第28回水理講演会論文集　1984年2月

多層帯水層における地下水流の有限要素解析と最適取水に関する研究

FEM Analysis of Groundwater Flow and Study on Optimal Pumping in Multilayered Aquifer

神戸大学工学部　正員　川谷　健
清水建設（株）　正員　黒坂昌弘

1. はじめに

同一の地下水系を利用する際、個々の井戸あるいは区域ごとの取水量は、水系全体から見て効率的取水が行われるように決められねばならない。最適取水量決定の一手法として、離散化した地下水流の基礎式と線形計画法を組合せる方法が提示され、種々の問題に適用されている[1-6]が、そこでは単層の帯水層が対象である。しかし、広域にわたる地下水の有効利用を考えるには、透水性の異なる幾つかの地層からなる帯水層を解析の対象とする必要が多々生じる。例えば、透水性のよい二つの地層の間に相対的に透水性の悪い地層（難透水層）がはさまれているとき、地下水流は、難透水層より上の地層内で自由地下水流、下の透水層で被圧地下水流の挙動を示すことになろう。そして、揚水が流れに及ぼす影響も各層で違ってくる。また、難透水層（加圧層）にも多少の透水性があるので、その上下の透水層の間に水頭差が生じれば、加圧層を横切る流れができ、いわゆる帯水層間の漏水が起る。一つの透水層からだけ取水が行われても、他方の透水層との水頭差が大きくなるので、漏水量は増える。このように、多層帯水層の様々な地層から複数の井戸で取水すると、個々の帯水層内の流況変化は他の帯水層内の地下水流動にも大きく影響する。したがって、広域にわたる取水計画で揚水量の最適化を図るには、地下水流の三次元的な挙動を取扱える解析モデルを用いることが必要となる。

本研究の目的は、上記の観点から、解析の対象として多層帯水層をとりあげ、これに有限要素法と線形計画法を用いることで、最適揚水量の決定手法をより適用性の高いものとすることである。

2. 基礎式と有限要素定式化

飽和浸透流の基礎式は、帯水層と水の圧縮性が無視できれば

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(K_{ij}\frac{\partial h}{\partial x_j}\right)-R = 0 \tag{1}$$

である。ここに、h はピエゾ水頭、K_{ij} は透水係数、R は M ケ所の井戸での総揚水量であり

$$R = \sum_{k=1}^{M} W_k\,\delta(x_1-x_{1,k})\,\delta(x_2-x_{2,k})\,\delta(x_3-x_{3,k}) \tag{2}$$

で与えられ、$\delta(x)$ はデルタ関数、W_k と$(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k})$は井戸 k の揚水量と座標である。

境界条件は、　水頭が規定される境界で：　$h = H_o$ (3)

流量が規定される境界で：　$-K_{ij}\dfrac{\partial h}{\partial x_j}l_i = q_\Gamma$ (4)

で与えられる。H_o と q_Γ は水頭と流量の既知関数、l_i は外部境界面の法線の方向余弦である。

基礎式(1)にガラーキン法を適用し、境界条件(4)を導入すると

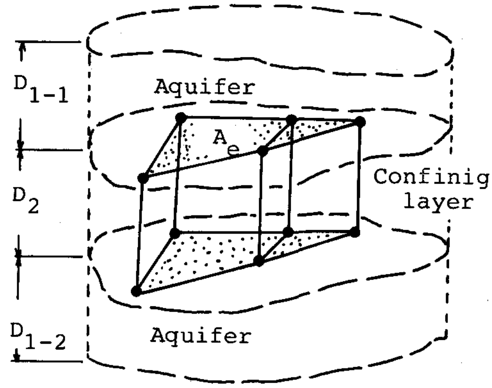
$$\left[\int_V K_{ij}\frac{\partial N_n}{\partial x_i}\frac{\partial N_m}{\partial x_j}dv\right]h_m = -\int_\Gamma N_n q_\Gamma d\Gamma - \sum_{k=1}^{M} W_k N_n(x_{1,k}, x_{2,k}, x_{3,k}) \tag{5}$$

を得る。ここに、N_n は補間関数であり、積分範囲 v と Γ はそれぞれ流れの領域と外部境界を表わす。

ところで、広域の地下水流動は、透水層では動水こう配の水平方向成分が卓越するので、近似的に水平二次元流として取扱える。一方、難透水層内の水平流速成分は透水層内のそれにくらべて無視でき、難透水層をはさむ上下の透水層間に水頭差があるときだけ、難透水層を横切る鉛直一次元流が生じる。

したがって、多層帯水層内の流れは、透水層では水平二次元流、難透水層では鉛直一次元流という準三次元流として扱える。

いま透水係数テンソルの主軸と座標軸が一致しているとして、座標系を (x,y,z) 、透水係数を (K_x, K_y, K_z) で表わす。このとき、上記の準三次元流に対して、補間関数 $N_n(x_i)$ は、透水層で x と y の関数、難透水層で z のみの関数である。以下では補間関数を、透水層で $I_n(x,y)$ 、難透水層では $J_n(z)$ で表わす。そして、式(5)の左辺の体積々分を透水層と難透水層で別個に実行する。透水層の厚さを D_1 で表わし、補間関数 I_n が x と y の関数であることを考慮すると、透水層に関する体積々分項は

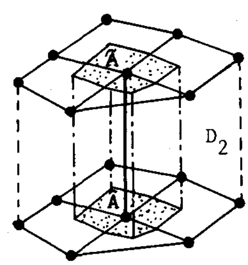


図ー1　透水層および難透水層の要素分割

$$\int_V \left(K_x \frac{\partial I_m}{\partial x}\frac{\partial I_n}{\partial x} + K_y \frac{\partial I_m}{\partial y}\frac{\partial I_n}{\partial y}\right) dv = \sum_{e_1} \int_{A_e} D_1 \left(K_x \frac{\partial I_m}{\partial x}\frac{\partial I_n}{\partial x} + K_y \frac{\partial I_m}{\partial y}\frac{\partial I_n}{\partial y}\right) dA \qquad (6)$$

と書ける。ここに、$dA = dxdy$ であり、$\sum_{e_1}$ は透水層に対応する二次元要素(図ー1)についての積分値の総和を表わす。一方、難透水層での補間関数 $J_n(z)$ は節点を結ぶ鉛直線上で定義される(図ー1)。この鉛直一次元要素によって代表される領域の断面積を $\tilde{A}$ (図ー2)とし、$\tilde{A}$ は上述の二次元補間関数 $I_n(x,y)$ を用いて

$$\tilde{A} = \sum_{e_1} \int_{A_e} I_n dA \qquad (7)$$



図ー2　一次元要素で代表される領域の断面積 $\tilde{A}$

で与えられるものとする。難透水層の厚さを D_2 で表わすと、図ー3 に示す節点 k と l に対する一次元の補間関数は、それぞれ

$J_k(z) = (z-z_l)/D_2$ および $J_l(z) = (z_k-z)/D_2$

で与えられる。したがって、難透水層に関する体積々分項は

$$\int_{V_2} \left(K_z \frac{\partial J_m}{\partial z}\frac{\partial J_n}{\partial z}\right) dv = \sum_{e_2} \int_{D_2} \left(\tilde{A} K_z \frac{\partial J_m}{\partial z}\frac{\partial J_n}{\partial z}\right) dz$$

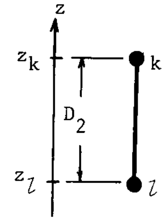
$$= \sum_{e_2} \left(\pm \frac{\tilde{A} K_z}{D_2}\right) \qquad \left\{ \begin{array}{l} +;\ m=n \\ -;\ m \neq n \end{array} \right\} \qquad (8)$$

と書ける。ここに、$\sum_{e_2}$ は難透水層における積分値の総和を表わす。つぎに、式(5)の右辺、すなわち外部境界での流出入量および揚水量に関わる項について考える。難透水層では鉛直一次元流を仮定しているので、上記の流出入量には難透水層内の流れは算入されず、透水層内の流れだけが算入される。したがって、式(5)の右辺は

$$\int_\Gamma N_n q_\Gamma d\Gamma - \sum_{k=1}^{M} W_k N_n(x_k, y_k, z_k)$$

$$= - \sum_{e_1} \int_c D_1 q_\Gamma I_n dc - \sum_{k=1}^{M} W_k I_n(x_k, y_k) \qquad (9)$$

となる。ここに、c は透水層で定義される二次元要素の外部境界線を表わす。



図ー3　一次元要素

多層帯水層内の流れを準三次元流として扱い、基礎式をガラーキン法によって離散化すると

$$[E]\{h\} = \{F\} + \{Q\} \qquad (10)$$

となる。ここに、$[E] = [E^1] + [E^2]$ であり、$E^1_{nm}=$ 式(6)、$E^2_{nm}=$

式(8)、 F_n= 式(9)の第1 項、 Q_n= 式(9)の第2 項、である。

3. 複数の透水層から揚水する井戸について

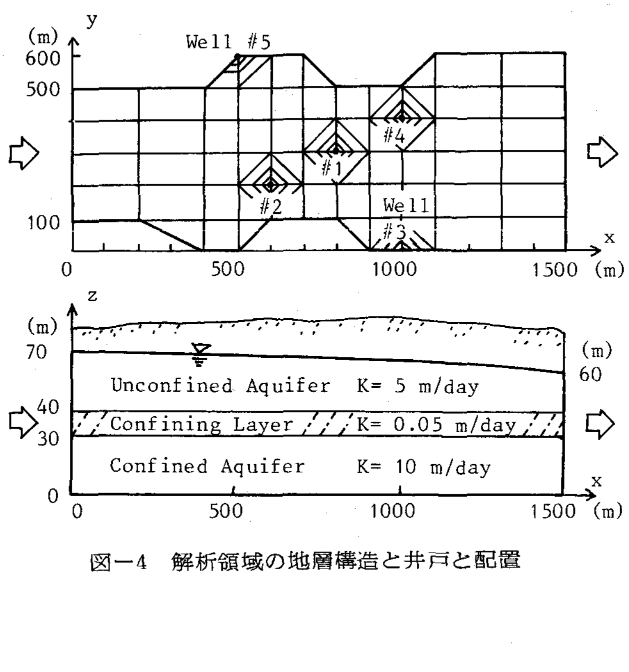
多層帯水層における揚水井には、ただ一つの層から取水する井戸と複数の地層から取水する井戸がある。上述の有限要素定式化では、後者の井戸であっても、井戸に対応する節点は透水層ごとに設定されそこでの水頭と揚水量は別個に扱われている。以下では、複数の地層から取水する井戸に関し、式(10)の取扱いを述べる。簡単のために二つの透水層(α層とβ層と呼ぶ)から取水する井戸を考える。井戸に対応するα層の節点での水頭と揚水量を h_α と Q_αとし、β層でのそれらを h_βと Q_βとすると、水頭は $h_\alpha = h_\beta$ でなければならず、揚水量は $Q_\alpha + Q_\beta$ で与えられる。また、井戸は領域内あるいは $q_\Gamma = 0$ の境界上にあることを考慮すれば、式(10)で $F_\alpha = F_\beta = 0$ である。したがって、係数行列[E]のα列とβ列、続いてα行とβ行を加え、さらに揚水量ベクトル{Q}のα成分とβ成分を加えることで、二層から取水する井戸で式(10)が満すべき条件が導入される。三つ以上の地層から取水する井戸では、上述の手続きを繰返せばよく、その結果、k 個の地層から取水する井戸については、式(10)で与えられる連立方程式の数を (k −1) 個減らすことになる。

4. 最適取水(目的関数と制約条件)

最適取水とは、取水が周辺に及ぼす影響を一定の限度内にとどめるという条件(制約条件) の下で、取水目的(目的関数) を最大限に達成するような取水といえよう。本研究では、領域内の井戸の総取水量が最大となるように個々の井戸の揚水が行われるときを、最適取水とする。その際、制約条件として、i) 水位・水頭の低下は井戸およびその他の幾つかの地点で規定された下限値(低限界水頭)以下にならない ii)各井戸の揚水量は個々に規定された下限値以上である(最少揚水量の確保) 、を設定する。基礎式から導びかれる離散式に複数の帯水層から取水する井戸で満されるべき条件を導入した後、線形計画法を適用して最適揚水量を決定する。そのためには、目的関数(総取水量)が、制約条件および境界条件を規定した地点での水位・水頭の一次式で表現されねばならない。さらに、制約条件も一次等式または一次不等式で表わされねばならない。個々の井戸の取水量と制約条件が課せられた地点(以下、制約点ということにする)の水位・水頭との関係式は、上田ら [2] が示した方法によって導びかれる。最適解はシンプレックス法 [7,8] によって求めた。

5. 解析例(解析条件と結果)

帯水層を図−4 に示す。領域内の5 ケ所の井戸はすべて制約点である。井戸#1 は不圧と被圧の両帯水層から取水し、井戸 #2 と #3 は不圧帯水層、井戸 #4 と #5 は被圧帯水層からだけ取水する。図−4 の平面図に示す格子で両帯水層を分割し、上下の節点を鉛直一次元要素で結ぶ。要素数は70 ×2 =140 、節点数は 109 ×2 =218 である。境界条件は、上流境界で流入量が 1355 m^3/dに保たれ、下流水位は 60 m に保たれる、とした。上流からの流入量は、上流水位を 70 m 下流水位を 60 m とし、取水しないときの流量である。一方、制約条件として、井戸の低限界水位を取水前の水位から −1 m、−5 m、−10 m の3 通りに設定した。また揚水量の下限値は、表−1



図−4 解析領域の地層構造と井戸と配置

に示す 6 通り(A－E)である。さらに、下流域へ最低 600 m^3/d の流量を保証するために、 x=1300m の地点での水頭を 60.5 m 以上に保つという条件を課した。上流境界では、水位低下の許容値を 1 m とし、水位を69 m 以上に保つこととした。

井戸の低限界水位および揚水量の下限値に対する条件の組合せから、表－2 に示す13 通りの結果を得た。

ところで、個々の井戸の取水量と制約点での水頭との関係から、特定の井戸と他の制約点との水頭差が大きいほど、その井戸の取水量が多くなり、さらに、総揚水量を最大にするには、制約条件の範囲で全井戸の水位を下げ、その他の制約点の水頭をできるだけ高くすればよいことが判る[2]。表－2 の Case 1 は揚水量に関する制約がなく、総揚水量は水頭についての制約の下で取水可能な最大値である。このときの各井戸の取水量が規定された揚水量の下限値以上だと揚水量の制約はないのと同じで、Case 2 がこれである。しかし、Case 4 では井戸 #2 の揚水量の下限値は、制約のないときの揚水量以上に設定されている。井戸 #2 の揚水量を増すには、そこでの水位を下げるか、他の制約点の水頭を上げるかである。いま井戸 #2 の水位は低限界値に達しており、後者によるしか揚水量は増せない。ここでは、井戸 #1 の水位が上って、それが達せられている。井戸 #1 の水位上昇の結果、井戸 #3 と #4 の揚水量もやや増えている。Case 8 － 11 では、揚水量の制約は主に井戸 #3 での水位上昇で満されている。一方、最適解が得られない Case 5 、6 および 12 は、揚水量の制約を他の制約点での水頭上昇で満せなくなった場合である。

ここで解析した三層の帯水層と等価な透水係数をもつ単層の帯水層について、各井戸の最適取水量と総取水量を求めた結果を、表－3 に示す。この表で、例えば、Case 4′は単層の場合であり、Case 4 は表－2 に示す三層の場合の結果である。図－5 に、表－3 の一部を示す。総揚水量の差が小さい場合でも、個々の井戸の最適取水量に大きな差が見られる。

難透水層を横切る水量、すなわち漏水量を、

表－1 揚水量の下限値 (m^3/day)

	Well					
	#1	#2	#3	#4	#5	Total
A	0	0	0	0	0	0
B	60	10	30	60	10	170
C	60	20	30	60	10	180
D	60	30	30	30	60	205
E	60	30	60	60	25	235
F	60	70	60	60	55	305

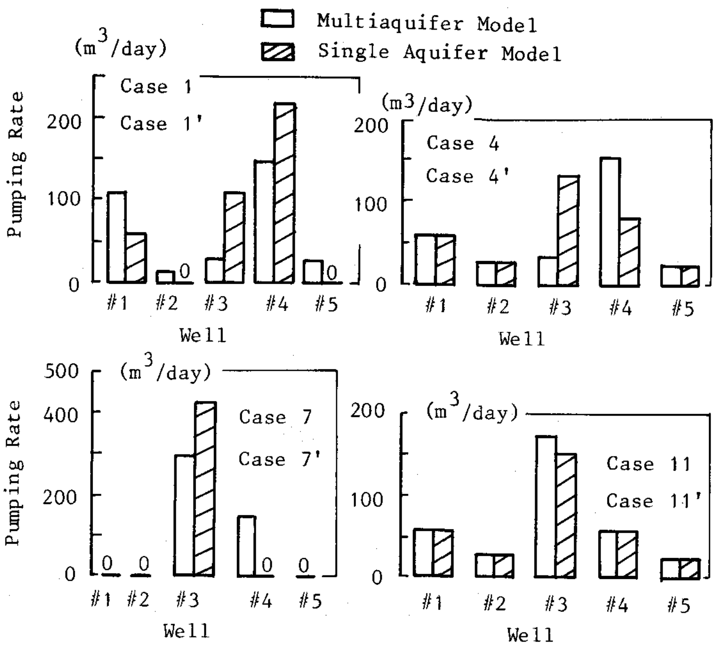
表－2 最適揚水量 (m^3/day)

Case	井戸の低限界水頭	揚水量の下限値	最適揚水量					
			Well #1	#2	#3	#4	#5	Total
1	取水前水位の －1 m	A	108	14	31	148	31	332
2		B	108	14	31	148	31	332
3		C	112	20	32	153	10	327
4		D	60	30	35	154	25	304
5		E	No solution					
6		F	No solution					
7	取水前水位の －5 m	A	0	0	297	148	0	445
8		B	60	10	251	60	10	391
9		C	60	20	230	60	10	380
10		D	60	30	176	60	25	351
11		E	60	30	176	60	25	351
12		F	No solution					
13	－10 m	A	0	0	449	0	0	449

表－3 最 適 揚 水 量
(三層モデルと単層モデルの比較)

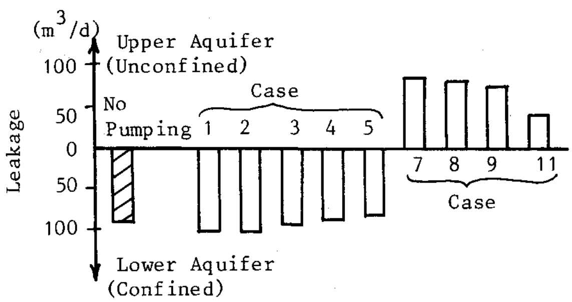
Case	最適揚水量 (m^3/day) #1	#2	#3	#4	#5	Total
1′	60	0	110	216	0	386
1	108	14	31	148	31	332
4′	60	30	132	82	25	329
4	60	30	35	154	25	304
5′	60	30	132	82	25	329
5	No solution					
7′	0	0	426	0	0	426
7	0	0	297	148	0	445
8′	60	10	228	60	10	368
8	60	10	251	60	10	391
9′	60	20	207	60	10	357
9	60	20	230	60	10	380
11′	60	30	153	60	25	328
11	60	30	176	60	25	351

図ー6 に示す。この漏水量は、不圧および被圧の帯水層のそれぞれについて、流入量から流出量と揚水量を差引いて算出した値である。漏水は、実際には、上層で取水すれば下層から上層へ、逆に下層から揚水すれば上層から下層へ向って生じ、その方向は場所によって異なる。図ー6 の漏水量は上述のような局所的な漏水量でなく、領域全体での二つの透水層間の漏水量である。取水しないときの漏水は上層から下層へ 93 m^3/d で、上層への流入量 440 m^3/d の 20 % である。一方、Case 7 では、下から上に 87 m^3/d の漏水がある。つまり、揚水によって合計 180 m^3/d の水量の移動方向が変ったことになろう。このように、漏水が水収支あるいは取水計画に与える影響は大きい。



図ー5 最適取水量（三層帯水層としての解析結果と単層帯水層としての解析結果の比較）

表ー4 は、上流境界での水位を 70 m に保った場合の最適取水量である。この表で Case 14、15 および 16 の制約条件は、それぞれ上流境界で流入量を一定としたCase 4、10 および 13 の条件と同じである。図ー7 は、上流の境界条件が水位一定であるときと、流入量一定であるときの総取水量の比較である。上流で水位一定のときには、上流に位置する井戸の水位をできるだけ下げれば総取水量は大きく増す。



図ー6 透水層間の漏水量

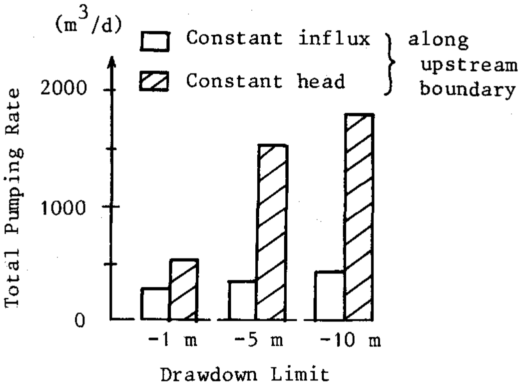
表ー4 では、揚水量の下限値の制約が緩くなるにつれて、上流に位置する井戸 #2 と #5 の水位を下げて揚水量をふやすことで、他の井戸の揚水量は減っても、結局、総取水量が増すことが示される。これに対し、上流境界で流入量が一定のときには、上流境界での制約条件と領域内での制約条件とのどちらが厳しいかで、最適取水量が決まる。表ー2 の Case 4、10 および 13 では、上流境界での制約がより厳しいので、下流に位置する井戸からできるだけ多く取水することで、総取水量は増す。以上のように、上流での境界条件の設定は最適取水量の算定結果に大きな影響をもつので、解析に際しては慎重な条件設定が必要である。

表ー4 最適揚水量

Case	井戸の低限界水頭	揚水量の下限値	最適揚水量 (m^3/day) #1	#2	#3	#4	#5	Total
14	−1 m	D	189	66	36	174	84	549
15	−5 m	D	392	477	132	60	465	1526
16	−10 m	A	0	702	0	0	1094	1796

6．まとめ

本論文では、多層帯水層の様々な地層から複数の井戸で取水する場合について、各井戸の最適取水量を決定する方法を述べた。ここで最適取水とは、制約条件として、揚水に伴う水位・水頭の低下限界値を井戸を含む幾つかの地点（制約点）で規定し、さらに各井戸で揚水すべき水量の下限値を設定したうえで、領域全体の総取水量を最大にするような取水である。まず、多層帯水層内の流れを、透水層では水平二次元流、難透水層では鉛直一次元流として扱い、基礎式をガラーキン法で離散化した。つぎに、離散式から、個々の井戸の揚水量と制約点における水位・水頭との関係式を導びき、これに線形計画法を適用した。



図―7　総取水量（上流境界で流入量一定の場合と水位一定の場合の比較）

解析例では、二つの透水層に一つの難透水層がはさまれている三層構造の帯水層をとりあげ、井戸も両透水層から取水するもの、上層だけから取水するもの、下層だけから取水するもの、を設定した。

この解析を通じて、総揚水量あるいは各井戸の揚水量と制約条件との関係および最適解のもつ意味が明示された。また、不圧と被圧の二つの帯水層から取水する場合と、これら二層と等価な透水係数をもつ単層の帯水層から取水する場合について、最適揚水量を比較した。その結果、両者で総取水量の差が小さいときでも、各井戸の揚水量には大きな差が見られた。さらに、両透水層の間の漏水量は、多層帯水層の水収支を考えるうえで重要であることが明らかになった。したがって、広域にわたる取水計画に関する解析で、多層帯水層の解析モデルは極めて有力であると考えられる。最後に、上流境界で流量一定の場合と、水位一定の場合とについて、最適取水量を比較した。その結果、境界条件が解析結果に及ぼす影響は大へんおおきく、解析での条件設定が重要であることが示された。

参考文献

[1] Aguard,E. and I.Remson: Ground-Water Hydraulics in Aquifer Manage-ment, ASCE, 100(HY-1), 103-118, 1974

[2] 上田年比古、神野健二、長野益徳：広領域地下水からの最適井戸取水について、土木学会論文報告集、283、33 －43、1979

[3] 佐藤邦明、渡辺邦夫：地下水の適正揚水システムに関する研究、水資源に関するシンポジウム、506―511、1977

[4] Aguard,E.,et al: Optimal Pumping for Aquifer Dewatering,ASCE, 100(HY-7),869-877,1974

[5] 神野健二、長野益徳：深井戸工法における最適揚水量の決定および揚水操作方法について、土木学会論文報告集、305、73―84、1981

[6] 上田年比古ほか：準一様流を仮定できる定常３次元地下密度流の数値解と最適井戸取水について、土木学会論文報告集、301、83―92、1980

[7] 古林隆：線形計画法入門、産業図書、1980

[8] 板倉透清：オペレーションズ・リサーチおよびリニア・プログラミング、利用の手引―プログラム・ライブラリ編―、京都大学大型計算機センター、114―128、1980