

粒子群の沈降速度に関する研究 Fall Velocity of Sediment in High Concentrations

海岸環境工学研究センター 正員 香 取 完 和
海岸環境工学研究センター 正員 本 間 仁

1. まえがき

河川あるいは海浜における流砂、漂砂に関する近年の研究においては、底質の運動を数値計算によって求め、地形変化を予測する試みがなされている。しかし、基本となる底質の運動方程式を得るには未解明な問題が多く残されているのが現状であり、漂砂のメカニズムに関する諸現象が究明される必要がある。そこで本研究では、基本量のひとつである沈降速度に注目し、特に漂砂を考えるとときには粒子は群として存在していることから、粒子群の沈降速度について検討を行った。粒子群の沈降速度に関しては従来から多くの研究が行われているものの、論理的な裏付けが不十分であったり、現象論的に矛盾すると思われる実験結果が報告されている例も見られ、ここに報告する研究も多くの仮定を含むものではあるが、沈降する粒子群の基本的なメカニズムに着目して運動の定式化を試みると共に、より妥当と思われる実験方法を開発して実験を行ったものである。以下に、本研究で得られた結果を報告する。

2. 沈降現象のモデル化

粒子が沈降する様子を考察すると、粒子が沈降することによって周囲の流体は排除され、粒子の間を縫って上昇し、濃度が高くなるにつれ粒子相互の間隔が狭くなり、流体が上昇しづらくなると考えられる。このような現象は粒子周辺に発達する境界層の広がりや粒子相互の間隔との関係によって規定されるが、このような流体の場を厳密に解くことは極めて難しい問題である。そこで、ここでは粒子が沈降する場をモデル化し、粒子群の沈降速度を近似的に求めた。

2.1 沈降する粒子の運動方程式

流体中を運動する固体に働く力は、相対速度の2乗に比例すると考えるのが一般的である。この表現方法に倣い、沈降する粒子に働く重力と流体力が釣り合った状態を考えると、沈降する粒子の運動方程式は次式で表される。

$$\rho \frac{\pi d^3}{6} s g = \rho D_w (W + W')^2 \pi \frac{(\alpha d)^2}{4} \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 W は粒子の沈降速度、 W' は流体の上昇速度で、 $W + W'$ は相対速度である。 α は次節で説明するように、流体の粘性によって発生する粒子周辺の粘性領域の半径を決める係数である。また ρ は流体の密度、 d は粒子の粒径、 s は粒子の水中比重、 g は重力加速度で、 D_w は抵抗係数である。

2.2 粒子の沈降速度 W と流体の上昇速度 W' の関係

次に W' を W で評価することを考える。今、濃度分布が空間的に一様な場を想定すると共に、粒子1個当たりが占める粒子と流体の空間を Ω 空間と呼ぶ。 Ω 空間の形はどのようなものであっても良いが、扱いを簡単にするために、 Ω 空間と体積の等しい、中心を粒子の中心とした半径 r_{sw} の球空間 Ω' で Ω 空間を置き換えて考える。

ここで、 d 、 αd および r_{sw} の関係を示したものが図-1である。粒子の中心からの距離を r とすると、 Ω' 空間内の各領域は、 $0 \leq r \leq d/2$ が粒子、 $d/2 < r \leq \alpha d/2$ が粒子の動きに付随する粘性領域、 $\alpha d/2 < r \leq r_{sw}$ が粒子と独立な流体域である。そして、粘性領域内の流体は粒子に付着して粒子と同一の速度で沈降すると仮定する。つまり、ここで粘性領域とは、粘性による流体速度の変化分をそれと等価な小領域で代表したものである。

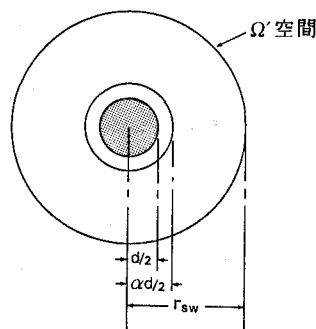


図-1 粒子1個当たりが占める空間のモデル

また、粘性領域外の流体も空間的に平均化された同一の流速で運動するものとする。さて、以上のように空間を区分するとき、粒子が沈降速度 W で Δt 時間沈降する際に粒子が排除する流体の体積 V_s は、

$$V_s = \frac{\pi(\alpha d)^2}{4} W \Delta t \quad \dots\dots\dots (2)$$

であるのに対して、排除され粒子あるいは粘性領域の側域を通過して上昇する流体の体積 V_w は

$$V_w = \pi \left\{ r_{sw}^2 - \frac{(\alpha d)^2}{4} \right\} W' \Delta t \quad \dots\dots\dots (3)$$

で表される。 V_s と V_w は等しいので、式(2)と式(3)から

$$\left\{ r_{sw}^2 - \frac{(\alpha d)^2}{4} \right\} W' = \frac{(\alpha d)^2}{4} W \quad \dots\dots\dots (4)$$

の関係が得られる。

ところで、体積濃度 C は、粒子がぎっしり詰った状態での空隙率を γ とすると、 r_{sw} を用いて

$$C = \frac{\pi d^3}{6} / (1 - \gamma) \frac{4\pi r_{sw}^3}{3} \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表され、 r_{sw} を C で表すと

$$r_{sw} = \frac{d}{2} \left\{ (1 - \gamma) C \right\}^{-1/3} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となることから、式(6)を式(4)に代入して r_{sw} を消去し、 W' を W で表すと

$$W' = \frac{\alpha^2}{\{(1 - \gamma) C\}^{-2/3} - \alpha^2} W \quad \dots\dots\dots (7)$$

の関係が得られる。式(7)を式(1)に代入して W' を消去し W を求めると次式が導かれる。

$$W = \sqrt{\frac{2s d g}{3 D_w}} \frac{1}{\alpha} \left\{ 1 - \alpha^2 \left\{ (1 - \gamma) C \right\}^{2/3} \right\} \quad \dots\dots\dots (8)$$

2.3 抵抗係数 D_w の評価

式(8)で単一粒子が沈降する場合を考えると、 $C \approx 0$ であることから単一粒子の沈降速度は

$$W = \sqrt{\frac{2s d g}{3 D_w \alpha^2}} \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる。単一粒子の場合でも、 D_w や α は粒子の大きさあるいは流体の性質によって変化するが、球体に働く抵抗から通常評価されている抵抗係数 C_D とは

$$2 D_w \alpha^2 = C_D \quad \dots\dots\dots (10)$$

の関係にある。なお、抵抗係数 C_D は、粒径 d を用いて表した Reynolds 数 $Re (= Wd/\nu)$ を用いると、広範囲に渡る Re に対して

$$C_D = \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0.34 \quad \dots\dots\dots (11)$$

で表されることが従来の研究から得られている¹⁾。ここで、 ν は流体の動粘性係数である。

さて、かなり問題ではあるが、式(10)の関係が、粒子が群として存在するときにも拡張できると仮定して、式(10)を式(8)に代入すると次式を得る。

$$W = \sqrt{\frac{4s d g}{3 \left\{ \frac{24}{Re} + \frac{3}{\sqrt{Re}} + 0.34 \right\}}} \left\{ 1 - \alpha^2 \left\{ (1 - \gamma) C \right\}^{2/3} \right\} \quad \dots\dots (12)$$

2.4 粘性領域の半径を決める係数 α の評価

式(12)中では、 α が未知数として残されている。そこで、粒子群が沈降する際の流体運動の状態を考えてみると、流体はある程度規則的に配列された粒子群中を縫うようにして流れ、振動流状態を呈していると考えられる。このため、一様な流れの中に置かれた振動する球体周辺の流体運動を解析することによって、粘性領域の広さを決定することができると思われる。しかし、現在までのところ充分な研究成果が得られていないので、ここでは振動流に対する壁面粘性底層の厚さと関係付けることにし、Jonsson²⁾(1966)の研究成果を引用すると、Jonssonは振動流に対する壁面粘性底層の厚さ δ_{visc} を

$$\delta_{\text{visc}} = 18.2 \nu / U \quad \dots\dots\dots (13)$$

で与えている。ここで、 U は壁面粘性底層外縁の流速である。式(13)を粒子が沈降する場合に当てはめた場合、 U は、粒子と、粒子に拘束されない粘性領域外の流体との相対速度($W+W'$)で表すことができるであろう。 $W+W'$ は式(7)より

$$W+W' = \frac{1}{1-\alpha^2\{(1-\gamma)C\}^{2/3}} W \quad \dots\dots\dots (14)$$

なので、粘性領域の半径は

$$(\alpha-1) \frac{d}{2} \sim \frac{18.2 \nu}{W+W'} = 18.2 \frac{\nu}{W} \left[1-\alpha^2\{(1-\gamma)C\}^{2/3} \right] \quad \dots\dots\dots (15)$$

のように表現され、係数を K_w とし、Reynolds数 Re を用いると、 α は次式で表される。

$$\alpha = 1 + 36.4 K_w \frac{1}{Re} \left[1-\alpha^2\{(1-\gamma)C\}^{2/3} \right] \quad \dots\dots\dots (16)$$

2.5 係数 K_w の決定

定水位法によって通常評価されている透水係数 k を用いることにより $C=1$ における沈降速度 W_1 が求められ、その結果を利用して K_w を評価することができる。まず、定水位法による透水係数の算定方法は次節の図-4に示す実験と同様であり、ある水位差 h における浸透流量 Q を計ることにより、透水係数 k が

$$k = Ql / Ah \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。ここで、 A は試料の断面積、 l は試料の長さである。さて、図-4に示した状態で、流体の浸透によって試料中の粒子1個当りに働く上向きの力を f とすると、粒子を球体と仮定するならば試料の体積 Al 中に $Al(1-\gamma)/(\pi d^3/6)$ 個の粒子が存在することから、試料全体に働く力 F は次式で表される。

$$F = \frac{6Al(1-\gamma)}{\pi d^3} f \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで、 γ は試料の空隙率である。次に、 $C=1$ における沈降速度 W_1 を求めるために、 f と浮力および重力による下向きの力が釣り合った状態を考えると、 F が水位差 h による水圧力 $A\rho gh$ と等しいので、 f は

$$f = \frac{\rho \pi d^3 g}{6(1-\gamma)} \frac{h}{l} \quad \dots\dots\dots (19)$$

のように表される。式(19)に、式(17)より $h/l = Q/kA$ の関係を代入し、 $Q/A = W_1$ であることを考慮すると、式(19)は次式となる。

$$f = \frac{\rho \pi d^3 g}{6(1-\gamma)} \frac{1}{k} W_1 \quad \dots\dots\dots (20)$$

ところで、 f は浮力分を差し引いた重力による下向きの力 $\rho \pi d^3 sg/6$ と釣り合っているので、 W_1 が

$$W_1 = s(1-\gamma)k \quad \dots\dots\dots (21)$$

のように求められる。この結果を式(12)に代入して $C=1$ における $\alpha(=\alpha_1)$ を求めると、 α_1 は次式で与えられる。

$$\alpha_1 = \left[\frac{1-A_1^{1/2}}{(1-\gamma)^{2/3}} \right]^{1/2}, \quad A_1 = \frac{3(1-\gamma)}{4dg} k C_D W_1 \quad \dots\dots\dots (22)$$

さらに W_1 と α_1 を式(18)に代入すると、係数 K_w は最終的に次式で与えられる。

$$K_w = \frac{(\alpha_1 - 1) d / 2}{18.2 \nu / W_1 A_1^{1/2}} \dots\dots\dots (23)$$

以上、沈降する粒子群のモデル化を試みたが、沈降速度 W は、以下の手順で計算される。まず、既往の研究成果を利用して透水係数 k を求め、 k を式(21)に代入して $C = 1$ における沈降速度 W_1 を計算する。次に、 W_1 を式(22)に代入して α_1 を求める。さらに、 W_1 と α_1 を式(23)に代入すると K_w が決定される。求められた K_w を式(18)に代入して、式(12)と式(18)を用いて繰り返し計算を行うことにより、任意の体積濃度 C における沈降速度 W を求めることができる。

3. 実験装置

前節においては、粒径の揃った粒子が空間的に一様に分布している場を想定して現象をモデル化していることから、実験においてもそのような場が設定される必要がある。また、本研究で対象としている濃度の範囲は、自然に存在する全ての範囲（まったく真水に近い薄い濃度から、粒子がぎっしり詰った極高い濃度まで）に及ぶことから、より広範囲に渡る濃度が容易に設定できる実験装置が望まれる。そこで、以下に述べる実験においてはできるだけ均一な試料を用い、それを空間的に一様に分布させて沈降速度を測定できる装置を開発して実験を行った。

3.1 $0 < C < 1$ の場合の実験装置

この場合の実験装置は、図-2 に示すものである。この装置の原理および特徴を実験手順（図-3）に従って説明すると以下の通りである。

- (a) アクリル・パイプ中を下から上に流れる流体中に粒子を浮遊させる。流体中に発生する弱い乱れによって浮遊した粒子群はかなり一様に分布する。特にアクリル・パイプの長さが2 mにも及ぶため、測定区間 L （長さ30 cm）内では高さ方向の濃度変化がほとんど無視できる状態が得られる。
- (b) 一様な濃度分布状態にある粒子群を、スライド式仕切り板2枚を用いて測定区間内に閉じ込める（同時に給水を止める）。
- (c) 閉じ込められた粒子群はほぼ一様な濃度分布を保ったまま沈降し、測定区間の下部に溜る。この際、沈降する粒子群の上端が、先に溜った粒子層の上端に到達するまでの時間 T を計る。最後に、測定区間内に溜った粒子層の厚さを計ることにより、一様な濃度（体積濃度 C ）で沈降する際の沈降速度 W が次式によって与えられる。

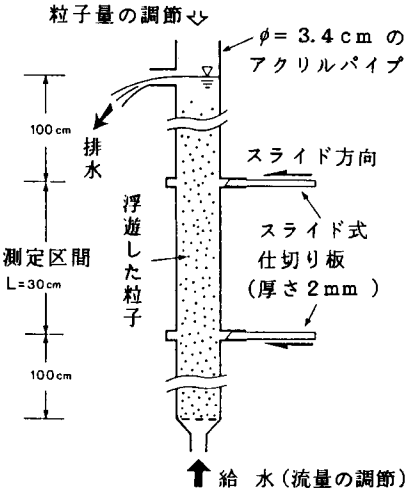


図-2 実験装置 ($0 < C < 1.0$)

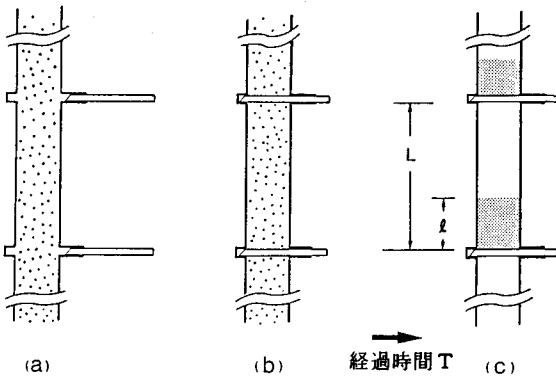


図-3 実験手順 ($0 < C < 1.0$)

$$C = l/L, \quad W = (L-l)/T \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、溜った粒子層は圧密されるため粒子層の厚さ l は若干変化し、沈降速度の測定に多少影響を与えるが、今回の実験では無視した。

3.2 C = 1 の場合の実験装置

この場合の実験装置は、図-4に示すものである。先と同様に、この装置の原理と特徴を実験手順に従って説明する。

(a) アクリル・パイプ内に底質を詰める(10cm)。アクリル・パイプ内に水を流し、徐々に水位差 h を大きくすると、水は試料層内をゆっくり通過する。水が試料層内を通過すると、試料層内の粒子は通過する水から上向きの力を受ける。

(b) 水位差がある値に達すると、試料層の上端に位置する粒子が微弱な運動を始める。この状態は、粒子に働く重力(下向き)と、粒子が流水から受ける力および浮力(上向き)が釣り合った状態であり、粒子に視点を置いた場合の沈降速度が定常に達した状態である。水位差をこの状態よりも大きくすると、試料層の側面とアクリル・パイプの内面との間に働く摩擦力がかなり小さいため、試料全体が上に持ち上げられてしまう。

(c) 試料層の上端に位置する粒子が微弱な運動をしている状態での流量 Q を測定すると、体積濃度 $C=1$ における沈降速度 W_1 は次式で与えられる。ここで、 A はアクリル・パイプの内側断面積である。

$$W_1 = Q/A \quad \dots\dots\dots (25)$$

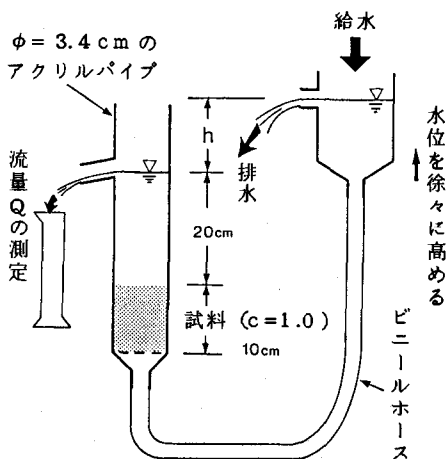


図-4 実験装置($C=1.0$)

4. 実験結果および考察

実験に用いた試料は、表-1に示す3種類の砂である。米津浜の砂は静岡県米津浜海岸の砂をふるい分けして作ったもので、Traskの淘汰係数が1.17を示し、他の標準砂と同様に本実験に適したかなり均等な砂である。以下に、これらの砂を用いて行った沈降速度の測定結果を示すと共に、モデルによって計算した結果と比較検討する。なお、透水係数の算定に当っては Terzaghi(1925) の提案した次式を用いて透水係数を計算した。

表-1 試料の性質

名 称	粒径 d (cm)	水中比重 s	Trask の淘汰係数	単一粒子の沈降速度 W_0 (cm/s)
豊浦標準砂	0.02	1.65	1.1	2.6
米津浜の砂	0.04	1.65	1.17	6.4
相馬標準砂	0.07	1.65	1.1	11.3

$$k = K_t \frac{\mu_{10}}{\mu} \left[\frac{\gamma - 0.13}{(1-\gamma)^{1/3}} \right]^2 d_e^2, \quad K_t = (460 \sim 800) \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 μ は粘性係数で添字10は 10°C における値を表す。 γ は空隙率、 d_e は試料の有効粒径で、10%粒径である。 K_t は試料の丸みに関係し、粒子が球の時 K_t が800である。また、単位系はc.g.s.である。

4.1 C = 1 における沈降速度 W_1

図-5は、式(21)を用いて計算した $C=1$ における沈降速度 W_1 と実験値を比較したものである。計算値としては、試料が球体の場合($K_t=800$)と、角張っている場合($K_t=460$)のみを示した。計算値と実験値を比較すると、実験値には、 $K_t=800$ とした場合の計算値より大きな沈降速度を示す傾向が見られる。

これは今回の実験で、アクリル・パイプ内に敷いた試料の締め具合が若干緩めであったためと思われる。このように、濃度が極めて高い場合には、粒子相互の噛み合い状態（圧密状態）が沈降速度に大きく影響するといえる。今回の研究では、圧密沈降は考えていないが、式(26)をより厳密に適用するためには、圧密沈降過程を定式化する必要がある。

4.2 濃度の変化に対する沈降速度 W と係数 α の変化

図-6の上段は、濃度の変化に対する沈降速度の変化を示したものである。図中、 $0.8 < C < 1.0$ の範囲にデータがプロットされていないが、これは濃度が高いためにスライド式仕切り板と挿入口との間に砂が噛み、スライド式仕切り板をうまく作動させることができなかったためである。そして、米津浜の砂を用いた実験は、 $C = 1$ における実験のみが終了した段階であるため、全般的な傾向を見ることはできない。また、図中に≡印で示すものは、水位差 h を若干高めることにより得られた豊浦標準砂に対する $C = 1$ 近傍のデータである。沈降速度 W の変化について実験値と計算値を全般的に比較すると、計算値に比べて実験値の方が若干小さな沈降速度を示しているが、前節で示した粒子群の沈降モデルによって、濃度の変化に対する沈降速度の変化を概略表現できるといえよう。また、濃度の変化に対する沈降速度の変化はかなり大きく、底質の運動を記述する際に単一粒子の沈降速度を用いることは問題と言える。一方、図-6の下段は濃度の変化に対する粘性領域を決める係数 α の変化を示したものである。この結果は式(16)を用いて計算されたものであり、実際に α がどのように変化するかは推測の域を出ない。図を見る限り、体積濃度 C が約0.8を越えると粘性領域が急激に広がり(α が大きくなり)、沈降速度 W を急激に減少させている。

5. 結 語

本研究では、粒子が群として沈降する際の現象を取り上げ、現象を既往の研究成果を用いてモデル化することにより、実験結果と良好な一致を示すモデルを組み立てることができた。しかしモデル化に当っては種々の仮定を設定しているため、各仮定がそれぞれどの程度妥当なものであるかを今後さらに検討する必要がある。特に沈降粒子群の抵抗係数および粘性領域の大きさを評価するに当っては極めて大胆な仮定をしており、粒子群が沈降する場を解析的に解く必要がある。そのような研究の結果、より信頼性の高い評価がなされたならば、粒子の沈降に対する流体の特性変化のみに留らず、粒子群の拡散あるいは混合流体の粘性係数の変化を考察する上で貴重な知見を与えるであろう。

最後に、本論文をまとめるに当たり貴重な御助言を頂いた東京大学工学部 渡辺 見 教授、実験に際して多大な御協力を頂いたI N A新土木研究所 山本 吉道 氏 に対して深甚なる謝意を表したい。

<参考文献>

- 1) 土木学会：浄水，水理公式集，pp. 411-425, 1978.
- 2) Jonsson, I.G. : Wave boundary layers and friction factors, Proc. 10th Coastal Eng. Conf., pp.127-148, 1966.

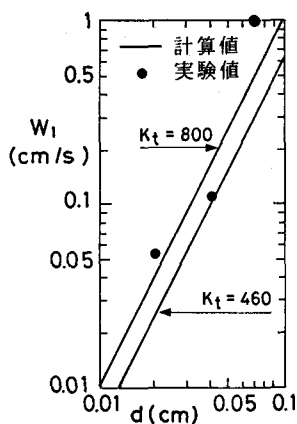


図-5 W_1 と d の関係

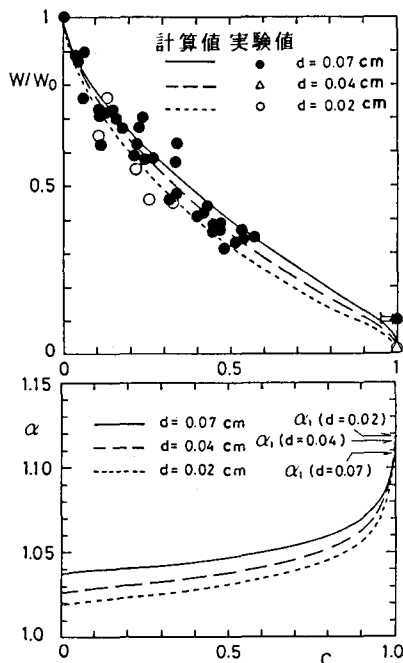


図-6 W と α の変化