

沈降性粒子の拡散係数に関する研究

Study on Diffusion Coefficient of Settling Particles

九州大学 工学部 正員 初井 和 朗

九州大学 工学部 正員 神野 健 二

九州大学 工学部 正員 上田 年比古

1. まえがき

乱流中における沈降性粒子の拡散に関して、たとえば沈でん池における粒子の沈降特性、貯水池における濁水の清澄化過程等、水工学の分野において数多くの研究が行われている¹⁾。これらは主に粒子濃度に関する拡散方程式を用いて解析を行うが、この場合式中の沈降性粒子の拡散係数の与え方が重要な問題となってくる。この粒子の拡散係数に関して、W.H.Snyder & J.L.Lumleyの風洞乱流中における沈降性粒子の変動速度の自己相関に関する実験的研究²⁾、および著者らの一様等方性乱流中における沈降性粒子の拡散係数の数値実験による検討³⁾等によれば、(i)粒子の径、密度の違いによる拡散係数の相違、(ii)沈降方向に垂直な方向(水平方向)と沈降の方向(鉛直方向)の拡散係数の相違に関する結論が得られている。さらに理論的解析では、G.T.Csanady⁴⁾、J.L.Lumley⁵⁾による大気乱流中における重い粒子の乱流拡散に関する研究があるが、かれらの解析では粒子はその移動位置における流体の変動速度に完全に追従していると仮定し、粒子の変動速度の自己相関を直接指数関数で与えて解析を行っている。したがって、粒子が乱流中を運動する場合常に存在すると考えられる粒子と流体との速度差による抵抗力の効果、粒子に作用する流体加速度の効果等の取り扱いが無視されていることになる。

本研究では、乱流中における粒子の運動方程式にもとづき沈降性粒子の変動速度の自己相関の理論解を求め、次いでG.I.Taylorの拡散理論より粒子の拡がり幅の自乗および拡散係数の解を導き、W.H.Snyder & J.L.Lumleyの実験結果と比較しその妥当性について検討を加えるものである。

2. 沈降性粒子の拡散係数の理論的解析

ここで取り扱う乱流場は定常であり、その乱れ強度は粒子の沈降速度と比較して小さいと仮定して、以下に沈降性粒子の拡がり幅の自乗および拡散係数等に関する理論的解析を行う。

2.1. 粒子・流体速度の相関およびスペクトルに関する方程式

乱流中における球形粒子の変動速度に関する運動方程式として、J.O.Hinze⁶⁾が提示した式を参考にし、次式を用いることにする：

$$d v_{p,j}(t)/dt = a[v_{f,j}(t) - v_{p,j}(t)] + b dv_{f,j}(t)/dt \quad (1)$$

ここに、係数 $a = 18\nu / [(\rho_p/\rho_f + 1/2)d^2]$, $b = (3/2)/(\rho_p/\rho_f + 1/2)$ である。上式において、添字 j は、 $j=1, 2$ を水平面内の直交軸、 $j=3$ を鉛直下向きを+とする座標軸とする。また、 $v_{p,j}$: 粒子の変動速度、 $v_{f,j}$: 粒子の移動位置における流体の変動速度、 t : 時間、 ρ_p : 粒子密度、 ρ_f : 流体密度、 d : 粒径、 ν : 動粘性係数である。なお、式(1)に含まれる粒子と流体の速度差である相対速度によって生ずる抵抗の項には、この相対速度にもとづく Reynolds 数は小さいとして Stokes 則を用いている。

定常乱流場においてずらし時間を τ とすると、式(1)の時刻 $t' = t - \tau$ における式に $v_{f,j}(t)$ を乗じて ensemble 平均をとる、また式(1)の時刻 $t' = t + \tau$ における式に $v_{p,j}(t)$ を乗じて ensemble 平均をとり、定常性から $R_{pf,j}(\tau) = R_{fp,j}(-\tau)$ の関係を用いてこれら2つの式を整理すれば次に示す粒子および流体の変動速度の相関に関する方程式を得る：

$$\left. \begin{aligned} -\partial R_{pf,j}(\tau)/\partial \tau &= a[R_{ff,j}(\tau) - R_{pf,j}(\tau)] - b \partial R_{ff,j}(\tau)/\partial \tau \\ \partial R_{pp,j}(\tau)/\partial \tau &= a[R_{pf,j}(\tau) - R_{pp,j}(\tau)] + b \partial R_{pf,j}(\tau)/\partial \tau \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

ここに、

$$\begin{aligned} R_{Pf,j}(\tau) &= \overline{v_{P,j}(t) v_{f,j}(t+\tau)}, \\ R_{ff,j}(\tau) &= \overline{v_{f,j}(t) v_{f,j}(t+\tau)}, \\ R_{PP,j}(\tau) &= \overline{v_{P,j}(t) v_{P,j}(t+\tau)} \quad (\text{ただし、} j \text{ についての和をとらない}) \end{aligned}$$

であり、上付きバーはensemble平均を示す。とくに、 $R_{ff,j}(\tau)$ は粒子の移動位置における流体の変動速度の相関関数、および $R_{PP,j}(\tau)$ は粒子の変動速度の自己相関関数である。なお、上式(2)の詳細な誘導は文献3)に示している。

いま、相関関数のFourier変換を次のように定義しよう：

$$\begin{aligned} S_{PP,j}(n) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_{PP,j}(\tau) \text{Exp}(i2\pi n\tau) d\tau \\ R_{PP,j}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} S_{PP,j}(n) \text{Exp}(-i2\pi n\tau) dn \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 i ：虚数単位、 n ：周波数であり、また相関 R_{PP} のFourier変換である S_{PP} は粒子速度のスペクトル密度関数である。式(2)を、式(3)の定義にしたがってFourier変換すると次式を得る：

$$\begin{aligned} -i2\pi n S_{Pf,j}(n) &= a[S_{ff,j}(n) - S_{Pf,j}(n)] - i2\pi n b S_{ff,j}(n) \\ i2\pi n S_{PP,j}(n) &= a[S_{Pf,j}(n) - S_{PP,j}(n)] + i2\pi n b S_{Pf,j}(n) \end{aligned} \quad (4)$$

式(4)を整理すると、粒子の移動位置における流体の変動速度のスペクトル $S_{ff,j}(n)$ および粒子の変動速度のスペクトル $S_{PP,j}(n)$ との間の関係式を得る：

$$S_{PP,j}(n) = P(n) \times S_{ff,j}(n) \quad (5)$$

ここに、

$$P(n) = [a^2 + b^2 (2\pi n)^2] / [a^2 + (2\pi n)^2] \quad (6)$$

上式(5)より、次のことがわかる。①粒子の移動位置における流体速度の相関 $R_{ff,j}$ が既知であれば、そのFourier変換である $S_{ff,j}$ に式(6)の粒子の物性値(密度、径)により一意的に決まる周波数応答関数 $P(n)$ を乗ずることによって粒子のスペクトル $S_{PP,j}(n)$ を得る。②粒子速度の自己相関は、 $S_{PP,j}(n)$ をFourier逆変換することによって求められる。以下では、まず粒子の移動位置における流体速度の相関 $R_{ff,j}$ について検討しよう。

2.2. 粒子の移動位置における流体速度の相関

沈降性粒子は、その沈降速度 ω_0 のために、流体粒子のように渦の寿命時間の間 同じ渦の中にとどまっておらず別の渦へと移動してゆき、粒子の移動位置における流体速度の相関は、G.T.Csanady⁴⁾によれば $\omega_0/v_0 > 4$ 程度であれば流体の空間的な相関構造の影響を強く受けるものと考えられる。したがって、乱流中を平均的に ω_0 で鉛直方向に沈降する粒子に対しては、その平均移動距離 $r = \omega_0 |t|$ だけ離れた2点間の流体の空間的相関によって、相関 $R_{ff,j}$ を近似できるであろう。

いま、距離 r だけ離れた2点間の距離ベクトル $\mathbf{r}$ に平行な方向の流体速度の相関(縦方向の速度相関) $f(r)$ を、解析的取り扱いを簡単にするために一般によく用いられる次の指数関数により近似する：

$$f(r) = \text{Exp}(-r/L) \quad (7)$$

ここに、 L は積分特性距離である。さらに距離ベクトル $\mathbf{r}$ に垂直な方向の流体速度

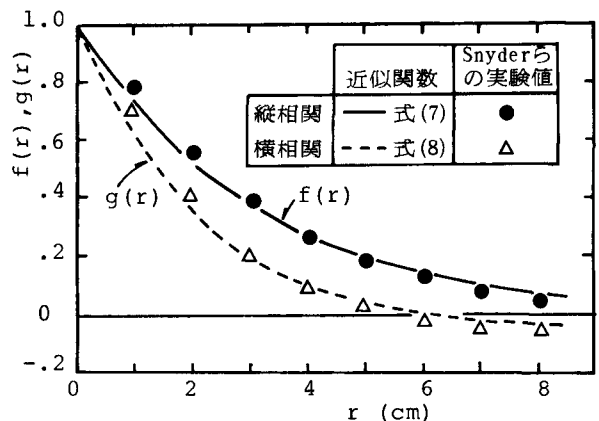


図-1 流体の空間的な速度相関

の相関(横方向の速度相関) $g(r)$ を等方性乱流における縦速度相関係数 $f(r)$ と横速度相関係数 $g(r)$ との関係; $g(r)=f(r)+(r/2)\partial f(r)/\partial r$ より

$$g(r)=(1-(r/2L))\text{Exp}(-r/L) \quad (8)$$

とする。ここに、式(7)の相関の積分特性距離は式(8)のその2倍である。図-1に、W.H.Snyder & J.L. Lumley²⁾の空間的な速度相関の実験結果と式(7),(8)の関数形との比較を示す。ここに、積分特性距離 L には実験結果からえられた3.13 cmを用いている。両者は比較的良好に一致しているといえよう。

空間的な相関式(7),(8)の変数 r を粒子の平均的な移動距離 $\omega_0|\tau|$ に変換し、相関 $R_{ff,j}$ を次のように近似する:

$$\left. \begin{aligned} R_{ff,3}(\tau) &= v_0^2 \text{Exp}(-\omega_0|\tau|/L) \\ R_{ff,1}(\tau)=R_{ff,2}(\tau) &= v_0^2 (1-\omega_0|\tau|/2L) \text{Exp}(-\omega_0|\tau|/L) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

次いで、 $\Lambda=\omega_0/L$ とおき式(9)のFourier変換を行うと、粒子の移動位置における流体の変動速度のスペクトルを得る:

$$\left. \begin{aligned} S_{ff,3}(n) &= v_0^2 \times 2 \int_0^\infty \text{Exp}(-\Lambda\tau) \cos 2\pi n\tau d\tau \\ &= v_0^2 \times 2\Lambda / [\Lambda^2 + (2\pi n)^2] \\ S_{ff,1}(n)=S_{ff,2}(n) &= v_0^2 \{ 2\Lambda / [\Lambda^2 + (2\pi n)^2] - \Lambda [\Lambda^2 - (2\pi n)^2] / [\Lambda^2 + (2\pi n)^2]^2 \} \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

2.3. 粒子速度の自己相関関数

粒子の変動速度のスペクトル $S_{PP,j}(n)$ は、式(10)を式(5)に代入すると

$$\left. \begin{aligned} S_{PP,3}(n) &= 2v_0^2 \Lambda [a^2 + b^2 (2\pi n)^2] / \{ [a^2 + (2\pi n)^2] [\Lambda^2 + (2\pi n)^2] \} \\ S_{PP,1}(n)=S_{PP,2}(n) &= Q(n) \times S_{PP,3}(n) \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

ここに、

$$Q(n) = S_{PP,1}(n)/S_{PP,3}(n) = S_{PP,2}(n)/S_{PP,3}(n) = [\Lambda^2 + 3(2\pi n)^2] / [2\Lambda^2 + 2(2\pi n)^2] \quad (12)$$

であり、 $Q(n)$ は粒子の水平方向の変動速度のスペクトルと鉛直方向の変動速度のスペクトルの比を表わしており、ここではスペクトルの方向比とよぶことにする。

粒子の変動速度の自己相関関数 $R_{PP,j}$ は、上式(11)を部分分数に分解し、Fourier逆変換すれば次式を得る:

$$\left. \begin{aligned} R_{PP,3}(\tau) &= [v_0^2 / (\Lambda^2 - a^2)] \{ a\Lambda(1-b^2)\text{Exp}(-a|\tau|) - (a^2 - b^2\Lambda^2)\text{Exp}(-\Lambda|\tau|) \} \\ R_{PP,1}(\tau)=R_{PP,2}(\tau) &= R_{PP,3}(\tau) - [v_0^2 / (\Lambda^2 - a^2)] \\ &\quad \times \{ [a\Lambda(1-b^2)(a^2 + \Lambda^2) / 2(\Lambda^2 - a^2)] \text{Exp}(-a|\tau|) \\ &\quad - [a^2\Lambda^2(1-b^2) / (\Lambda^2 - a^2)] \text{Exp}(-\Lambda|\tau|) \\ &\quad - [\Lambda(a^2 - b^2\Lambda^2) / 2] |\tau| \text{Exp}(-\Lambda|\tau|) \} \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

2.4. 粒子の拡がり幅の自乗および拡散係数

G.I.Taylorの拡散理論によれば粒子の変動速度の自己相関 $R_{PP,j}$ と拡がり幅の自乗 $\bar{Y}_{P,j}^2$ 、拡散係数 $D_{P,j}$ との関係は次式によって与えられる⁷⁾:

$$D_{P,j}(t) = \int_0^t R_{PP,j}(\tau) d\tau \quad (14)$$

$$\bar{Y}_{P,j}^2(t) = 2 \int_0^t \int_0^\eta R_{PP,j}(\tau) d\tau d\eta \quad (15)$$

いま、式(14)に式(13)の相関 $R_{PP,j}$ を代入して積分を行うと、次式に示す粒子の拡散係数を得る:

$$\left. \begin{aligned} D_{P,3}(t) &= [v_0^2 / (\Lambda^2 - a^2)] \{ \Lambda(1-b^2)[1 - \text{Exp}(-at)] - [(a^2 - b^2\Lambda^2) / \Lambda][1 - \text{Exp}(-\Lambda t)] \} \\ D_{P,1}(t)=D_{P,2}(t) &= D_{P,3}(t) - [v_0^2 / (\Lambda^2 - a^2)] \{ [\Lambda(1-b^2)(a^2 + \Lambda^2) / 2(\Lambda^2 - a^2)][1 - \text{Exp}(-at)] \\ &\quad - [a^2\Lambda(1-b^2) / (\Lambda^2 - a^2) + (a^2 - b^2\Lambda^2) / 2\Lambda][1 - \text{Exp}(-\Lambda t)] \\ &\quad + [(a^2 - b^2\Lambda^2) / 2] t \text{Exp}(-\Lambda t) \} \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

次いで、式(15)に式(13)の相関 $R_{PP,j}$ を代入して2重積分を行うと次式に示す粒子の拡がり幅の自乗を得る:

$$\begin{aligned} \bar{Y}_{P,j}^2(t) &= 2\{v_0^2/(\Lambda^2-a^2)\}\{[\Lambda(1-b^2)-(a^2-b^2\Lambda^2)/\Lambda]t \\ &\quad -[\Lambda(1-b^2)/a]\{1-\text{Exp}(-at)\} \\ &\quad +[(a^2-b^2\Lambda^2)/\Lambda^2]\{1-\text{Exp}(-\Lambda t)\}\} \\ \bar{Y}_{P,1}^2(t) &= \bar{Y}_{P,2}^2(t) = \bar{Y}_{P,3}^2(t) - 2\{v_0^2/(\Lambda^2-a^2)\} \\ &\quad \times \{[\Lambda(1-b^2)(a^2+\Lambda^2)/2(\Lambda^2-a^2)]\{t-[1-\text{Exp}(-at)]/a\} \\ &\quad -[a^2\Lambda(1-b^2)/(\Lambda^2-a^2)+(a^2-b^2\Lambda^2)/2\Lambda]\{t-[1-\text{Exp}(-\Lambda t)]/\Lambda\} \\ &\quad -[(a^2-b^2\Lambda^2)/2\Lambda]\{t\text{Exp}(-\Lambda t)-[1-\text{Exp}(-\Lambda t)]/\Lambda\}\} \end{aligned} \quad (17)$$

3. 考察

3.1. 拡がり幅の自乗の理論解と実験値との比較

前節で得た解析結果の妥当性を検討するために、ここではとくにW.H.Snyder & J.L.Lumley²⁾の実験結果の一つである粒子の拡がり幅の自乗の実験値と理論解式(17)との比較を行う。比較に用いた2種の粒子は、表-1に示すように、粒子Reynolds数 $\omega_0 d/\nu$ は1程度でありStokes則の成りたつ範囲にあると考えられる。また、粒子と流体の相対速度がなくなり粒子が流体になじんだと考えられる時間の指標であるなじみ時間は、Corn beadsがCopper beadsより小さくCorn beadsのほうがはやく流体場になじむことになる。なお、著者らの数値実験³⁾で取り扱った比重2.65、粒子径200 μm の細砂に属する粒子のなじみ時間は5msec程度であり、これと比較すれば今回用いた粒子は流体になじみにくい粒子といえよう。

乱流場の特性としては、乱れ強度 $v_0=8.515\text{ cm/sec}$ 、積分特性距離 $L=3.13\text{ cm}$ であり、流体の変動速度の空間的な相関は図-1に示している。

図-2に、表-1の粒子に対する水平方向の拡がり幅の自乗の理論解と実験値との比較を示す。Copper beadsの理論解と実験値とはきわめてよい一致を示しているが、Corn beadsのそれは拡がり幅の自乗が直線的に増加する250msecから

300msecにかけて理論解のほうがやや大きい勾配となっており、したがって拡散係数はやや大きい値になると考えられる。前述したように、本解析を適用できるのは粒子の移動位置における流体速度の相関と流体の空間的相関とが $r=\omega_0|\tau|$ の変換によって一致する場合であり、これはG.T.Csanadyによれば沈降速度と乱れ強度との比 ω_0/v_0 が4以上の粒子である。Copper beadsの場合その比は6.7であり問題はないが、Corn beadsの場合その比は2.6であり本解析適用範囲外の粒子といえよう。このような粒子に対しては、粒子の移動位置における流体速度の相関として空間的相関だけで

表-1 理論解と実験値との比較に用いた粒子

		Corn bead	Copper bead
直径	(μm)	87.0	46.5
密度	(g/cc)	1.0	8.9
終末沈降速度	(cm/s)	22.5	57.0
粒子Reynolds数		1.2	1.7
粒子のなじみ時間*	(msec)	20.0	49.0

* Snyder & Lumleyによって与えられた粒子のなじみ時間

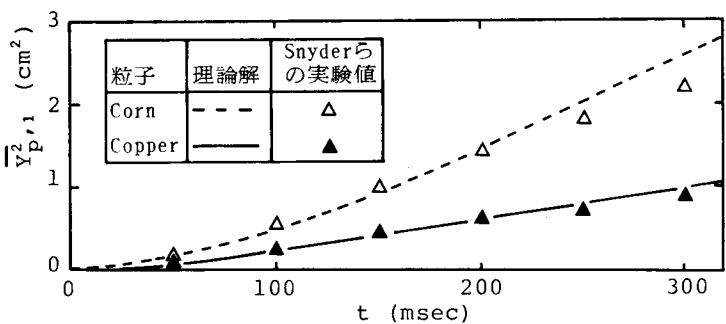


図-2 水平方向の拡がり幅の自乗

- (1) 定常乱流場における沈降性粒子の変動速度のスペクトル、拡がり幅の自乗および拡散係数の理論解を提示した。
- (2) 沈降性粒子の水平方向の拡がり幅の自乗の理論解とW.H.Snyder & J.L.Lumleyの実験値との比較を行い、粒子の沈降速度が乱れ強度より4倍以上大きい粒子に対しては、理論解と実験値とはきわめてよい一致を示した。

また、等方性の相関構造と異なるたとえばせん断乱流場等を対象とする場合、空間的な相関構造が複雑でありここで用いた縦と横の空間的な速度相関あるいは指数関数形の相関を仮定することに問題がある場合には、その空間的な相関を実験により求めてこれを粒子の移動位置の流体速度の相関に変換し、次いで数値的にFourier変換(たとえばFast Fourier Transform)を行い粒子のスペクトルを算定することが可能であると考えている。したがって、対象としている乱流場の流体速度の空間的な相関さえ求めれば、ここで得られた式(6)→(5)→(3)→(14)の算定手順を経て沈降性粒子の拡散係数を求めることができよう。

謝辞：本研究は文部省科学研究費(奨励研究(A) 課題番号58750468)の援助を受けたことに謝意を表する。

参考文献

- 1) 栗谷・藤崎：開水路流れにおける沈降性粒子の平均移流速度と縦分散係数，土木学会論文報告集，第311号，pp.71-79,1981.
- 2) Snyder,W.H. & Lumley,J.L. :Some measurements of particle velocity autocorrelation functions in a turbulent flow,Jour. Fluid Mech.,Vol.48,Pt.1,pp.41-71,1971.
- 3) 上田・神野・柳井・前浜：数値計算による一様等方性乱流中の沈降性粒子の拡散係数の検討，土木学会論文報告集，第337号，pp.93-100,1983.
- 4) Csanady,G.T. :Turbulent Diffusion of Heavy Particles in the Atmosphere,Jour. of Atmospheric Sci.,Vol.20,pp.201-208,1963.
- 5) Lumley,J.L. :Two-Phase and Non-Newtonian Flows,Topics in Applied Physics,Vol.12,pp.289-324,1978.
- 6) Hinze,J.O. :Turbulence,McGraw-Hill,pp.352-364,1959.
- 7) 椿東一郎：水理学Ⅱ，森北出版，pp.178-180,1974.