

閉鎖水域における流動特性について
Wind Driven Circulation of Water in Confined Area

鳥取大学工学部 正 員 道 上 正 規
鳥取大学工学部 正 員 鈴 木 幸 一
鳥取大学工学部 正 員 桧 谷 治

1. はじめに

近年、閉鎖水域、特に湖沼における水質悪化が問題視されてきており、それに従って湖沼の流動特性を明らかにしようとする研究が数多くなされてきた。しかしながら、湖沼の中に島などが存在する場合を対象としたものは少なく、その流動特性も十分解明されていない。そこで、本研究は湖内に島が存在する湖山池を対象として、風によって起こされる湖流について有限要素法を用いて数値解析し、その流動特性を明らかにすることを目的とした。本研究で対象とした湖山池は図-1に示すとおりで、鳥取市西部に位置する湖面積 6.9km²、湖岸線長 17.5km、平均水深約 3.0m の非常に浅い湖である。この湖も近年水質悪化、特に富栄養化が進んでおり、その対策が急がれている。この湖の特徴は湖内に大小5つの島が存在していることで、そのためその流動特性も島が存在しない場合とは異ってくるものと考えられる。また、湖周辺の地形も複雑で、風の吹く方向によっては、湖面上の風速も大きく変化するものと思われ、湖流の解析には湖面での風速に場所的分布を持たす必要がある。

2. 基礎式¹⁾

基礎式は、湖山池が非常に浅い湖であることを考慮し運動方程式において慣性項および水平粘性項を無視した式(1)～式(5)に示す Ekman-type のものとした。

運動方程式：

$$\frac{\partial u}{\partial t} - f v = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + f u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \eta \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \dots\dots\dots (2)$$

$$g = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

連続式：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

境界条件：

湖底面 ($z = -h$) で $u = v = w = 0$, 自由表面 ($z = 0$) で $\tau_x = \eta \frac{\partial u}{\partial z}$, $\tau_y = \eta \frac{\partial v}{\partial z} \dots\dots\dots (5)$

ここに、 u , v および w はそれぞれ x (東方に正) , y (北方に正) および z (鉛直上方に正で水面で0) 方向の流速、 f はコリオリ係数で $f = 0.0000845$, η は鉛直拡散係数、 τ_x および τ_y は水面での x および y 方向の風によるせん断応力 τ_{wind} を湖水の密度 ρ で割ったもの、 h は水深を示している。

つぎに、上に示した基礎式を次式(6)のような方法で Laplace 変換を行なった後、式(5)の境界条件のもとに運動方程式を解くと $\tilde{u}$ および $\tilde{v}$ に関する鉛直分布が圧力勾配 $\partial \bar{p} / \partial x$, $\partial \bar{p} / \partial y$ の関数として得られる。また、その際圧力分布については静水圧分布として与えている。

$$\tilde{u} = \int_0^\infty u e^{-\eta t} dt \dots\dots\dots (6)$$

したがって、断面平均流速 $\bar{u}$ および $\bar{v}$ は次式のようにして求められる。

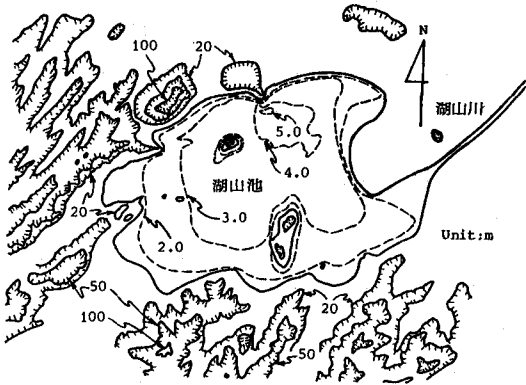


図-1 湖山池の概要

$$\bar{u} = -\frac{1}{h} \int_{-h}^0 \bar{u} \, dz, \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \int_{-h}^0 \bar{v} \, dz \quad \dots\dots\dots (7)$$

つぎに、次式(8)のように定義される流れ関数 $\bar{\psi}$ を導入し、

$$\bar{u} = -\frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y}, \quad \bar{v} = \frac{1}{h} \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$\partial \bar{P} / \partial x$ および $\partial \bar{P} / \partial y$ を消去すると、最終的に次式(9)で示される $\bar{\psi}$ に関する階円型の微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial x_*^2} + \frac{\partial^2 \bar{\psi}}{\partial y_*^2} + A(x_*, y_*, s) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial x_*} + B(x_*, y_*, s) \frac{\partial \bar{\psi}}{\partial y_*} + C(x_*, y_*, s) = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

ここに、 A 、 B 、 C は x_* 、 y_* および s の関数であるが、その関数形は文献2)に示しているのでここでは省略する。

また、添字 $*$ は無次元変数を示しており、それらは以下のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} x_* &= x/L, y_* = y/L, z_* = z/L, t_* = ft, u_* = (fL/gD)u, \\ v_* &= (fL/gD)v, w_* = (fL^2/gD^2)w, h_* = h/D, \rho_* = (\rho/\rho gD) + (z/D), \\ \Delta_* &= (fL\tau_*/\eta g) \text{ and } \Gamma_* = (fL\tau_*/\eta g). \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに、 L および D はそれぞれ水平方向および鉛直方向の代表寸法を示し、ここでは $L=2,500m$ 、 $D=3.0m$ とした。

3. 有限要素法によるシミュレーション

解析方法は、まず上に示した式(9)に対して有限要素法を用いて数値シミュレーションを行ない $\bar{\psi}(s)$ を求め、その後他の未知数 $\bar{u}$ あるいは $\bar{v}$ などを求める。そして、それぞれの未知数に対して Laplace 逆変換³⁾を行ない実時間 t に対する値に変換するというものである。

3・1 定式化

有限要素法を適用するためには、まず対象領域を有限の要素に分割しなければならない。ここでは、一般的に用いられている三節点三角形要素で図-2に示すように554の要素に分割した。特に島と島の間あるいは島と湖岸との間は密に分割を行なっている。

つぎに、 $\bar{\psi}$ の試験関数については次式のように与える。

$$\bar{\psi} = N_i \bar{\psi}_i \quad i=1,2,3 \quad \dots\dots\dots (11)$$

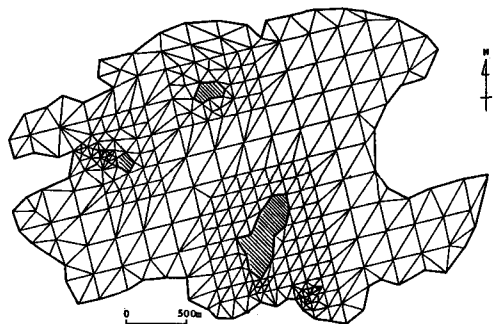


図-2 有限要素メッシュ

ここで、 $\bar{\psi}_i$ は三角形要素の頂点での値を示し、 N_i は形状関数で次のような一次多項式と仮定した。

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad , \quad i=1,2,3 \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここに、 A は三角形要素の面積であり、 $a_i = x_j y_k - x_k y_j$ 、 $b_i = y_j - y_k$ 、 $c_i = x_k - x_j$ で、 i, j, k は循環的に置換えられる。重み関数を N_i とし、式(11)を式(9)に代入し、ガラーキン積分した後、式を整理すると各要素に対して次式を得る。

$$[K] \{ \phi \} = [F] \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$\text{ここに、} [K] = \iint [k_{ij}] \, dx \, dy, \quad \{ \phi \} = \{ \bar{\psi}_i \} \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\begin{aligned} k_{ij} &= AN(i) q_{ik} (b_i b_j + c_i c_j) - AN(i) (b_j b_k q_{1k} + b_j c_k q_{2k}) \\ &\quad - AN(i) (c_j c_k q_{1k} - c_j b_k q_{2k}) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$F_i = AN(i) \{ \tilde{r}'(c_k q_{ik} + b_k q_{jk}) + \tilde{d}'(b_k q_{ik} - c_k q_{jk}) \} \dots\dots\dots (16)$$

$$+ \oint_{S_2} N_i N_k q_{ik} Q ds$$

$$AN(i) = \iint N_i dx dy \dots\dots\dots (17)$$

ここで、 k は総和規約であり、 Q は境界の法線方向の流量を示している。また、 s は境界の接線方向の座標軸であり、 S_2 は自然境界条件を与える外部境界を示している。その他の係数については、文献 2) に示しているので省略する。

各要素について得られた式 13 を重ね合わせ、全体マトリックスを作成した後、基本境界条件を与えて解けば、各節点に対する ψ が求まる。

3・2 境界条件と諸係数

上式を解くためには自然境界条件と基本境界条件が必要となる。まず、自然境界条件は外部境界 S_2 (河川などの流入流出部) における法線方向の流量 Q として与えるが、ここでは湖山池に流入流出する河川 (湖山川) の流量が非常に少ないので、すべて基本境界条件として与えた。基本境界条件に対してはスリップ条件 (外部境界の接線方向の流れは認めるが、法線方向の流れは認めない) として ψ を一定として与える。しかし、ここで島の ψ の与え方が問題となるが、本研究では以下に示す Cheng⁴⁾ の方法を用いて与えた。

まず、 ψ の境界での値を次のように与える。

$$\left. \begin{array}{ll} \text{湖岸境界 } \lambda_0 \text{ で} & \psi = 0 \\ i \text{ 番目の島の境界 } \lambda_i \text{ で} & \psi = C_i \end{array} \right\} \quad i = 1, 2, \dots, n \dots\dots\dots (18)$$

ここに n は島の個数を示す。つぎに、 ψ に関する基礎式 (9) が線型であるので、その解を次のように表現できる。

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^n C_i \psi_i \dots\dots\dots (19)$$

ここで、 ψ_0 は全ての外部境界で ψ の値を 0 とした時の解であり、 ψ_i は λ_i だけを $\psi=1$ にし、それ以外の境界で $\psi=0$ とした時の解である。つぎに、 λ_0 で囲まれた全領域内で解が特異性をもたないという条件を考え、それぞれの島の境界内で基礎式を積分すると、 C_i に関する連立方程式が得られる。その式を解けば C_i を決定することができる。

水面での風によるせん断応力 τ_{wind} については、一般に風速 U_z (m/sec) と風摩擦係数 C_f との関数として次式で与えられる。

$$\tau_{wind} = \rho_a \cdot C_f \cdot U_z^2 \dots\dots\dots (20)$$

ここに、 ρ_a は空気の密度である。 C_f について便宜的に Deacon & Webb⁵⁾ の提案式、

$$C_f = (1.0 + 0.07 U_z) \times 10^{-3} \dots\dots\dots (21)$$

で与え、 τ_{wind} を計算した。また、鉛直拡散係数 η は、鉛直方向に一定と考え余越・富所の推定式⁶⁾

$$\eta = 0.00056 \sqrt{C_f} \cdot D \cdot U_z \dots\dots\dots (22)$$

によって与えた。

3・3 Laplace 逆変換

s の関数である $\tilde{\psi}(s)$ (あるいは $\tilde{u}(s)$, $\tilde{v}(s)$ など) は Laplace 逆変換によつて実時間 t の関数に変換しなければならない。その方法は以下に示すような Schapery³⁾ の提案した近似法によって行なう。

まず、 $u(t)$ は次のように表現できると仮定する。

$$u(t) = u_0 + \Delta u(t) \dots\dots\dots (23)$$

ここに、 u_0 は定常状態における u で、次式より求められる定数である。

$$u_0 = \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \bar{u}(s) \quad \dots\dots\dots (24)$$

また、 $\Delta u(t)$ は有限なDirchlet級数によって次式のように表わされる。

$$\Delta u(t) = \sum_{j=1}^n a_j e^{-b_j t} \quad \dots\dots\dots (25)$$

ここに、 a_j および b_j は係数であり、 n は級数の個数である。式(24)を式(25)に代入し、Laplace変換を行なうと次式が得られる。

$$s \bar{u}(s) = u_0 + \sum_{j=1}^n \frac{a_j}{1 + \frac{s}{b_j}} \quad j = 1, 2, 3, \dots, n \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで、 n と b_j が得られれば、 s を n 個選ぶことによって式(26)は a_j に関する n 個の連立方程式となり、 a_j について解けば式(25)により $u(t)$ が求まる。従来の研究³⁾により $b_j = s_j$ として b_j を評価すれば誤差が最小になることが明らかになっており、結局残る問題は n と s_j を決定することである。

n と s_j の決定方法は図-3に示すような $s \bar{u}(s)$ と $\log s$ の関係から $s \bar{u}(s)$ の変化領域について s の値を n 個選択し試行錯誤的に n と s_j を決定すればよい。本研究の場合 $s \bar{u}(s)$ と $\log s$ を示すと図-4のようであり、この図から $n=20$ とした。また、 s_j の選択の際には s_j と $s_j + 1$ との比 r を一定にすると最適解が得られることから、本研究では s_1 を100とし、 r を2.512として s_j を決定した。

4 シミュレーション結果と実測

4.1 シミュレーション結果

解析条件は、後述する実測時の条件を考慮して、風がなく静止した状態から急に風速2.5 m/secのNWの風が連続して吹くという場合を考えた。また、湖面上での風の分布は図-1に示しているように、西側では山が湖岸までせまっており、その影響を受けて一様でないと考えられる。ここでは山の高さによる風速の減衰だけを考慮して便宜的に図-5のように分布を与えて行った。その場合、 $\tau_{wind} = 9.0 \times 10^{-3}$ kg/m²・sec， $\eta = 1.44 \times 10^{-4}$ m²/secである。

図-6は図-5に示す地点での表面流速およびその流向の時間的変化を示し、図-7はそのうちの2地点での鉛直分布の時間的変化を示している。両図から、風の吹きはじめは中央の2つの島を中心に時計回りに流れながら南東岸に吹き寄せが起こり、もどりの流れは反時計回りに流れていることがわかる。さらに、その後は同様な振動を繰り返しながら定常状態に近づいて行くが、その振動周期も次第に長くなっている。吹き寄せの状態ともどりの状態の代表的な流れを示したものが図-8から図-11で、吹き寄せ状態($t=15$ min)での表面の流速分布を示したものが図-8、静水面下2mでの流速分布を示したものが図-9である。また、もど

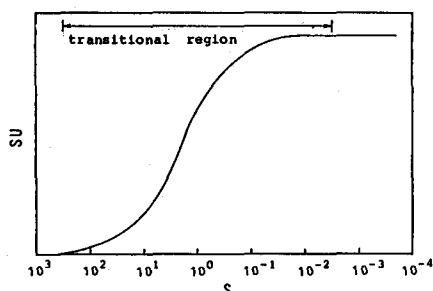


図-3 $s \bar{u}(s)$ と $\log s$ との関係

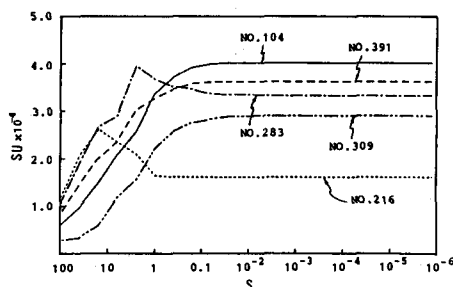


図-4 $s \bar{u}(s)$ と $\log s$ との関係(計算値)

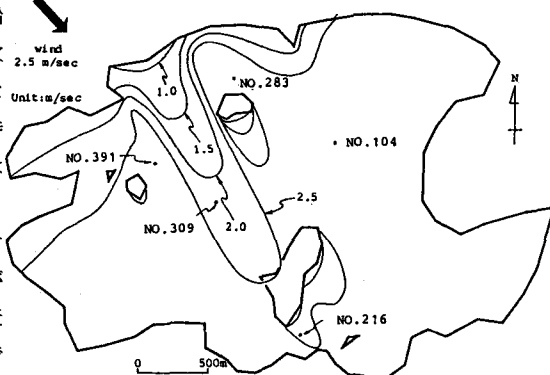


図-5 湖面上での風速の分布

りの状態($t=30\text{min}$)の流速分布を示したものがそれぞれ図-10および図-11である。これらの図から、吹き始めにおいては島のまわりに強い水平循環流が起っており、そのため流向は鉛直方向に一樣になっていることがわかる。しかし、図-8からも明らかなように流れが定常状態に近づいて行くにつれて島のまわりの循環流が減衰して行き、流れは表層で吹送方向に、底層で逆方向に流れる鉛直循環流が卓越するようになる。図-12および図-13は $t=1500\text{min}$ での表面および静水面下2mでの流速分布を示しているが、すでに完全な鉛直循環流の状態を呈していることがわかる。

4・2 実地観測結果

本研究では、昭和58年1月27日に湖山池において湖流の実地観測を行なった。観測方法は湖内に表面付近、静水面下1mおよび2mの流れに应答するフロートを浮かせ、トランシットにより陸上の2点からそのフロートを20分間隔で追跡するという方法で行なった。

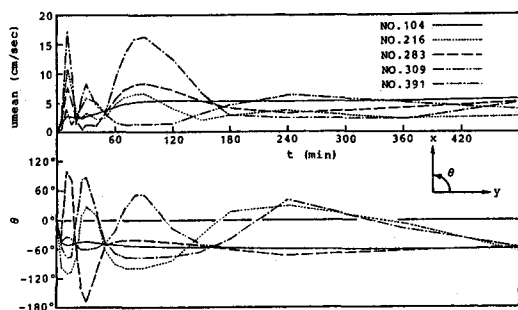


図-6 表面での流速と流向の時間的変化

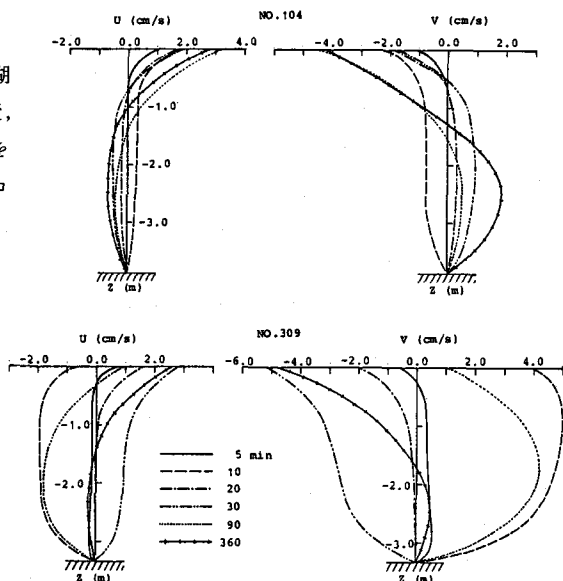


図-7 鉛直流速分布の時間的変化



図-8 流速分布 ($t=15\text{min}$, 表面)



図-9 流速分布 ($t=15\text{min}$, 静水面下2m)



図-10 流速分布 ($t=30\text{min}$, 表面)



図-11 流速分布 ($t=30\text{min}$, 静水面下2m)

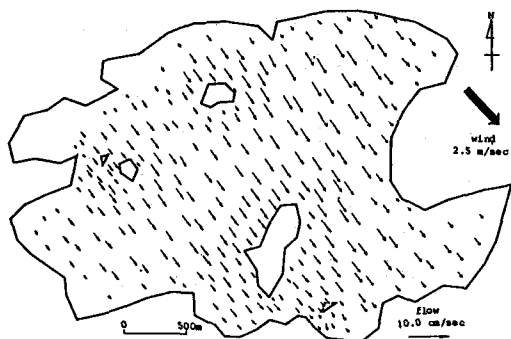


図-12 流速分布 ($t = 1500 \text{ min}$, 表面)

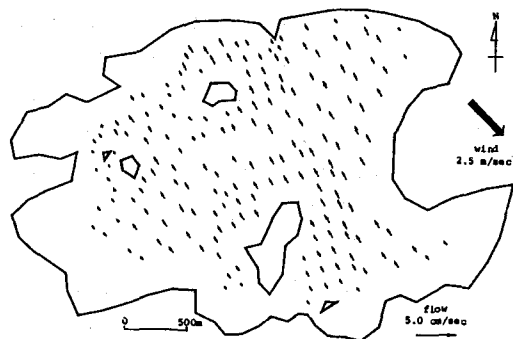


図-13 流速分布 ($t = 1500 \text{ min}$, 静水面下 2m)

その結果の一例を示したものが図-14である。この図から判断すると、島のまわりに強い反時計回りの水平循環流が生じていると思われる。

図-15は、午後の北西の風の場合の観測結果と、先ほど示した解析結果と比較したものである。吹き始めの段階で食い違いが生じているが、本研究で用いたモデルでは初期条件を流速ゼロとしているので、当然食い違いが生じるものと考えられる。初期条件を別な形で与えるためには初期の状態での $\partial^2\psi/\partial x^2$ あるいは $\partial^2\psi/\partial y^2$ の値が必要となり、式(11)の試験関数を x, y の2次式で与えなければならないが、その計算は非常に複雑なものとなる。

5. おわりに

本研究では、湖内に島が存在する場合における風によって起こされる湖流の数値解析を有限要素法を用いて行なったのであるが、そのような湖の基本的な流動特性についてはこのモデルで十分解析できるものとする。しかし、より正確な湖流の再現を行なうためには、 ψ の試験関数の精度を上げることが必要であることはもちろん、水面上での風速の分布の与え方なども検討しなければならない問題であると考えられる。

参考文献

- 1) Young, F.D. and J.A. Liggett, Proc. ASCE, HY 103, 1977.
- 2) Michiue, Suzuki, Hinokidani, 島大工学部研究報告, 第14巻, 1983.
- 3) Shapery, R.A., Proc. 4th U.S. National Congress of Applied Mechanics, Vol. 2, 1962.
- 4) Cheng, R.T., International Journal For Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 1972.
- 5) Deacon, E.L. and E.K. Webb, Interscience, New York, 1962.
- 6) 余越・富所, 土木学会論文報告集, 第276集, 1978.

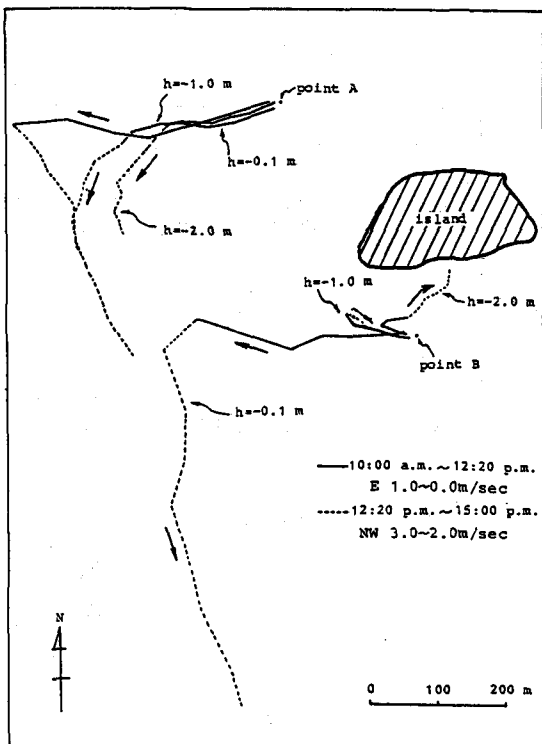


図-14 湖流の観測結果

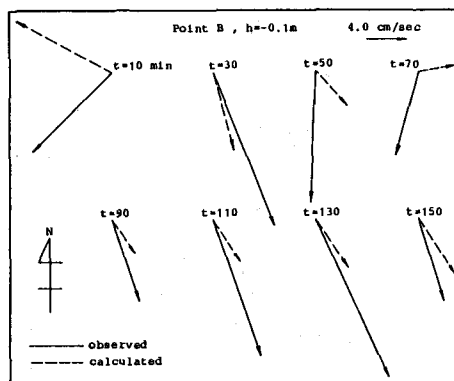


図-15 観測結果と解析結果との比較