

開水路における角柱背後の流れに関する数値解析

Numerical Simulation of Flow behind a Rectangular Column
in Open-Channels

広島大学工学部 正 員 細 田 尚

広島大学工学部 正 員 余 越 正一郎

1. 序 論

本研究は、開水路における角柱背後の流れについて、平面流れの基礎式を数値解析することにより検討した。とくに、はくり渦長を角柱長さで無次元化した無次元化はくり渦長と、基礎式を無次元化することによって得られる三種の無次元パラメータ（Froude 数、底面摩擦に関する無次元量、角柱長さとお水深の比）との関係を考察した。

基礎式の拡散項を無視し、定常な流れを考えると、基礎式の特異曲線より、平面流れの Froude 数 $Fr = \sqrt{u^2 + v^2} / \sqrt{gh}$ が 1 より大か小かによって、基礎式が双曲型と楕円型に分類されるが、本研究では、同種の特異曲線の交差による衝撃波の発生、方程式の型の遷移が問題とならない、 Fr が 1 より十分小さい流れを対象とする。

このように、Froude 数が小さいとき、拡散項を無視したときと考慮したときとの数値解析を行い、はくり渦長に及ぼす拡散項の効果を検討する。

2. 基礎式とその特性

拡散項を含む平面流れの基礎式は、Reynolds 方程式を平面流れのコントロール・ボリューム¹⁾で積分することにより、次のように表わされる。用いた座標系を、Fig-1 に示す。

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hw)}{\partial z} = 0 \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(uh)}{\partial t} + \frac{\partial(u^2h)}{\partial x} + \frac{\partial(uwh)}{\partial z} = & -gh \frac{\partial h}{\partial x} + gh \sin \theta - \frac{\tau_{xb}}{\rho} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} h \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{xz} \frac{\partial u}{\partial z} h \right) \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(wh)}{\partial t} + \frac{\partial(uwh)}{\partial x} + \frac{\partial(w^2h)}{\partial z} = & -gh \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{\tau_{zb}}{\rho} \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{xx} \frac{\partial w}{\partial x} h \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(D_{zz} \frac{\partial w}{\partial z} h \right) \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 u ; x 方向の流速、 w ; z 方向の流速、 h ; 水深、 τ_{xb} 、 τ_{zb} ; 底面せん断応力、 D_{xx} 、 D_{xz} 、 D_{zx} 、 D_{zz} ; 渦動粘性係数、 ρ ; 流体の密度、 g ; 重力加速度、 θ ; 水路床こう配である。

ここで、 τ_{xb} 、 τ_{zb} を

$$\frac{1}{\rho} \begin{pmatrix} \tau_{xb} \\ \tau_{zb} \end{pmatrix} = gh^2 \frac{\sqrt{u^2 + w^2}}{h^{1/3}} \cdot \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (4)$$

のように表わす。ここに、 n ; マニングの粗度係数。

また、 D_{xx} 、 D_{xz} 、 D_{zx} 、 D_{zz} を

$$\begin{aligned} D_{xx} = D_{xz} &= \alpha h \sqrt{\frac{gn^2 \sqrt{u^2 + w^2}}{h^{1/3}} |u|} \\ D_{zx} = D_{zz} &= \alpha h \sqrt{\frac{gn^2 \sqrt{u^2 + w^2}}{h^{1/3}} |w|} \end{aligned} \quad (5)$$

のように表わす。ここに、 α ；定数。本研究では、 $\alpha = 0.2$ を用いる。

ここで、(2)、(3)式の拡散項を無視し、定常 ($\partial/\partial t = 0$) のときの基礎式の特性について述べる。

(1)、(2)、(3)式は行列表示して次のように書くことができる。

$$A_1 \frac{\partial U}{\partial x} + A_2 \frac{\partial U}{\partial z} = B \quad (6)$$

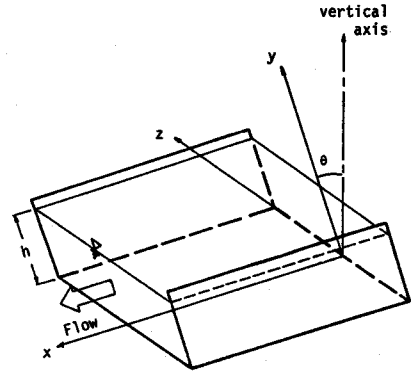


Fig-1 Definition sketch

ここに、

$$\begin{aligned} U &= \begin{pmatrix} h \\ u \\ v \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} u & h & 0 \\ g & u & 0 \\ 0 & 0 & u \end{pmatrix}, \quad A_2 = \begin{pmatrix} w & 0 & h \\ 0 & w & 0 \\ g & 0 & w \end{pmatrix} \\ B &= \begin{pmatrix} 0 \\ g \sin \theta - \frac{\tau_{xb}}{\rho h} \\ -\frac{\tau_{zb}}{\rho h} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (7)$$

である。

特性曲線は、微小な不連続の伝播として定義され^{2),3)} (x, z)座標系を(ξ, η)座標に変換したとき、 ξ 方向の微係数のみ定まり、 η 方向の微係数が定まらない条件より、次式で求められる²⁾。

$$\det \left| A_1 \frac{\partial \eta}{\partial x} + A_2 \frac{\partial \eta}{\partial z} \right| = 0 \quad (8)$$

(8)式を展開して次式が得られる。

$$\left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right) \left\{ \left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 - gh \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 - gh \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 \right\} = 0 \quad (9)$$

$$u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} = 0 \quad (10)$$

は、流線を表わす。また、

$$\left(u \frac{\partial \eta}{\partial x} + w \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 - gh \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 - gh \left(\frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 = 0 \quad (11)$$

より、

$$\frac{dx}{dz} = -\frac{\partial \eta / \partial z}{\partial \eta / \partial x} = \frac{F_{rx} \cdot F_{rz} \pm \sqrt{F_r^2 - 1}}{F_{rz}^2 - 1} \quad (12)$$

となる。ここに、

$$F_{rx} = \frac{u}{\sqrt{gh}}, \quad F_{rz} = \frac{w}{\sqrt{gh}}, \quad F_r = \frac{q}{\sqrt{gh}}, \quad q = \sqrt{u^2 + w^2}$$

である。

これより、

$$F_r = 1 \quad (13)$$

で、基礎式は、双曲型と楕円型に分類される。領域区分をFig-2に示す。

一方、非定常($\partial/\partial t \neq 0$)のばあい、特性曲線^{2), 3)}は、

$$\left(\frac{dx}{dt} - u\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} - w\right)^2 = gh \quad (14)$$

で表われ、 $F_r \cong 1$ が、14式では、原点より発する微小擾乱が、 dt 時刻後に原点に影響が及ぶか否かの判定を与えることが知られている⁴⁾。

以上、拡散項を無視したばあいの基礎式の特性について述べてきたが、本研究では、流れが定常になったときに方程式の型の遷移⁵⁾が問題とならないような、主流のFroude数 $U_0/\sqrt{gh_0}$ が十分小さな流れを取り扱う。

3. 基礎式の無次元化と無次元パラメータ

基礎式を次のように無次元化する。

$$u' = \frac{u}{U_0}, \quad w' = \frac{w}{U_0}, \quad h' = \frac{h}{h_0}, \quad x' = \frac{x}{D}, \quad z' = \frac{z}{D}, \quad t' = \frac{U_0 t}{D}$$

ここに、 U_0 : 主流の流速、 h_0 : 主流の水深、 D : 角柱の長さ。(本研究では、角柱として正方形のみを考えることとする。)

このとき、基礎式は次のようになる。(以後、無次元変数の'をとる。)

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(hv)}{\partial z} = 0 \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hu)}{\partial t} + \frac{\partial(hu)}{\partial x} + \frac{\partial(huw)}{\partial z} &= \frac{1}{F_{r0}} h \frac{\partial h}{\partial x} + f \cdot r \left(h - \frac{qu}{h^{1/3}} \right) \\ &\quad + \alpha \frac{\sqrt{f}}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 \sqrt{\frac{|u|q}{h^{1/3}}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \sqrt{\frac{|u|q}{h^{1/3}}} \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial(hw)}{\partial t} + \frac{\partial(huw)}{\partial x} + \frac{\partial(hw^2)}{\partial z} &= -\frac{1}{F_{r0}} h \frac{\partial h}{\partial z} + f \cdot r \left(-\frac{qw}{h^{1/3}} \right) \\ &\quad + \alpha \frac{\sqrt{f}}{r} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left(h^2 \sqrt{\frac{|w|q}{h^{1/3}}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(h^2 \sqrt{\frac{|w|q}{h^{1/3}}} \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right\} \end{aligned} \quad (17)$$

ここで、 $\sin \theta = n^2 U_0^2 / h_0^3$ を用いている。

このように、無次元パラメータとして

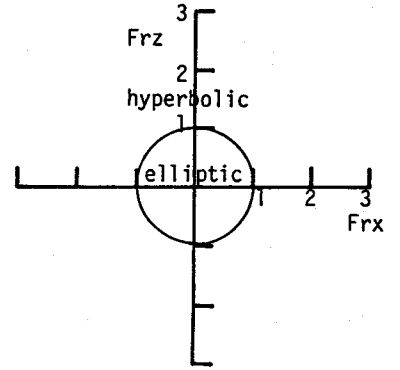


Fig-2 Classification of type for basic equations

$$F_{r0} = \frac{U_0}{\sqrt{gh_0}} \quad (\text{主流の Froude 数})$$

$$f = \frac{gn^2}{h_0^{1/3}} \quad (\text{底面摩擦に関する無次元数})$$

$$r = \frac{D}{h_0} \quad (\text{角柱長さ・水深比})$$

の三種が現れる。

$$C_1 = f \cdot r, \quad C_2 = \alpha \frac{\sqrt{f}}{r}$$

とおけば、基礎式系は、 F_{r0} 、 C_1 、 C_2 の三種のパラメータで決められることとなる。

4. 解析結果と考察

対象とする領域を Fig-3 に示す。

数値解析法は、参考文献 6) に従った。慣性項には、第二次風上差分を用いている。

格子間隔を $DX = DZ = 0.1$ とし、時間間隔を $DT = 0.004$ とした。上流端・下流端で $FM = hu = 1.0$ を与え、時間発展を行って流れを定常状態に漸近させる手法⁷⁾を用いた。

Fig-4(a), (b) に $t=6.0$ での流量 flux ($FM=hu$, $FN=hv$) のベクトル図を示した。このように、角柱の背後に渦が形成され、その大きさは、パラメータによって異なることがわかる。

まず、渦長 L への主流の Froude 数の影響を調べるために、 $C_1 = 0.02, 0.2, C_2 = 0, 0.1\sqrt{0.1}$ のときの無次元渦長 L/D と主流の Froude 数 F_{r0} の関係を、Fig-5(a), (b) に示した。この図より、無次元渦長 L/D は F_{r0} に影響されず一定となっていることがわかる。

次に、 C_2 をパラメータとして、無次元渦長 L/D と C_1 の関係を示したのが Fig-6 である。 $C_2 = 0$ が拡散項を無視したば

あいであり、 C_2 が大きくなるほど、すなわち、拡散項の影響が強いほど、 L/D が小さくなっていることがわかる。また、 C_1 が大きくなるほど、 L/D は C_2 に影響されず、 $C_2 = 0$ の値に漸近していくのがわかる。

次に、 C_1, C_2 よりも水理学的意味の明確な f, r を用いて、 L/D との関係を検討する。 $f = 0.1$ としたときの L/D と r の関係を示したのが Fig-7 である。図には、拡散項を無視したときの結果も示しており、 r が大きくなるほど、すなわち、角柱長さに比較して水深が小さくなるほど拡散項の効果が現われなくなっている。

5. 結 論

開水路における角柱背後の流れを、平面流れの基礎式を数値解析することにより検討し、とくに、はくり渦長と無次元水理パラメータとの関係を考察した。その結果、本研究で用いたモデルでは、渦長が Froude 数に依存せず、 C_1, C_2 あるいは、 f, r で決められる。

今後、本研究で用いた解析モデルが、どのようなスケールの現象に対応しているか、実験的に検討すると

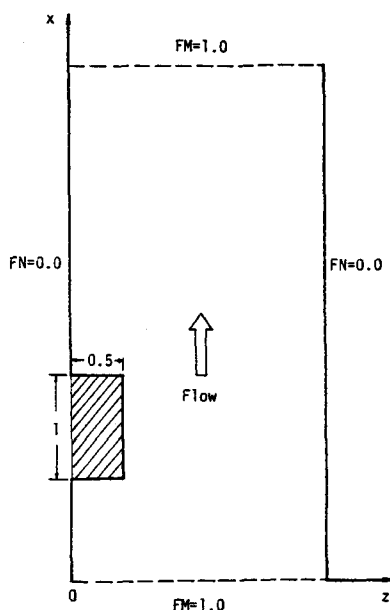
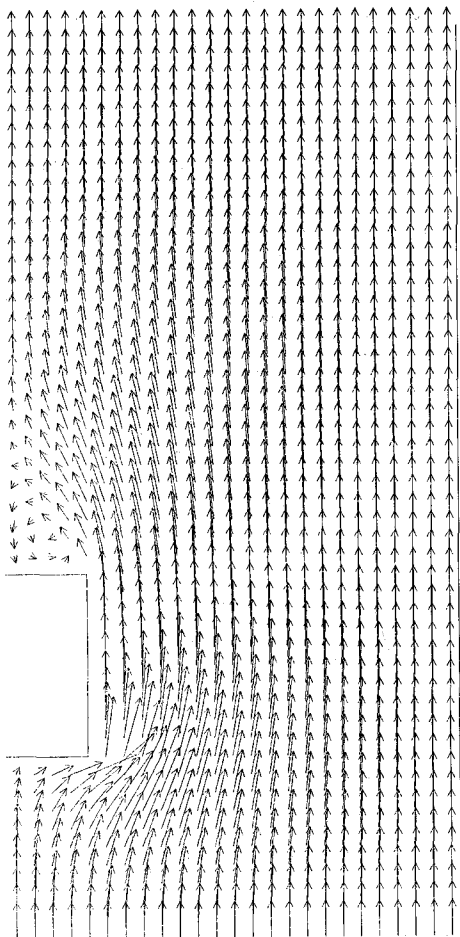


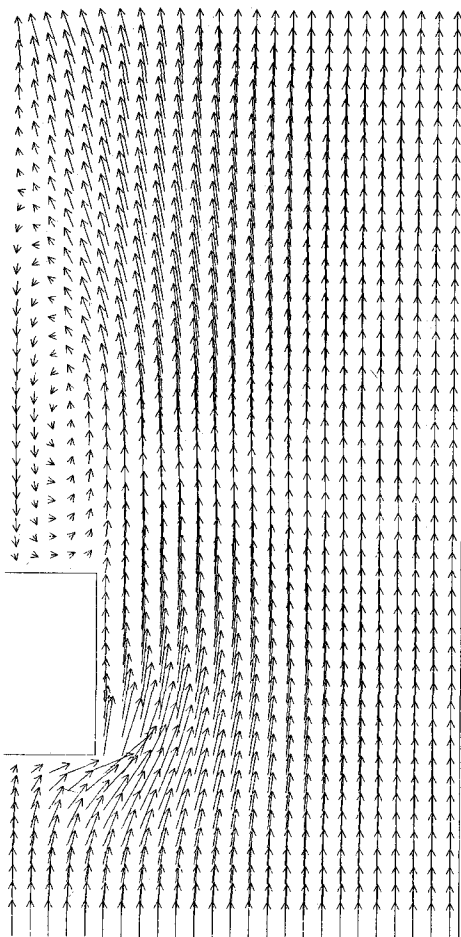
Fig-3 Definition sketch

$Fr_0 = 0.1, f = 0.3, r = 2.0$



(a)

$Fr_0 = 0.1, f = 0.1, r = 0.2$



(b)

Fig-4 Flow patterns

ともに、二次流の評価が可能な三次元的な数値解析を行いたい。

参 考 文 献

- 1) 岩佐義朗；開水路流れのモデリング法，水工学シリーズ 80-A-6，土木学会水理委員会，1980
- 2) Courant, R. and Hilbert, D.； 斎藤利弥監訳（1959-1968），数理解物理学の方法 4，東京図書
- 3) 岩佐義朗，井上和也，吉田英信； 特性曲線法による二次元平面流れの数値解析法に関する2，3の検討，京都大学防災研究所年報 第24号 B-2，1981
- 4) Katopodes, N. and Strelkoff, T.; Two-dimensional shallow water-wave model, Proc. ASCE, Jnl. Eng. Mech. Div., Vol. 105, No. EM2, 1979
- 5) Landau, L. D. and Lifschitz, E. M.； 竹内均訳（1971）流体力学Ⅱ，東京図書
- 6) 井上和也； 開水路流れの数値解析，水工学シリーズ，80-A-6，土木学会水理委員会，1980
- 7) 岩佐義朗，井上和也，足立敏之； 琵琶湖南湖の湖流と拡散に関する数値シミュレーション，京都大学防災研究所年報，第21号 B-2，1978

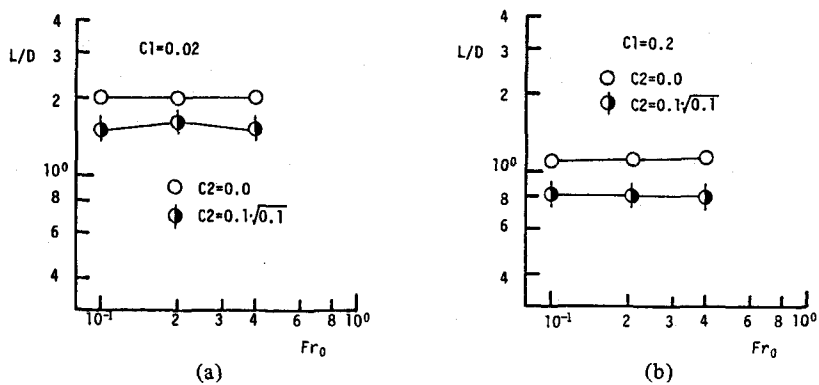


Fig-5 Relation between L/D and Froude number

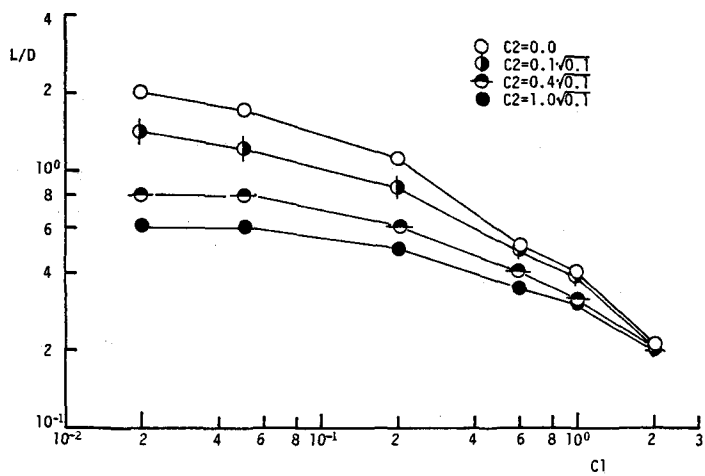


Fig-6 Relation between L/D and C_1, C_2

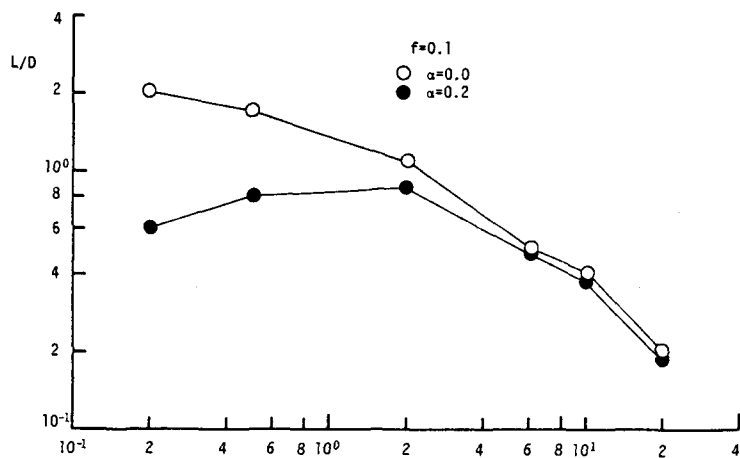


Fig-7 Relation between L/D and f, r