第28回水理講演会論文集　1984年2月

摩擦流における三次元計算手法について
A Three Dimensional Computation of Frictional Flow

長岡工業高等専門学校　正員　小　寺　隆　夫

1. 概要

本論は、流体内の2点間の流速は、その2点間のエネルギー勾配の平方根に比例するという仮定が成立する三次元流れについての実用的な計算手法について述べたものである。流速の水深方向の分布は、対数則を採用し、相当粗度は、マニングの粗度係数から誘導することとしている。計算手法としては、流体内に適当に設定した点ごとにエネルギーを仮定しながら収れんする迄計算を繰り返す管網計算等でMarlowらの法と呼ばれる手法を採用し、少数回の繰り返しで、常に安定した結果が得られた。

2. 理論

流体内の1点 i は E_i なるエネルギーを有し、それに隣接する点 j は、E_j なるエネルギーを有するものとする。いま、i 点をその面内に含む微小面から、j 点をその面内に含む微小面に向う流量 Q_{ij} は、(1)式によって表わされるものとする。

$$Q_{ij} = A_{ij} \cdot U_{ij} \qquad (1)$$

ここに、A_{ij} は平均断面積、U_{ij} は水深方向には対数分布則に従うものとすれば、(2)式によって表される。

$$U_{ij} = (A_r + (1/K) \cdot \log(y_{ij}/k_s)) \cdot U_{*ij} \qquad (2)$$

ここに A_r，K は定数、y_{ij} は、底からの距離、k_s は相当粗度、U_{*ij} は摩擦速度で(3)式で表わされる。

$$U_{*ij} = (g \cdot R_{ij} \cdot I_{eij})^{1/2} \cdot (E_i - E_j) / |E_i - E_j| \qquad (3)$$

ここに、g は重力の加速度、R_{ij} は全水深、I_{eij} はエネルギー勾配で(4)式で表わされる。

$$I_{eij} = |E_i - E_j| / L_{ij} \qquad (4)$$

(1)〜(4)式を組み合わせて、エネルギー以外の数値をまとめて F_{ij} とすれば、(1)式は(5)式で表わされる。

$$Q_{ij} = F_{ij} \cdot |E_i - E_j|^{1/2} \cdot (E_i - E_j) / |E_i - E_j| \qquad (5)$$

F_{ij} は、2点 i，j 間に固有な値であって(6)式で表わされる。

$$F_{ij} = A_{ij} \cdot (A_r + (1/K) \cdot \log(y_{ij}/k_s)) \cdot (g \cdot R_{ij}/L_{ij})^{1/2} \qquad (6)$$

(5)式をエネルギーに関する1次式とするために｜｜の中のエネルギー E_i，E_j を仮定値 e_i，e_j とする。

$$Q_{ij} = F_{ij} \cdot |e_i - e_j|^{1/2} \cdot (E_i - E_j) / |e_i - e_j| = F_{ij} \cdot |e_i - e_j|^{-1/2} (E_i - E_j) \qquad (7)$$

$$Q_{ij} = S_{ij} \cdot (E_i - E_j) \qquad (8)$$

ここに、S_{ij} は、(9)式によって表わされ、式中、F_{ij} は定数、e_i，e_j も仮定した定数なので定数となる。

$$S_{ij} = F_{ij} \cdot |e_i - e_j|^{-1/2} \qquad (9)$$

(2)式，(6)式において用いられる相当粗度 ks は、対数分布則によって示される水深方向の流速を、積分し

て水深で除したものが、マニングの平均流速公式において粗度係数を n としたときの平均流速に等しいとおいて(10)式によってもとめられる。

$$k_s = R_{ij} / \mathrm{EXP}\,(\,K \cdot R_{ij}^{1/6} / (\sqrt{g} \cdot n) - K \cdot A_r + 1.0\,) \qquad (10)$$

さて、流体系内の1点 i における連続の式は(11)によって表わされる。

$$\sum_{j \in J_i} Q_{ij} + q_i = 0 \qquad (11)$$

ここに、J_i は、i 点に隣接する点の集合とする。また q_i は、i 点において、この流体の系外に流出する流量とする。(11)式に(8)式を代入するとエネルギーに関する1次方程式(12)式が得られる。

$$\sum_{j \in J_i} (\,S_{ij} \cdot (E_i - E_j)\,) + q_i = 0 \qquad (12)$$

(12)式は、流体系内に設定されたすべての点について樹てられるので、それらを連立して解けば、流体系内のエネルギー分布がもとまり、それらの値から、流速分布が定まる。これらの流速は、(9)式において、各点のエネルギー e_i , e_j を仮定してもとめたものであるから、(12)式を連立して解いて得られた各点のエネルギーを、(9)式に代入して、(12)式により繰り返して、エネルギーをもとめ流速をもとめる。計算の収れんの判定は、流体系内に設定したすべての点におけるすべての流速について、得られた値と前回の値との差の絶対値が、許容値以内にあるか否かによって行うものとする。

3. 境界条件

本手法を実際問題に適用する場合には、境界条件を設定しなければならない。

流体系の外殻については、すべて点によって表現する。水面については、本論では、緩流速の問題を扱うものとして、水平とする。流体系内部には、点を適当に配置する。これらの点は、すべてＸＹＺ座標で表わされているものとする。

境界条件として、これらの点のいくつかについて、流量を境界条件として与えることができる。この場合、流体の系外に流出する場合を正、流体の系内に流入する場合を負とする。

境界条件として、エネルギーを与えようとする場合は、その点だけと隣接関係を有する外部点を設定し、そこにエネルギーを設定する。その点と外部点との間の距離は、微小にとり、エネルギー損失が無視できるとする考えに立っているわけである。エネルギーを設定した点において、流体の系外から流出入が行われる。

例えば、河川の上流端面、あるいは下流端面に設定されたすべての点については、一様なエネルギー、あるいは、一様な流速が得られるような流出入量を与えることなどが考えられる。しかし、前記の原則に従うならば、どのように、境界条件を設定してもかまわない。

エネルギー損失を規定するものは、粗度係数である。粗度係数は、流体の底面に設定されたすべての点について、独立に与えられる。各点の粗度係数は、その上部の流体内に設定されている各点のエネルギー損失を対数分布則に従って支配するものとする。

4. 点の設定、隣接点の設定

流体係内部（外殻を含む）における点の設定は、自由に行うことができる。設定されたある1点と隣接する点の集合については、前後左右上下の6方向の点とすることとして、点の設定を次のように行うものとする。

ある流体系の形状を、2面づつ相対する6面体で表現するものとする。この場合、一面は、自由水面であり水平な平面とする。他の面は、曲面または平面とする。この6面体を、サイの目状に、例えば、各々の体積がほぼ等しくなるように分割し、各交点を設定点とする。

例えば河川流の場合、水面は、水平な平面、上下流面は、鉛直な平面、両岸は、鉛直な曲面、底面は曲面とする等である。このようにすれば、適当間隔の河川横断の河床高と、その平面的位置を与えるだけで、内

部点は自動的に設定できる。もちろん、隣接関係さえ個々に設定するならば、点の設定は自由である。

5. 連立方程式の解法、計算精度、収れん性

流体系内部に設定される点の数だけを未知数とする連立方程式を繰返して解く必要がある。三次元計算の場合、未知数の数は、極めて多くなり、計算機の記憶容量、計算時間が問題となる。本論における連立方程式は、未知数の系数行列が、正値対称バンド行列の形をしているので、コレスキー法を用いて解き記憶容量、計算時間ともに短縮することができた。この場合、バンド幅をいかに小さくするかがポイントである。

繰返し計算が収れんするためには、倍精度計算を行はなければならない。単精度では、無理である。倍精度計算を行った場合、許容値を0.005 m／s として、数回の繰返し計算で収れんする。

6. 計算例

後　に示すとおりである。

7. 考　察

本論において示した摩擦流に関する三次元解析の特徴をあげてみると次のとおりである。

(1) 理論が簡明である。

(2) エネルギー損失に関して、河川工学において一般的に用いられているマニングの粗度系数を用いている。

(3) 水深方向について、乱流理論から誘導された対数分布則によってエネルギー損失を規制している。

(4) 境界条件の設定を自由に容易に行うことができること。

(5) エネルギーを未知数としているため、連立方程式の解法について有利であること。

(6) 計算の収れん性が良いこと。

(7) 点の設定を自動的に行う場合は、計算の準備が容易であること。

問題点および今後の課題をあげてみると次のとおりである。

(1) 自由水面の問題

本論においては、緩流速の局所的流れをあつかうものとして水平で不変と考えている。

(2) 水理模型実験による検照

(3) 密度差の導入

緩流速の問題では、エネルギー勾配が微小であるので、現実問題としては、温度差、塩分濃度差等に基づく密度勾配の影響が卓越することが考えられる。