

移流分散機構に関する確率論的研究 Stochastic Considerations on Longitudinal Dispersion

広島大学工学部 正員 細田 尚
広島大学工学部 正員 余越 正一郎

1. 序 論

本研究は、移流分散現象を Lagrange 相関関数を用いて記述し、その特殊なばあいが Taylor¹⁾の拡散理論であることを示す。次に、流れ方向の一様性より簡便化した基礎式を用いて、点源として瞬間的に放出されたトレーサー・クラウドの時間的発達過程を検討する。さらに、基礎式を放出点位置座標で断面積分したものが、Dewey・Sullivan²⁾が物理的考察によって導いたものと同一であることを示す。また、流速分布として指数分布を与えたときの、面源と点源による、トレーサー・クラウドの成長過程を考察する。

2. 基礎式

空間座標を $X(x, y, z)$ 、流速を $U(u, v, w)$ とすると、たとえば、 X 方向の Lagrange 的速度の相関係数 $R_L(t-t_0|x_0)$ は次のように表される。

$$\langle u(x, t_0)^2 \rangle R_L(t-t_0) = \iiint_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, t) u(x_0, t_0) \phi(x-x_0, t-t_0) \rangle dx \quad (1)$$

ここに、 $\phi(x-x_0, t-t_0) = \delta(x-x_1)$ 、 x_1 ：時刻 t_0 に x_0 に存在した流体粒子の時刻 t での座標、 $\langle \rangle$ ；アンサンブル平均を表す。

Corrsin³⁾ は、

$$\langle u(x, t) u(x_0, t_0) \phi(x, t|x_0, t_0) \rangle \doteq \langle u(x, t) u(x_0, t_0) \rangle \langle \phi(x, t|x_0, t_0) \rangle \quad (2)$$

と仮定して、

$$R_L(t-t_0, x_0) \doteq \iiint_{-\infty}^{\infty} R_E(x, t|x_0, t_0) C(x, t|x_0, t_0) dx \quad (3)$$

を導いた。ここに、 $C(x, t|x_0, t_0) = \langle \phi(x, t|x_0, t_0) \rangle$ 、 $R_E(x, t|x_0, t_0)$ ； u の時空間相関係数。また、(3)式は、DI 近似を用いて導かれることが Robert⁴⁾によって示されている。

上記では、乱流場の一様性を仮定していないため、Lagrange 相関が粒子の初期座標 x_0 の関数となっている。一方、トレーサー・クラウドの統計的分散の成長は、乱流場の一様性を仮定しないとき、次のように定式化される。

時刻 t_0 に x_0 より放出された流体粒子の x 座標 $X(t)$ は、Lagrange 速度 $u_L(t)$ を用いて

$$X(t) = \int_{t_0}^t u_L(s) ds \quad (4)$$

となり、これより

$$\frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = 2 \int_0^t \langle u_L(s) u_L(t) \rangle ds \quad (5)$$

であって、 $\langle u_L(s) \cdot u_L(t) \rangle$ は Euler 速度を用いれば、次のように書ける。

$$\langle u_L(s) u_L(t) \rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} \langle u(x, t) \phi(x, t | x', s) \cdot u(x', s) \phi(x', s | x_0, t_0) \rangle dx \, dx' \quad (6)$$

ここで、Robert⁴⁾と同様に、

$$\begin{aligned} \langle u(x, t) u(x', s) \phi(x, t | x', s) \phi(x', s | x_0, t_0) \rangle \\ \approx \langle u(x, t) u(x', s) \rangle \langle \phi(x, t | x', s) \rangle \langle \phi(x', s | x_0, t_0) \rangle \end{aligned} \quad (7)$$

と近似して

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \int_0^t \int_{-\infty}^{\infty} \langle u^2(x', s) \rangle R_L(t-s, x') C(x', s | x_0, t_0) dx' \, ds \quad (8)$$

が得られる。

ここで、定常一様乱流場の仮定を行えば、

$$R_E(x, t | x_0, t_0) = R_E(x - x_0, t - t_0)$$

$$C(x, t | x_0, t_0) = C(x - x_0, t - t_0 | 0, 0)$$

$$\langle u_L^2(x_0, t_0) \rangle = \langle u^2(x_0) \rangle = \text{一定}$$

であり、

$$\begin{aligned} R_L(t - t_0, x_0) &= \int_{-\infty}^{\infty} R_E(x - x_0, t - t_0) C(x - x_0, t - t_0 | 0, 0) d(x - x_0) \\ &= R_L(t - t_0) \end{aligned} \quad (9)$$

であって、(8)式は

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle = \langle u^2(x_0) \rangle \int_0^t R_L(\tau) d\tau \quad (10)$$

となる。これは、Taylor の理論に他ならない。

3. 一様な鉛直二次元流れの場合への適用

今、Fig-1 のような、 x 方向に一様な鉛直二次元流れを考えると、

$$u(x, t) = U(y) + u'(x, t)$$

と表せる。このとき

$$\begin{aligned}
& \langle u(x, t) u(x', s) \rangle \\
&= \langle (U(y) + u'(x, t)) (U(y') + u'(x', s)) \rangle \\
&= U(y) U(y') + \langle u'(x, t) u'(x', s) \rangle \quad (11)
\end{aligned}$$

であり、(8)式は、

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle \\
&= \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty (U(\eta) U(\eta') + \langle u'(a, t) u'(a', s) \rangle) \cdot \\
&\quad \cdot C(a, t | a', s) C(a', s | a_0, t_0) d\xi' d\eta' d\xi d\eta ds \quad (12)
\end{aligned}$$

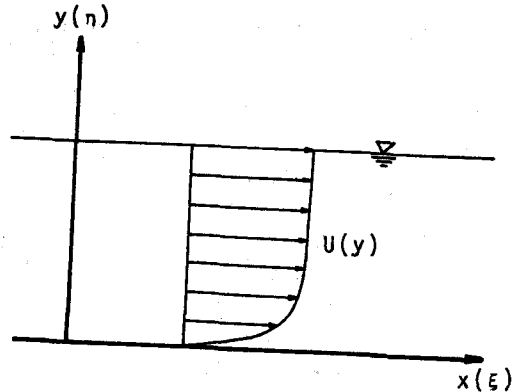


Fig-1 Definition Sketch

となる。ここに、 $\xi = x/h$, $\eta = y/h$, $a = (\xi, \eta)$ 。(12)式は、Chatwin⁸⁾によって示され、管路内の壁面より離れた中央付近から放出されたトレーサー・クラウドの初期発達過程が検討された。

本研究では、(12)式を簡単化し、初期発達過程から、トレーサーが断面全体に拡がって行く段階も含めた解析を行なう。

まず、(12)式の前半

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle^{(1)} = \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 \int_0^\infty U(\eta) U(\eta') C(\xi, \eta, t | \xi', \eta', s) \cdot \\
&\quad \cdot C(\xi', \eta', s | \xi_0, \eta_0, t_0) d\xi' d\eta' d\xi d\eta ds \quad (13)
\end{aligned}$$

について考察する。

$$C_0(\eta, t | \xi', \eta', s) = \int_0^\infty C(\xi, \eta, t | \xi', \eta', s) d\xi \quad (14)$$

を導入する。 C_0 は、Aris のモーメント方程式⁶⁾の0次の解と同一である。また、(14)式は ξ' に無関係で、 $C_0(\eta, t | \eta', s)$ である。よって、(13)式は

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle^{(1)} = \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 U(\eta) U(\eta') \cdot \\
&\quad \cdot C_0(\eta, t | \eta', s) C(\xi', \eta', s | \xi_0, \eta_0, t_0) d\xi' d\eta' d\eta ds \\
&= \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 U(\eta) U(\eta') C_0(\eta, t | \eta', s) C_0(\eta', s | \eta_0, t_0) d\eta' d\eta ds
\end{aligned}$$

となる。

C_0 が、定数係数の拡散方程式

$$\frac{\partial C_0}{\partial t} = D \frac{\partial^2 C_0}{\partial y^2}$$

に従うとする。これは、 C が定数係数の乱流拡散方程式に従うばあいに対応している。このとき、(16)式の解は、

$$C_0(\eta, t | \eta', 0) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{D_y t}{h^2} (n\pi)^2\right) \cos(n\pi\eta) \cos(n\pi\eta') \quad (17)$$

である。 η' は、 $t=0$ での点源の位置である。(17)式を(15)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle^{(1)} &= \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 U(\eta) U(\eta') \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \exp\{-(t-s) \cdot (n\pi)^2\} \cdot \right. \\ &\quad \left. \cdot \cos(n\pi\eta) \cos(n\pi\eta') \right] \cdot \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{\infty} \exp\{-s(m\pi)^2\} \cos(m\pi\eta') \cos(m\pi\eta_0) \right] d\eta d\eta' ds \end{aligned} \quad (18)$$

となる。

ここで、 $U(\eta)$ を断面平均流速 $\bar{U}$ とそれよりの偏差 $U'(\eta)$ とにわけると、(18)式は、 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\langle X^2(t) \rangle^{(1)} - \bar{U}^2 t^2) \rightarrow \frac{2 h^2}{D_y} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[\int_0^1 U'(\eta) \cos(n\pi\eta) \right]^2 \quad (19)$$

となることが示される。

また、(16)式を η_0 で 0 から 1 まで積分すれば面源のばあいとなり、そのとき、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\langle X^2(t) \rangle^{(1)} - \bar{U}^2 t^2) = \int_0^t \int_0^1 \int_0^1 U'(\eta) U'(\eta') C_0(\eta, t-s | \eta', s) d\eta d\eta' ds \quad (20)$$

となる。——は、断面平均を表す。(20)式は、Dewey・Sullivan²⁾ が用いた式と同一である。

(17)式を(20)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\langle X^2(t) \rangle^{(1)} - \bar{U}^2 t^2) &= \int_0^t \int_0^1 U'(\eta) U'(\eta') \\ &\quad \cdot \left[2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{h^2}{D_y} \frac{1}{(n\pi)^2} \left[1 - \exp\left(-\frac{D_y t}{h^2} (n\pi)^2\right) \right] \cos(n\pi\eta) \cos(n\pi\eta') \right] d\eta d\eta' \end{aligned} \quad (21)$$

となる。 $t \rightarrow \infty$ のとき、(21)式は(19)式に漸近する。

次に、(12)式の残された部分

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle^{(2)} &= \int_{t_0}^t \int_0^1 \int_0^1 \int_0^{\infty} \langle u'(a, t) u'(a', s) \rangle \cdot \\ &\quad \cdot C(a, t | a', s) C(a', s | a_0, t_0) da' da ds \end{aligned} \quad (22)$$

について若干の考察を加える。 $\langle u'(a, t) u'(a', s) \rangle$ は、理論的にも実験的にも表わすのが非常に困難な量である。もし、

$$\langle u'(a, t) u'(a', s) \rangle = \langle u'^2 \rangle \exp\left(-\frac{t-s}{T_0}\right) \quad (23)$$

と表わせば、

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \langle X^2(t) \rangle^{(2)} = \langle u'^2 \rangle T_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{T_0}\right) \right] \quad (24)$$

となる。通常、 $\langle X^2(t) \rangle^{(1)} \gg \langle X^2(t) \rangle^{(2)}$ と考えて、 $\langle X^2(t) \rangle^{(2)}$ の項を無視することが多く、本研究でも次節で、

$\langle X^2(t) \rangle^{(1)}$ の挙動についてのみ検討する。

4. 計算例

$U(\eta)$ に指数分布を仮定する。

$$U(\eta) = \bar{U} \left\{ (m+1) \eta^m - 1 \right\} \quad (m \leq 1) \quad (25)$$

移流分散係数 D_L が

$$D_L = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\overline{\langle X^2(t) \rangle}^{(1)} - X_c^2) \quad (26)$$

で定義される。ここに、 X_c ; トレーサー・クラウドの重心の位置。

$U(\eta)$ を(25)式で表わすとき、Taylor の理論^{7),8)}、あるいは、Chatwin による Aris のモーメント方程式の漸近解⁹⁾ によって、 $t \rightarrow \infty$ のとき

$$D_L = \frac{2m^2}{3(m+3)(2m+3)} \frac{\bar{U}^2 h^2}{D_v} \quad (27)$$

と表わせる。(19)式と(27)式の一致を、式のうでで示すことができないので、両者の計算値を Fig-2 に示した。これより、(19)、(27)式は同一のものと考えられよう。

m をパラメータとして、面源として瞬間的に放出されたトレーサーの D_L と時間 t の関係を示したのが Fig-3 である。どのばあいも、 $t' = t \cdot D_v / h^2$ がほぼ 0.4 程度で一定値に漸近しているのがわかる。

次に、現実の流速分布に近い $m=1/7$ のときの、放出点位置の違いによる D_L の成長の違いを、(18)式により計算し、Fig-4 に示した。これより、底面付近で放出されたトレーサー・クラウドの初期の成長率が、水面付近の成長率より大きいことがわかる。図には、参考のため、面源のばあいも示した。

5. 結 論

以上、流れ方向に一樣な鉛直二次元の流れの場において、点源として瞬間的に放出されたトレーサー・クラウドの発達過程について、検討を行ない、その結果、トレーサー・クラウドの統計的分散の成長率が、放出初期から十分時間が経過するまでを含めて得られ、 $t \rightarrow \infty$ のときの漸近値が、従来の結果と数値的に一致することがわかった。

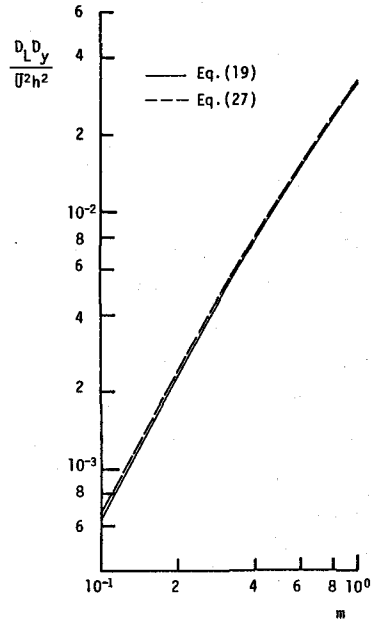


Fig-2 Relation between D_y and m

参考文献

- 1) Taylor, G.I.; Diffusion by continuous movement, Proc. London Math. Soc. Ser. 2, Vol. 20, 1921
- 2) Dewey, R.J. and Sullivan, P.J.; Longitudinal-dispersion calculations in laminar flows by statistical analysis of molecular motions, J. Fluid Mech., Vol.125, 1982

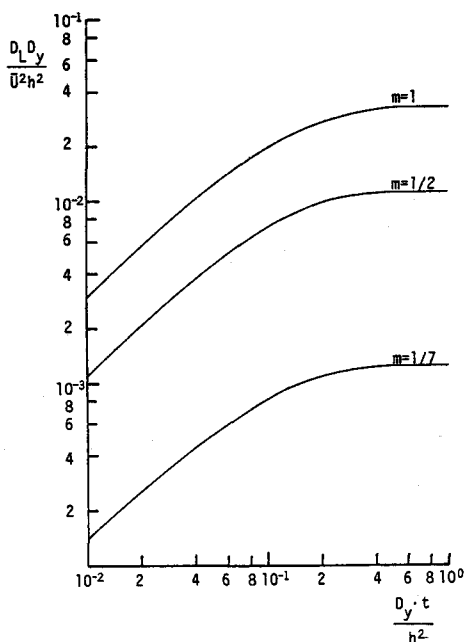


Fig-3 Relation between D_L and t (line source)

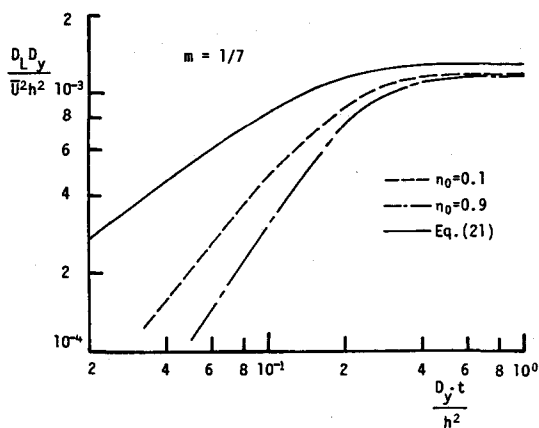


Fig-4 Relation between D_L and t (point source)

- 3) Corrsin, S.; Progress report on some turbulent research, *Advances in Geophysics*, Vol. 6, Academic Press, 1959
- 4) Robert, P.H.; Analytical theory of turbulent diffusion, *J. Fluid Mech.*, Vol. 11, 1961
- 5) Chatwin, P.C.; The initial development of longitudinal dispersion in straight tubes, *J. Fluid Mech.*, Vol. 80, part 1, 1977
- 6) Aris, R.; On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube, *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 235, Ser. A, 1956
- 7) Taylor, G. I.; Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube, *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 219, Ser. A, 1953
- 8) Taylor, G.I.; Conditions under which dispersion of a solute in a stream of solvent can be used to measure molecular diffusion, *Proc. Royal Soc. London*, Vol. 225, Ser. A, 1954
- 9) Chatwin, P.C.; The approach to normality of the concentration distribution of a solute in a solvent flowing along a straight pipe, *J. Fluid Mech.*, Vol. 43, part 2, 1970