$$

ここに q_S は浮遊砂量、 $\eta_{\min}$ としては、流速の対数則の零点 $((\chi/30.1) \cdot (d/h))$ と掃流砂の平均存在高さ $(\psi_* \cdot (d/h))$ のうちの大きい方をとる。また式(22)と式(6)の和によって総流砂量 q_T が求められる。

$$q_{T*} \equiv q_T / \sqrt{(a/\rho - 1)gd^3} = q_{B*} + q_{S*} \quad (23)$$

以上のようにすべての流砂量が計算されることになり、総流砂量に対する浮遊砂量の割合等も容易に計算される。ところで、これらの計算に当って最も重要なことは、流砂によって流速や粒子速度を与えるいわゆる Kármán 定数（みかけの値）が変化することである。これについては日野¹³⁾や板倉ら¹¹⁾によって検討されているが、いずれも平均流砂濃度がパラメータとなっており、上記のシステムで計算しようとする試行錯誤法によらざるを得ない。これに対し、最近 Kennedy ら⁷⁾ が多くの実験データ、実河川データの回帰分析より得た式は掃流砂濃度をパラメータとしており、今回の計算に有利であり、これを利用することにする。Kennedy ら⁷⁾ の得た式を若干変形すると、次式が得られる。

$$\kappa = \kappa_o - 0.18 \log_{10} \left\{ 1 + \frac{60.6 q_{B*} (u_*/w_o)}{\tau_*^{3/2} \cdot (1/\kappa) \ln(11h/\chi d)} \right\} \quad (24)$$

以上で流砂量を検討するためのすべての式が与えられたことになり、次の要領で計算を行った。まず河床材料の粒径、比重を決める（パラメータ $\Xi \equiv (a/\rho - 1)gd^3/\nu^2$ ； ν ：水の動粘性係数）と、沈降速度 w_o 、限界摩擦速度 u_{*c} 、抗力係数 C_D 等が決定される。水理条件はエネルギー勾配 I を一定、または h/d を一定として摩擦速度 u_* を変える。無次元掃流力、砂粒 Reynolds 数を知り、掃流砂量、掃流砂濃度分布、Kármán 定数を

求める。また、これらより浮遊砂の拡散を表わすパラメータとなる Z が計算され、式(4)で基準面濃度が求められる。さらに、浮遊砂量、総流砂量、その比が計算される。以下に上述の計算結果を示す。

まず、図-3は基準面濃度 C_a と w_o/u_* の関係を示したものである。式(2)を見てわかるように C_a は w_o/u_* 、 τ_* 、 h/d の関数となっている。 w_o/u_* と τ_* は Ξ をパラメータとして関連づけられるので、 C_a と w_o/u_* の関係は Ξ 及び h/d (あるいは I)をパラメータとして変化する。図-3(a)は Ξ を一定として相対水深の効果をみたもの、(b)は I を一定として Ξ による変化をみたもの、(c)はやはり Ξ を一定として勾配を変化させたものである。なお(c)には従来より集められている実測データ及びLane-Kaliske⁹⁾、芦田・道上¹⁰⁾及び板倉・岸¹¹⁾による推定式をも併示している(板倉らの式には粒径による変化が表わされている)。

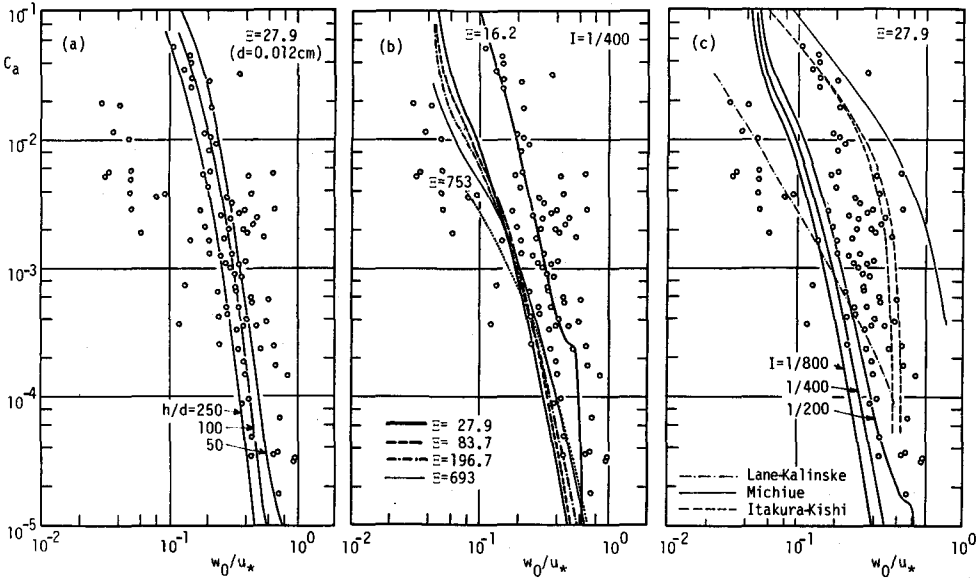


図-3 浮遊砂の基準面濃度 C_a と w_o/u_* の関係

図-3(c)を見るとここに提案したモデルの適用性は従来のものと同程度には有効であると言えそうだが、各パラメータの効果についてはより詳細に実測値との対応を検討しなければならない。また従来の実測値のばらつきは、粒径だけでなく、 h/d ＝一定で求められたものと、 I ＝一定で求められたものが混在しているためと想像される。いずれにせ

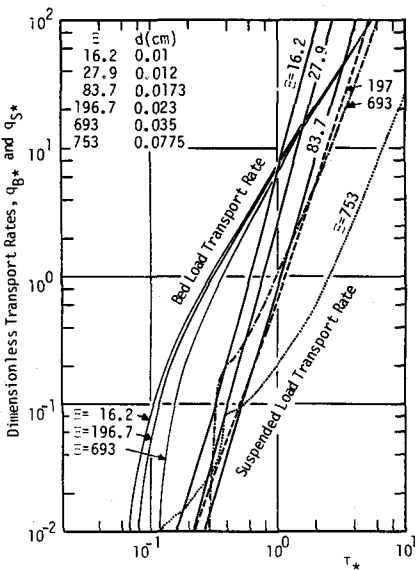


図-4 掃流砂量及び浮遊砂量

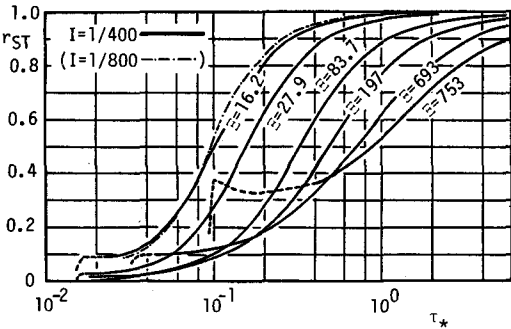


図-5 総流砂量に占める浮遊砂量の割合

よ今後の検討課題である。

次に図-4には掃流砂量及び浮遊砂量と無次元掃流力との関係が示されている。掃流砂量の河床材料による違いは無次元限界掃流力の違いのみであるのに対し、浮遊砂量と掃流力の関係は河床材料だけでなく、エネルギー勾配もしくは相対水深によっても異なる。この図より、総流砂量に占める掃流・浮遊砂量の割合がどのような掃流力の値で逆転するかを容易に知ることできる。図-5は総流砂量に占める浮遊砂量の割合($\tau_{ST} \equiv q_{ST}/q_{T*}$)が τ_* に対しどのように変化しているかを河床材料特性をパラメータに示したものである。この関係も勾配もしくは相対水深の値で変化することは言うまでもない。

6. あとがき

本論文では著者らが導いた掃流砂濃度分布をもとに浮遊砂量推定に不可欠の基準面濃度のより合理的な方法を示し、それにもとづく計算結果を示した。本文中にも述べたようにこの問題に関しては多くの研究がすでになされているが、いくつかの深刻な問題が解消されておらず、本研究ではその一部が解決されたにすぎず残された問題はなお多い。また本論文で大胆にも用いられたいくつかの仮説；①Kármán定数と掃流砂濃度との関係式，②浮遊への遷移の原点位置の条件付存在確率分布 $f_S(y|y_B)$ をRouse式を利用して簡単に与えたことなども再検討すべき項目である。さらに、一般には河床は平坦でなく河床波の影響が著しい。単に有効掃流力の概念のみで解決するはずもなく、掃流砂同様非平衡性の考慮も必要と思われる。今後これらの解明にも努めたいと考えている。

なお、本研究の遂行に当たり、文部省科学研究費・一般研究B(課題番号58460169, 研究代表者：中川博次, 「水流と流砂の相互作用に関する研究」)の補助を受けた。記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Tsujimoto, T. & H. Nakagawa : Stochastic Study on Successive Saltation by Flowing Water. Proc. 2nd International Symposium on River Sedimentation, Nanjing, China, 1983.
- 2) Rouse, H. : Modern Conceptions of the Mechanism of Turbulence. Trans. ASCE, Vol. 102, 1937.
- 3) Yalin, M. S. & B. G. Krishnappan : A Probabilistic Method for Determining the Distribution of Suspended Solids in Open Channels. Proc. International Symposium on River Mechanics, Bangkok, Thailand, Vol. 1, 1973.
- 4) Einstein, H. A. : The Bed-Load Function for Sediment Transportation in Open Channel Flows. Tech. Bull., USDA, Soil Conservation Service, No. 1052, 1950.
- 5) Hayashi, T. & S. Ozaki : On the Unit Step Length of Saltation of Sediment Particles in the Bed-Load Layer. Proc. 3rd ISSH, Tokyo, Japan, 1980.
- 6) Yalin, M. S. & B. G. Krishnappan : Stochastic Aspects of Saltation Paths of Cohesionless Sediment. Proc. 3rd ISSH, Tokyo, Japan, 1980.
- 7) Karim, M. F. & J. F. Kennedy : Computer-Based Predictions for Sediment Discharge and Friction Factor of Alluvial Streams. Proc. 2nd ISRS, Nanjing, China, 1983.
- 8) Kikkawa, H. & T. Yamada : Transport Rate of Bed Load Based on the Existence Probability of a Sand Particle. Proc. 3rd ISSH, Tokyo, Japan, 1980.
- 9) Lane, E. W. & A. A. Kalinske : Engineering Calculation of Suspended Sediment. Trans. AGU, Vol. 22, 1941.
- 10) 芦田・道上：浮遊砂に関する研究(1), 京大防災研年報, 第13号B, 1970.
- 11) Itakura, T. & T. Kishi : Open Channel flow with Suspended Sediments. Pproc. ASCE, Vol. 106, HY 8, 1980.
- 12) 芦田・岡部・藤田：粒子の浮遊限界と浮遊砂量に関する研究, 京大防災研年報, 第25号B-2, 1982.
- 13) 日野：固体粒子を浮遊した流れの乱流構造の変化, 土木学会論文集, 第92号, 1963.