

狭さく部を有する水路の流れについて Flow through Constriction in an Open Channel

早稲田大学大学院 学生員 橋本 進
早稲田大学理工学部 正 員 吉川秀夫
東洋大学工学部 正 員 福井吉孝
早稲田大学理工学部 学生員 三隅宏明

1. はじめに

局所流による河床変動は、河川全体での巨視的な流砂の収支関係に影響を及ぼすとともに、より直接的には河川構造物や河岸の維持管理に対しても大きな影響を与えている。したがって、この問題の解明は重要な課題の一つといえる。本研究においては特に狭さく部を通過する流れを解析の対象とし、局所的な河床変動解明の第一段階として滑面固定床での底面せん断力の算定を試みた。一般に底面せん断力は、流れを等流近似し力のつりあい関係から求める方法などが考えられるが、流線が急激に曲がるいわゆる急変流に対してはこの方法では十分な見積りができないことは周知である。また古典的な手法として流れを底面の影響を受ける境界層の領域と、いわゆるポテンシャル流れとして見なせる領域にわけ、境界層方程式を解くことにより底面せん断力を算出する方法がある。片山ら¹⁾はこの解析法に改良を加え、段落ち流れにおける近似的な底面せん断力の算定法を工夫しているが、我々はこの手法をさらに拡張し、3次元的な流れである今回の狭さく部を通過する流れに適用することを考えた。また実験的に狭さく部下流側における底面せん断力の分布を求め、その分布特性および最大底面せん断力の簡易推定法をもあわせて論じる。

2. 実験装置・実験方法

幅5.45cm、長さ約5m、勾配1/75の亚克力製の水路の長手方向のはぼ中央に、開口幅18cmの狭さく部を設け、これを実験に使用する(図1)。実験ケースとして、流量 $Q = 23.0 \text{ l/s}$ に対して、水路下流端を開放し、狭さく部通過後射流状態となるもの(Case 1、いわゆる射流遷移)と下流端に高さ18.35cmのせきを設け流れ全域にわたって常流となるもの(Case 2、いわゆる常流遷移)の2ケースを行い、数値解析の対象とした。この2ケースの水面形を図2に示す。

また、射流遷移の場合を対象として、上流での水深を変化させ、流量の変化と狭さく部下流部において底面でのせん断力が最大となる場所とその大きさの変化を調べた。

底面せん断力の実測は、プレストン²⁾の手法にならない、外径と内径の比が0.6のピトー管を用いた。なお、等流状態でプレストン管の校正を行い、今回の実験条件はその適用が可能な範囲であることを確認した。

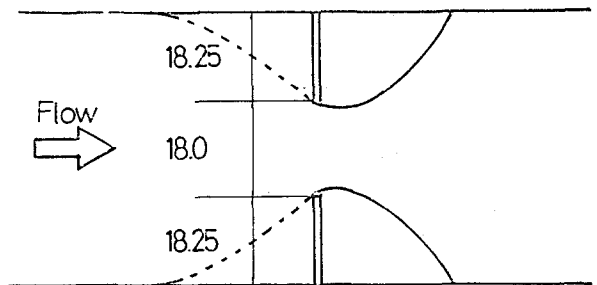


図1. 実験水路

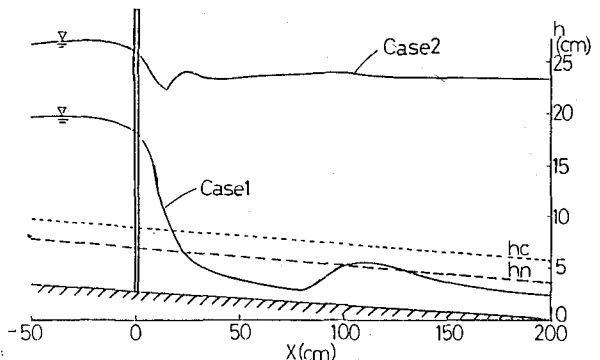


図2. Case1. Case 2. 中央測線に沿う水面形

3. 底面せん断力の算定の基本的考え方

本研究の底面せん断力の算定法に対する基本的立場は参考文献1)に詳述してあるが、本研究の目的を明確にするためここで簡単に述べておく。

文献1)においては段落ち流れという2次元急変流の解析を行なっているが、今回その解析法を3次元流れである本研究に対しても適用できることを確認できたのでここでの説明は2次元として行う。

今、我々は図3に示すような流速分布を持つ3つの流れの場を想定する。①の流れが実際の狭さく部を通過する流れであり、②の流れは排除厚が非常に薄いと考える流れ全域にわたってポテンシャル流れとする流れの場である。流線の曲がりなどにより鉛直力を受けている実際の流れ①に対して境界層方程式を解くことは、究極のところナビエ・ストークスの方程式をそのまま解くことに相当し實際上その解析は困難なものとなる。そこで我々は、境界層方程式を①の流れに対して適用するのではなく、鉛直力の影響を受けていないとする③の流れに対して境界層方程式を展開して行くことを考える。すなわち

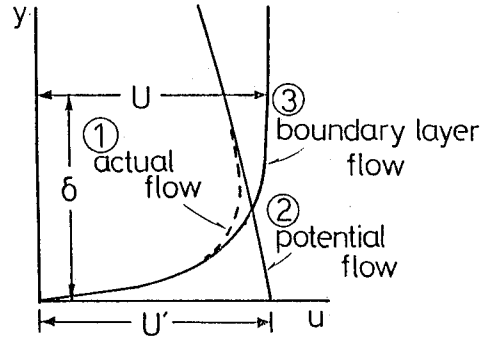


図3. 流れの場概念図

③の流れは底面の極近傍では実際の流れ①をよく表現しているが、その上部では鉛直力の働かない無限の水深を持つ理想的な流れであると考ええる。ここで流れ方向にx軸、鉛直向上向きにy軸をとれば、③の流れの境界層に対するナビエ・ストークスの方程式は、x方向に対して、若干のオーダー比較による項の整理の後、

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad 1)$$

となる。ここでu、vは、それぞれx、y方向の流速、 ρ は流体の密度、pは圧力、 ν は渦動粘性係数を表すものとする。さらにy方向に対しては

$$-g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad 2)$$

を得る。③の流れの境界層内では圧力分布は、y方向力がないことを考えると傾きが45°の分布になると考えられる。したがってここで、位置水頭を圧力pとともに一つのポテンシャルと考え、両者をあわせてポテンシャル p' とするならば、2)式は

$$\frac{\partial p'}{\partial y} = 0 \quad 3)$$

のように書ける。すなわち重力場においても、圧力の静水圧分布を仮定できるならばプラントルの境界層方程式と同様の結果が得られることがわかる。③の流れの境界層外縁で一樣ポテンシャル流速Uを持ち、 $y=\delta$ で $\partial u / \partial y = 0$ という境界条件を1)式に用いれば、

$$U \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \quad 4)$$

を得、我々の仮想している③の流れに対しては、圧力のx方向変化を主流速Uの変化で代用し得ることになる。連続の式を使用し、カルマンにならって1)式から運動量方程式を導けば、

$$\frac{\partial}{\partial x} (U^2 \theta) + \delta^* U \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad 5)$$

になる。ここに θ は運動量厚、 δ^* は排除厚、 τ_0 は底面せん断力である。境界層内の流速分布に次式のべき乗則を適用することにし、

$$u(y) = U (y/\delta)^{1/n} \quad \delta : \text{境界層厚} \quad 6)$$

流速分布の実測により $n = 7$ とし、流れ方向にわたって n の値が変化しないとすれば、6) 式は、

$$\frac{7}{72} U^2 \frac{\partial \delta}{\partial x} + \frac{23}{72} \delta \frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\tau_0}{\rho} \quad (7)$$

と変形できる。ここでブラジウスの抵抗則

$$\frac{\tau_0}{\rho} = 0.0225 U \left(\frac{U \delta}{\nu} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (8)$$

と7)式を連立させれば、主流速 U を与えることにより底面せん断力 τ_0 が算出できることになる。したがって③の流れの底面せん断力を上記の方法で求めれば、③の流れの底面近傍は①の実際の流れの底面近傍の様子を忠実に表現しているので、ここで求まる底面せん断力を実際の流れの底面せん断力と見なすことができよう。しかしながら、この時③の流れの主流速 U を見積ることは実際上困難と思われるので、本解析においてはポテンシャル流②の底面流速 U を用いることにする。なぜなら、③の流れが①の流れに重力以外の外力の働かない場合に相当することを考えると、ポテンシャル解析での流速を使用する以上流線の曲がりのない場（鉛直力の一番働いていない部分）である底面の流速をこの解析に用いることが最も妥当であると考えらるからである。

4. ポテンシャル解析

3.で述べてきたように、カルマンの運動量方程式を用いて底面せん断力 τ_0 を算出するには、ポテンシャル解析により底面でのポテンシャル流速 U を求める必要がある。狭さく部を通過する流れは3次的に流線が曲がっているので、3次元のポテンシャル解析を行わねばならないが、その解析は非常に手間がかかるためここでは、2次元のポテンシャル解析を組み合わせることから3次元流れへアプローチしてゆく。すなわち図4に示すように流れを横から見た平面と上から見た平面で構成されているものと考え、それぞれの平面に対して2次元のポテンシャル解析を行いそれぞれの平面での流線図よりある線に沿って流管を組み立てることにする。この流管を通る流量は一定であるから、各点での断面積がわかればその点の流速がわかることになる。さて、上に述べたポテンシャル解析を行うには、解析する平面の境界形状を決めてやらねばならない。そこでまず狭さく部を上から見た、ある高さ y での境界形状を決定することを考える。周知のごとく狭さく部に向かう流れは、狭さく部のかなり上流側ではく離する。ポテンシャル解析はこのはく離している部分を除いた形状に対して行わねばならないが、はく離点の位置は水路境界面の粗度、圧力の変化、流れのフルード数およびレイノルズ数等によって大きく変化すると考えられ、狭さく部近傍においてのこれらの関係を解析的に導くことは困難と思われる。また、ここでは、はく離点の位置を解析的に決定することは我々の目的に直接には関与しないと考え、実験的にその位置を測定する。図5にはく離領域の形状を志方ら³⁾ にならって規格化したものを示す。志方らは、狭さく幅とはく離点の狭さくからの距離で無次元化した $x'^n + z'^n = 1$ とするはく離曲線を与え、条件により $n = 1/2 \sim 1/3$ と変化させているが、我々は実測から $n = 0.7$ を取ることにする。各 y におけるはく離距離を求め、そのはく離形を決めこの境界に対してポテンシャル解析を行う。ポテンシャル解析には数

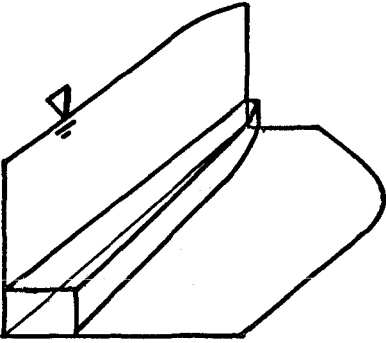


図4. 流管の概念図

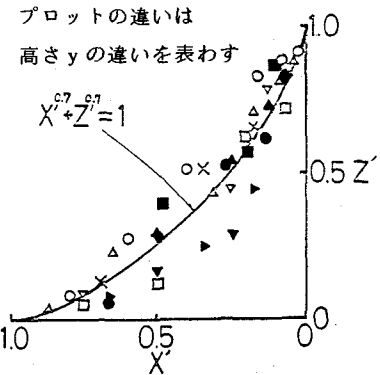


図5. 無次元化したはく離形

々の手法があるが、今回は特に境界要素法を用いた。以下に、本ケースに対するポテンシャル解析の適用を示す。まず、先に述べた方法により、各高さ y におけるはく離点の位置からのはく離形状を決定し、それぞれの境界形に対してポテンシャル解析を行う。その結果を用いて、それぞれの平面で適当な流れ関数値の間隔で流線を描く。次に中央測線上の水面形を境界とする横から見た平面に対して同様にポテンシャル解析を行い流線図を描く。これら上から見た流線図と横から見た流線図を図4のような組み合わせにより、流管を形成させ、それぞれの流線間隔より各点の断面積を求める。この得られた断面積を用い各流管での連続条件から各点での流管断面平均流速が算出できる。このようにして求めた中央測線上の流速分布を、実測値とともに図6に示す。実線が流管から求めた流速で、各流管の高さの1/2の点に得られた流速をプロットして結んだものである。

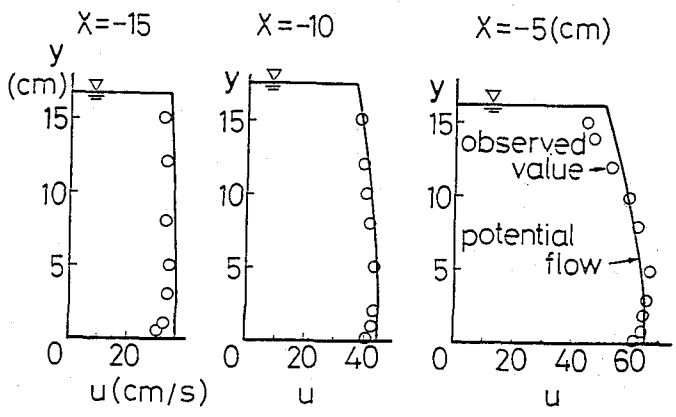


図6. ポテンシャル解析による流速分布

また、エネルギー高がポテンシャル解析の始点となる最上流面内で一定、すなわち静水圧分布、一様流速分布を仮定し、狭さく部上流側でのエネルギー損失を無視して（実験的にもほぼ確認できた）流管に沿って

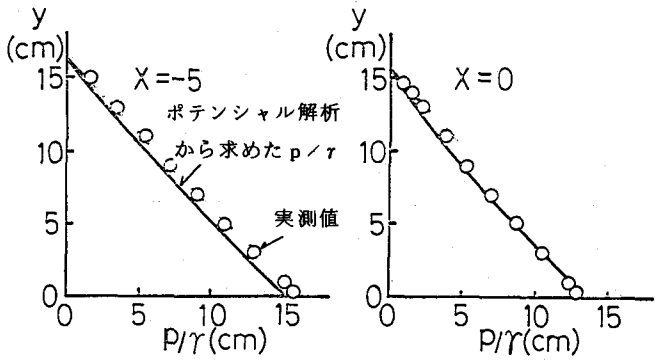


図7. ポテンシャル解析による圧力分布

ベルヌーイの式を用いれば、各断面での圧力分布を知ることができる。これは図7として示してある。

図6、図7で示されるように、今回行った、上から見た流線図と横から見た流線図の組み合わせによる流管での解析はよく実測値と合致している。したがってこの解析法を用いて3.で述べた底面せん断力算定の際のポテンシャル流速 U を得ることができる。

5. 底面せん断力の算定

急変流である狭さく部を通過する流れの底面せん断力を見積るためには、流線の曲がりによる遠心力等の外力の影響を考慮に入れた解析を行うべきである。しかし先に述べた様に境界層に対して影響を持つ項をすべて基本方程式に持ち込み、これを厳密に解くことはかなり困難な作業と思われる。急変流での底面せん断力をより簡便に求めることを目的とするならば、底面のごく近傍の流れの様子がわかればよいと考え

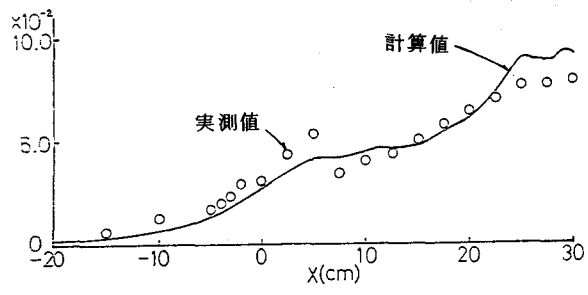


図8. Case 1 中央測線上の底面せん断力

本研究では 3. で述べた様な理想化した仮想流れに対して境界層方程式を解くことにする。すなわち、底面のごく近傍では実際の流れを忠実に表現するが、その上部ではカルマンの仮定を満足しているとする流れを解析の対象として先の(7)式、(8)式を連立させて解くことになる。この計算は(7)式、(8)式を差分化して、ポテンシャル解析の結果得られた主流速の変化を逐次代入して底面せん断力 τ_0 を求めるものであるが、計算始点での境界層厚 δ を初期値として入力しなければならない。この δ として我々は、実際の流れでの乱流境界層の十分発達した等流部の水深を与えた。この場合、この時の δ は我々の仮想している流れでの水深を意味するものではなく、あくまで仮想流れでの境界層厚を表現するものとなる。このようにして、Case1、および Case2の中央測線に沿って底面せん断力を算出したものを図 8、図 9 として示す。ここで実線が計算結果であり、プロットがプレストン管による実測値を表わしている。計算値は実測値をかなりよい精度で表現しているといえよう。この場合、ポテンシャル解析で我々の想定している流管は、中央測線上の底面に直線的に置かれたものであるが、さらに別の流管(X-Z平面内で曲がった流管)に対して同様の解析を行ってみた。すなわち流管に沿ってS軸を設け、この軸に対するポテンシャル流速 U' の変化をカルマンの運動量方程式に代入し底面せん断力 τ_0 を求める。この結果は図10、図11に示す。解析は狭さく部上流側で行い、 $S = 0$ が狭さく部に相当している。流管が曲がっている場合にも、底面せん断力は妥当に評価し得ることが判る。

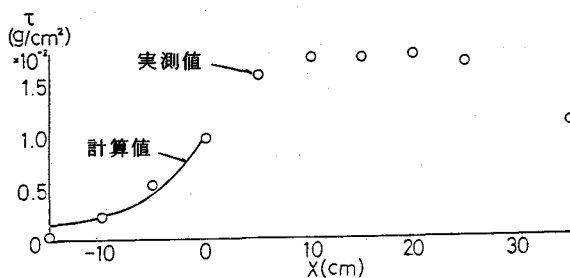


図 9. Case 2 中央測線上の底面せん断力

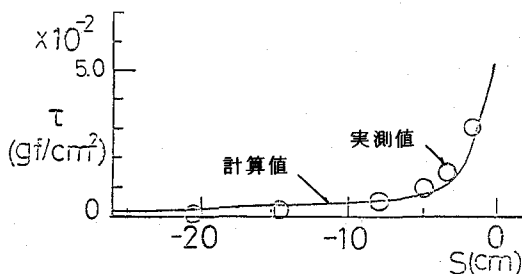


図 10. Case 1 S軸に沿う底面せん断力

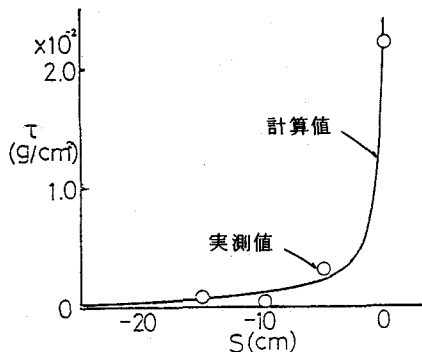


図 11. Case 2 S軸に沿う底面せん断力

6. 底面せん断力の分布および最大底面せん断力の簡易推定法

5. においては、主として狭さく部上流側での流れ方向の底面せん断力の変化を見てきたが、ここでは、狭さく部下流側での底面せん断力の横断方向の分布特性を考えてみる。解析の対象としてCase1を用いた。基本的にはこれまでの解析の様に、流管をポテンシャル解析から決定しなければならないが、水面形が横断方向に変化しているため、中央測線での水面形をそのまま横から見た境界形として解析に持ち込むことはできない。そこで、それぞれ計算を進める流管に対して、その流下距離と中央測線での流下距離とを対応させることで、すでにわかっている中央測線での流管高さを近似的に使用して解析を行う。すなわち、中央測線以外に置かれた流管も、流管の高さは中央測線上の流管と狭さく部からの距離に比例して同様に変化しているものとする。このような流管に対して計算を行った結果を図12に示す。白丸が実測の底面せん断力で、黒丸が計算によるものである。狭さくからの流下距離が5 cm程度では($X = 5$)横断方向にわたる底面せん断力の分布傾向はよく表わしているものの、さらに流下すると、流れの外側での実測値とのずれが目立つ。

したがって、流下につれてポテンシャル解析を適用できる領域が制限されてくるものと思われる。

以上、ポテンシャル解析により底面せん断力を求めてきたが、ここでは射流遷移の場合での最大せん断力を簡便に知ることを試みる。今、狭さく部より開口幅の2倍程度上流の点と狭さく部の間でエネルギー式を考える。狭さく部で限界水深が発生すると仮定すると、ベルヌーイの式

$$\frac{Q^2}{2gB^2h^2} + h + Z = \frac{Q^2}{2gb^2h_c^2} + h_c$$

から、上流水深 h は、流量 Q 、水路幅 B 、狭さく開口幅 b 、の関係として与えることができる。この h に関する3次方程式を Q 、 B 、 b を与えて解くと、求まる水深と実測の水深とが一定比（今回は0.94）となることがわかった。つまり流量 Q を与えるだけで、上流水深 h を近似的に求められる。逆に言えば、上流での水深 h を測定すれば流量 Q を算定することが可能である。ここで、実際の狭さく部での水深が限界水深の約1.3倍であることが実験的にわかっているの（図13参照）上流水深が知られている場合、あるいは流量が与えられている場合には、狭さく部通過時の水深を算出することができる。この水深から狭さく部での平均流速を求め、それぞれの射流遷移での最大せん断力と比較したもの

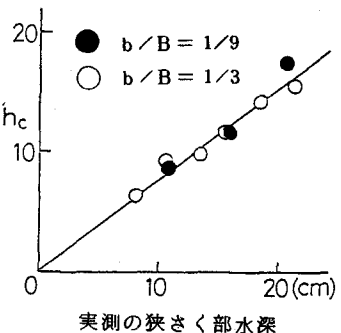


図13. 狭さく部水深と限界水深の関係

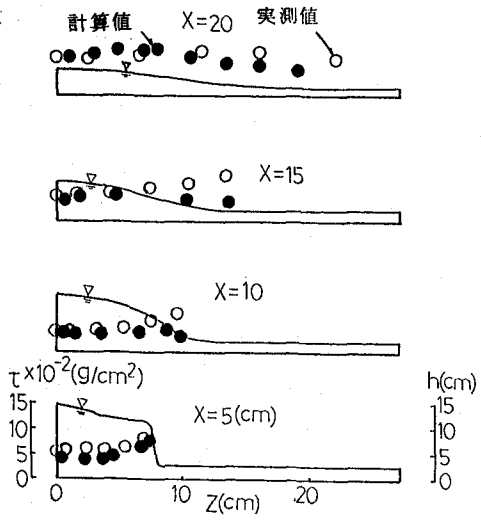


図12. Case 1 横断方向底面せん断力分布

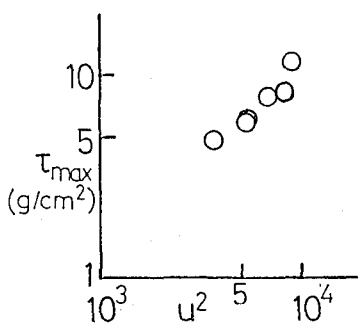


図14. 狭さく部平均流速と τ_{max} の関係

のを図14に示す。最大底面せん断力は狭さく部での平均流速の2乗にはほぼ比例していると言ってよいだろう。したがって、狭さくを通過する流れで射流遷移の場合、その最大せん断力をより簡易に知ろうとすればこの方法も利用することができよう。なお最大せん断力は、狭さく通過後の縮流部の外縁で現われる。

7. おわりに

カルマンの運動量方程式は、その適用法が適切ならば、抵抗則と連立させることにより精度よく底面せん断力を算定できることがわかった。また、射流遷移に限ればその最大底面せん断力はより簡易な方法で見積ることも可能である。なお、本研究は文部省科学研究費（自然災害特別研究(1)都市河川の治水トータルシステムに関する研究 代表者 吉川秀夫教授）の補助を受けた。また、実験及びその解析に本大学大学院生木下献一君に協力して頂いたことを記し、ここに謝意を表します。

参考文献

- 1) 片山道夫・福井吉孝・吉川秀夫：段落ち部近傍の底面せん断力、土木学会論文報告集（投稿中）
- 2) Preston, H: The determination of turbulent skin friction by means of pitot tubes.
- 3) 石原藤次郎・志方俊之：開水路急拡大部の水理学的性状に関する研究、土木学会論文集、第128号
- 4) 東野寛：急縮部の水理、38回年次講演会