

不規則底面をもつ開水路流れに関する研究

Study on Open Channel Flow with Irregular Bed

防衛大学校 土木工学教室 正会員 山 田 正

防衛大学校 土木工学教室 正会員 池 内 正 幸

防衛大学校 堀 江 良 徳

1. まえがき

従来、山地小流域の流出解析では流域を斜面と河道に分けて扱うことが多いようである。その中で、近年は斜面に対しては飽和ダルシー則や、不飽和浸透流の理論を適用し、斜面の特徴としての斜面長分布、到達時間の分布、時定数スペクトル等の諸量を用いた解析が行なわれている^{1), 2), 3)}。これに対して河道部の流れは斜面の遅れ時間に比して十分に速いので、無視されるか、斜面からの流出ハイドログラフを平行移動して多少の遅れを与えるか、あるいはせいぜい kinematic wave として取扱うというのが現状のように思われる。しかし流出問題は単に水位、流量の問題として扱えられるものではなく河道、河床の変動や流水抵抗との相互関連において把握されるべきものであると思われる。ところで山地河川においては河床が一見不規則、あるいは不規則に近い形状とみなし得るような河床をもっている場合が多々存在している。本研究は上記の河川水文学的な見地からこのような不規則底面を有する開水路流れの抵抗則や水面形を明らかにすることを目的としたものであり、そのための基礎実験および理論的考察を行なったものである。

2. 実験装置および実験方法

実河川は移動床でかつ二次元的な広がりをもった河床形状をしているが、ここでは研究の第一段階として一次元的な、流れ方向にのみ変化する水路床上の流れを扱った。用いた実験水路は幅50cm、長さ13m、で側面はガラス張りの可変勾配開水路である。本研究の主要な目的は不規則底面上の流れに関するものであるが、ここでは底面形状として規則的な sine 形をしたもの（以後、ケース A と呼ぶ）の場合を最初に調べ、次に不規則底面としては $\sum_{n=1}^m a_n \sin(2\pi x/L_n)$ で与えられる形状の場合（ケース B）につき実験を行なった。ケース A の“河床波”の振幅は 2.5 cm、波長は 50 cm である。ケース B の場合では式で $m=6$ 、 a_n はすべての n につき 0.6 cm であり、 L_n は 30, 60, 90, 120, 150, 180 cm である。図 1 は本実験で用いたケース B の不規則底面の形状を示すものである。路床表面はケース A では塩化ビニール板を使用し、ケース B では底面粗度としてその上に市販のビニール製波板（波高 0.8 cm、波長 3.2 cm）を敷き、壁面抵抗を増している。水路下流端にはせきを設けているがその前面に風胴用のハニーカムを置き、水路下流端からの不用

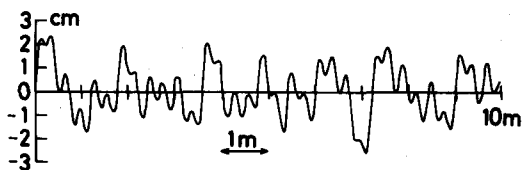


図1. ケースBの不規則底面の形状

意な反射波の影響を極力抑えている。水面形は水路側面のガラス面を通して写真撮影した。撮影ではシャッター速度を遅くし（1.5～3秒程度開放）、多少揺れ動く水面形の平均的な形状をとっている。壁面に沿う圧力分布や壁面せん断応力の分布の測定では、外径1mmの静圧管およびプレストン管を用い、流速分布の測定はピトー管およびレーザー流速計を用いている。

3. 実験結果

3.1 ケース A（水路床が sine 形状の場合）⁴⁾ (1)水面形状について：この場合には Iwasa & Kennedy らが示したように (i) 流速が大きく射流の水面形が現れる、(ii) いわゆるシュート & プールの水面形が現れる、(iii) 底面とは逆位相の定在波が現れる（常流）、以上の3通りの水面形が現れる。写真 1, 2, 3 はこのときの (i), (ii)

および(Ⅲ)の水面形状を示すものである。なお常流時には写真4に示すような底面の波長とは異なった波長をもつ小さな波が定在的に存在する場合がある。この定在波はIwasa & Kennedyの理論計算によっても予言されていたが、その存在する水理条件は今のところ実験的には明らかでない。

(2)水面形の遷移：射流の流れで流量や勾配を変化させると水面形は写真1の射流の水面形から写真2のシュート&プールの水面形、あるいはその逆のように変化する。この水面の遷移時の流量 q と水路勾配 I を示したものが図2である。この図よりわかるように水面形の遷移はただ一本の $q-I$ 関係で表わすことはできず、遷移する前の水面形が何であったかによって異なる臨界曲線となっている。これはいわば水面形遷移における履歴現象と言えよう。つぎに射流からシュート&プールに遷移するときは、上流からあたかもプール部を押し流すように変化し、一方シュート&プールから射流への遷移ではプール部が一段一段階段を登るように下流部から上流に向かって変化している。このように本来上流側の境界条件のみによって支配されているような水面形においても、水面形によっては下流側から現象が決ってくる場合があることがわかった。

(3)底面に沿う圧力分布、摩擦速度の分布：図3は射流の水面形およびシュート&プールの水面形が現われているときの水路床に沿う圧力（水頭）の分布を示している。図中の $x=0$ はsine形状の谷に、 $x=25\text{cm}$ が頂点に相当している。図4はこのときの摩擦速度の分布を示している。これらの図より圧力分布、摩擦速度ともに底面形状よりも 1.0cm 程度位相が遅れている（これらの結果はYuen & Kennedyの



写真1. 射流の水面形



写真2. シュート&プールの水面形

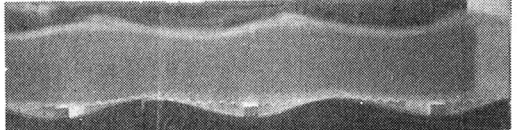


写真3. 常流時に現れる定在波

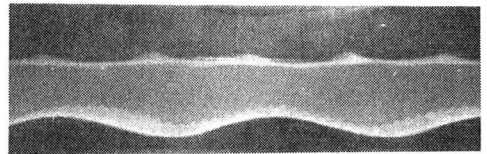


写真4. 常流時に現れる波長の短い定在波

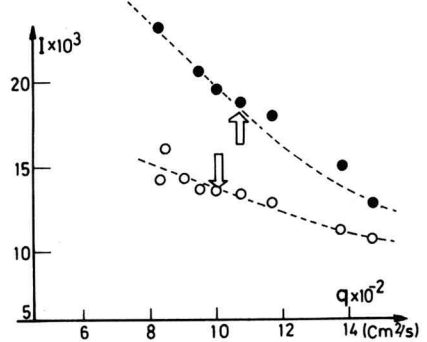


図2. 水面形遷移の臨界曲線（図中の○はシュート&プールから射流の水面形、●は射流の水面形からシュート&プールへの遷移を表わす）

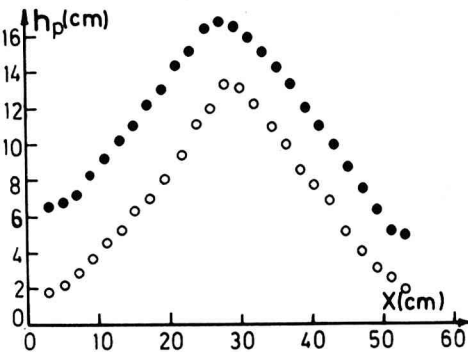


図3. sine形をした水路床に沿う圧力分布（図中の○は図5に示す水面形および水理条件、●は図6に示す場合である）

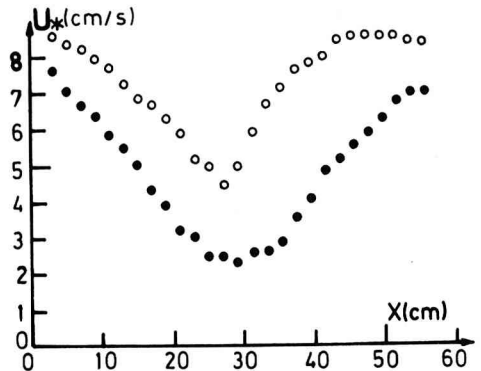


図4. sine形をした水路床に沿う摩擦速度の分布（図中の○は図5に示す水面形および水理条件、●は図6に示す場合である）

の同様の実験において明らかにされている)。

(4)流速分布, 流線: 図5, 6はそれぞれ射流の水面形およびシュート&プールの水面形が現れるときの流速分布と流線を示している。なおここでいう流速はピトー管を底面形状の接線と平行に設置したときに得られる流速であり, 必ずしもその点の最大流速ではないが, その差は高々2~3%程度であった。図中の流線は各流線間の流量が全て同じになるように計算して出したものである。これらの図より本実験で用いた水路床では流線の剥離はなく, また各流線は底面のsine形状に極めて近い形状をしていることがわかる。図6のようにたとえシュート&プールが発生してもその影響は底面近傍までは達していない(路床形状によっては違ってもよいが)ように思われる。

3.2 ケースB (不規則底面形状の場合) 本研究では不規則底面形状の場合は主に常流の場合につき検討した。このとき流れのフルード数が0.4以下では水面はほぼまっ平らであったが, フルード数が0.4から0.8の間では写真5, 6, 7に示すように水面に定在波が発生した。このとき現れる定在波の波長(の無次元表示 $k_0 = 2\pi/L_0$, L_0 : 波長)とフルード数 Fr との関係を示したものが図7である。ところで平均水深 h , 平均流速 V のところに定在波が存在するということは, その波の位相速度(上流を向いている) C と平均流速 V の間に $V = C$ の関係が成立していることである。 C として微小振幅波の位相速度を用いると, これは

$$Fr^2 = \frac{1}{k_0 h} \tanh(k_0 h) \dots\dots\dots (1)$$

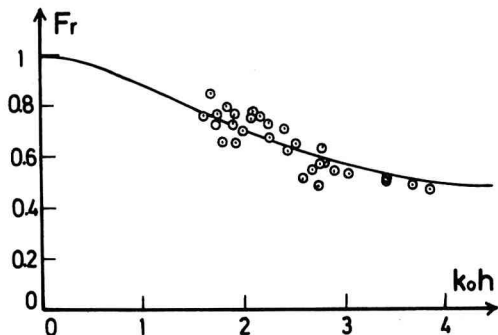


図7. 不規則底面上の流れに現れる定在波の波長, 波数とフルード数の関係 (図中の実線は式(1)で表わされるものである)

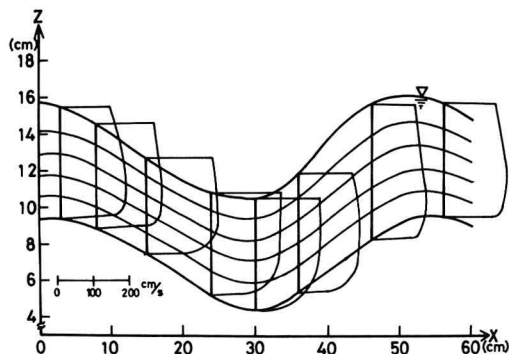


図5. 射流の水面形, 流速分布および流線 (勾配 $I = 1/53$, 単位幅流量 $q = 1000.0 \text{ cm}^2/\text{s}$)

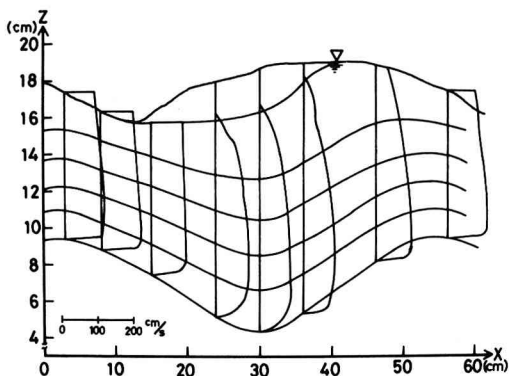


図6. シュート&プールの水面形, 流速分布および流線 (勾配 $I = 1/70$, 単位幅流量 $q = 1000.0 \text{ cm}^2/\text{s}$)

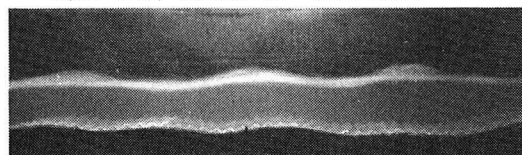


写真5. 不規則底面上に現れる定在波 ($q = 832.5 \text{ cm}^2/\text{s}$, $I = 0.0028$, $Fr = 0.66$, 平均水深 11.7 cm)

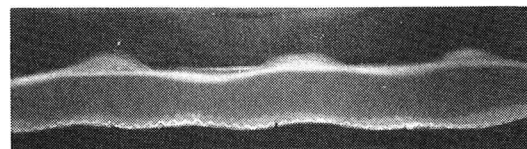


写真6. 同上 ($q = 1212.0 \text{ cm}^2/\text{s}$, $I = 0.0028$, $Fr = 0.70$, 平均水深 14.5 cm)

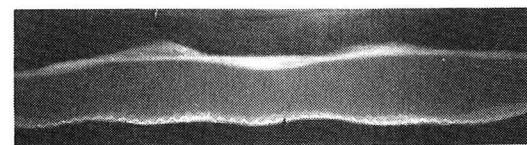


写真7. 同上 ($q = 1800.0 \text{ cm}^2/\text{s}$, $I = 0.0028$, $Fr = 0.76$, 平均水深 18.4 cm)

が成立していることである。図7では実験値と式(1)は非常によく一致していることから上記の考え方の妥当性を確認することができる。さらにこのことは次のように考えることもできる。すなわち不規則底面上の流れでは底面の不規則性によってさまざまな波長をもった水面波が誘起されるが、そのうち $V=C$ を満たす波長をもった波のみが定在波として存在し得る。よって平均流は多くの波の中からただ一つの波のみを残すフィルターの働きをしている。この現象は不規則外力を受ける振動の問題において十分時間を経たときに現れる解は固有振動周期をもつ成分のみであるという現象と全く同様に考えることができる。このような考え方はつぎの理論解析において展開される。

図8は不規則底面上の流れに現れる定在波の波高とフルード数の関係を示したものである。フルード数が0.4以下では水面はほぼまっ平らなため定在波は目視できず、フルード数が0.8以上では水路のいたるところにシュート&プールの水面形が発生してしまう。これが不規則底面上の流れの一つの特徴であると思われる。

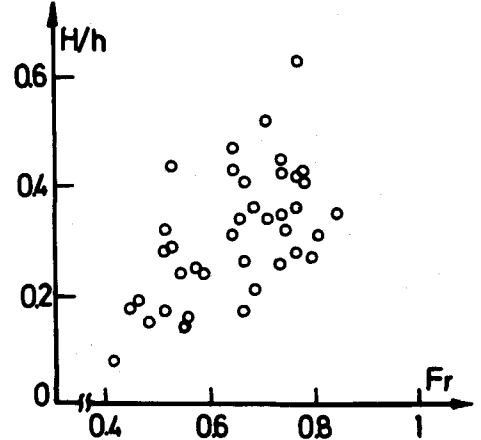


図8. 不規則底面上の流れに現れる定在波の波高とフルード数の関係

4. 不規則底面上の流れの水面形に関する理論解析

不規則底面上の流れの水面形につき、特に常流の場合に限り理論的に解析を行なった。ここで扱う不規則底面はその波高が水深に比べて十分に小さい場合である。このような流れの解析では一般にせん断力を考慮した基本式から出発するものと、ポテンシャル流れとして扱う方法があるが、ここでは理論の簡明さからポテンシャル流れとして扱う。水路床が単sine形のときの解はよく知られており、Kennedy⁶⁾や林⁷⁾らによって移動床の不安定問題に使用されている。水路床が不規則底面の場合には上記の解の和し合わせによって表わすことができ、Jain & Kennedy⁸⁾によると、

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} B(k) e^{ikx} dk \dots (2),$$

$$\phi_0(x, z) = Vx + iV \int_{-\infty}^{\infty} J \cdot B(k) e^{ikx} dk \dots (3)$$

式(2)から(4)によって表わされる。ここに x は流れ方向、 z は(平均水面から測った)鉛直方向の座標を表わしている。 h は平均水深、 Fr はフルード数を表わしている。 ζ は平均水面からの水位の変位、 $B(k)$ は不規則底面のスペクトルに関連した量、 $\phi_0(x, y)$ は流れの速度ポテンシャルである。Jain & Kennedy は上記の基本式に流砂量の連続式を加えて不規則底面をもつ移動床の安定問題を解いているが、彼らの解析では(3)式の一つのフーリエ成分につき解析しているのであって、(3)式の積分を実行しているわけではない。ところで(2)式の積分を実行するときには(1)式の関係を満たす k_0 において(4)式の分母が0になり、特異点が現れてしまう。このように積分経路上に特異点がある場合の対策としては積分を(i)主値積分の意味で考える、(ii)積分経路を特異点を回避するように変更する、(iii)特異点を経路から微小量ずらして積分した後、ずらし量を0にもっていく、以上の三通りの方法があり、どれも同じ結果を得ることができる。しかし、(iii)の方法が物理的意味が一番明確であるので著者らはこの方法を用いて積分を実行した。

$$J(k, z) = \frac{\cosh(kz) + Fr^2 \cdot kh \cdot \sinh(kz)}{Fr^2 \cdot kh \cdot \cosh(kh) - \sinh(kh)} \dots (4)$$

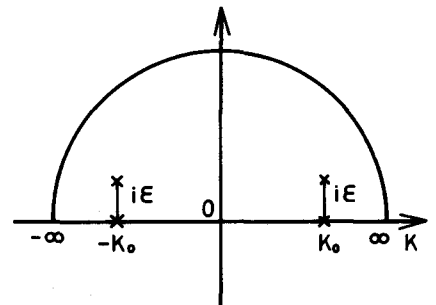


図9. 式(2)の積分を実行する経路と特異点 $\pm k_0$ 、およびずらした特異点 $\pm k_0 + i\epsilon$

ところでポテンシャル流として扱ったとき、(2)式のように特異点が経路上に存在するときの積分方法は最
 にRayleighによって解決されたようであり、Lambの本⁹⁾に記してある。また前記のような特異点が現れる問
 題はプラズマ物理においても現れるようであり、ランダウの規則と呼ばれているようである。著者らは(2)～
 (4)式を基本式として解析したが、後にLighthillの本¹¹⁾にはポテンシャル流れの基本式に立ち返った解析がなさ
 れていることを知った。よってここではLighthillの解析に従って水面形を求める。まず、流れのポテンシ
 ャルは $\phi_0 = Vx + \phi$ とおき平均流からの寄与と波動成分とに分離する。波動成分については $\phi(x, z) = \phi(z)$
 $\exp[i(kx + \omega t)]$ とおく。水面の変位は $\zeta = a \exp[i(kx + \omega t)]$ とおく。 ω は角振動数である。ここで境
 界条件としては以下の三つが考えられる。

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{z=0} = -g\zeta \dots\dots (5), \quad \left. \frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial \phi}{\partial z} \right|_{z=0} \dots\dots (6), \quad w = \frac{\partial \phi}{\partial z} \text{ on } z = -h \dots\dots (7)$$

つぎに未知数 $\phi(z)$, $\zeta(x)$ に関しては次のようにおく。

$$\phi(z) = a [\alpha \exp(kz) + \beta \exp(-kz)] \dots\dots (8), \quad \zeta(x) = aB(\omega, k) \exp[i(kx + \omega t)] \dots\dots (9)$$

ここで未知数 α , β , $B(\omega, k)$ は上記の境界条件から定められ、

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \frac{gk + \omega^2}{\omega k}, \quad \beta = \frac{1}{2} \cdot i \cdot \frac{gk + \omega^2}{\omega k} \dots\dots (10), \quad B(\omega, k) = \frac{i}{\omega} [\omega^2 \cosh(kh) - gk \sinh(kh)] \dots\dots (11)$$

となる。これを用いると底面における垂直方向速度 $w(-h)$ はつぎのようになる。

$$w(-h) = aB(\omega, k) \exp[i(kx + \omega t)] \dots\dots (12)$$

ここで定常状態あるいは定在波を考えると、前節の結論から $V = C = k/\omega \dots\dots (13)$ が成立し、

$$w(-h) = aB(kV, k) \exp(ikx) \dots\dots (13)$$

となる。さらにすべての波数成分からの寄与を加えると、

$$w(-h) = \int_{-\infty}^{\infty} aB(kV, k) \exp(ikx) dk \dots\dots (14)$$

となる。一方底面形状を $f_1(x)$, その微係数を $f(x)$ とすると $w(-h)$ は定常状態ではつぎのように表せる。

$$w(x, -h) = Vf'_1(x) = Vf(x) = v \int_{-\infty}^{\infty} F(k) \exp(ikx) dk \dots\dots (15)$$

となる。ここに $F(k)$ は $f(x)$ のフーリエ変換である。つぎに(14)＝(15)より、 $a = VF(k)/B(kV, k) \dots\dots (16)$

を得る。よって水面の変位 ζ は、

$$\zeta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{VF(k)}{B(kV, k)} \exp(ikx) dk \dots\dots (17)$$

となる。ここに $B(kV, k) = 0$ となる特異点は(11)式、あるいは(1)式を満たす波数 k_0 である。つぎに、先に述べた
 特異点の移動方法を用いると、(17)式の積分は通常の留数の定理が適用できる。すなわち図9に示すように特
 異点 k_0 を $i\epsilon$ だけ上方にずらし、 $k = k_0 + i\epsilon$ を新しい特異点とする。この操作は $\exp(ikx) = \exp(ik_0x) \cdot$
 $\exp(-\epsilon x)$ より、ポテンシャル流れにほんのわずかの減衰項を加えたことに相当する（なお、Lighthill は
 $\omega = \omega_0 - i\epsilon$ とおいているが、これは $\exp(i\omega_0 t) \exp(\epsilon t)$ となることより、底面形状は無限の過去から無
 限小の成長速度で増大して今に到ったとする考え方であり（ランダウの規則）、どちらで考えても結果は同
 じである）。このあと $k = k_0 + i\epsilon$ 点での留数計算にかなり長い計算を必要とするが、その結果、水面形に
 関して次式を得る。

$$\zeta = 4\pi [F(k_0h) \exp(ik_0x) + F(-k_0h) \exp(-ik_0x)] \frac{\sinh(k_0h)}{\sinh(2k_0h) - (2k_0h)} \dots\dots (18)$$

(18式の意味するものは非常に重要である。すなわち不規則底面上の流れでは(1)式のいわゆる Airy 波の関係を満たす波数成分のみが現われる。図 7 の実験結果はまさにこのことを裏づけている。

5. 二次元小規模河床波の発生に関する一試案

二次元小規模河床波の波数とフルード数の関係が(1)式に非常によく一致することは以前より知られており、このことから二次元小規模河床波の発生を Airy 波との関係を把えるという考え方はあった。事実、Kennedy,⁶⁾ Jain & Kennedy,^{8) 7)} 林, 中川・辻本¹²⁾の理論では(1)式を満たす k_0 の河床波の増幅率は無限大になっていた(このとき、河床波の移動速度も無限大になるという不合理がある)。さらに中川・辻本の実験¹²⁾では河床波の発達初期には(1)式を満たす波数の河床波が現われ、水面にも同一波数の(水面)波が存在していた。ここでは前節の結果を用いて二次元河床波の発生を安定問題という考え方からではなく、定在 Airy 波による強制問題という立場から考えてみた。なお流砂の基本式には林の提案したものを修正して用いている。

5.1 微小振幅河床波を支配する Kinematic 方程式とその解: 従来の解析と同様に、河床変位を η 、流砂量を q とし、かつ q と底面流速 u_0 の間に遅れ δ と、inclination factor, α を用いる林の式を用いると、基本式は、

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial q}{\partial x} = 0 \dots\dots (19) \qquad q(x) = \beta u_0^m (x - \delta) \left\{ 1 + \alpha \frac{\partial \eta}{\partial x} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

ここで河床変位 η と河床での流速 u_0 の間には一般に(21)式が成立する。 $u_0 = b\eta + c(x) \dots\dots\dots (21)$

ここに b はある定数であり、 $c(x)$ は上記の定在波からの寄与を表わす。このとき上の3式から次式が得られる。

$$\frac{\partial \eta}{\partial t} + \underbrace{br \frac{\partial \eta}{\partial x}}_{\text{移流項}} = - \underbrace{(\alpha \bar{q}_B - r b \delta)}_{\text{拡散あるいは増幅項}} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} - \underbrace{r \frac{\partial c(x - \delta)}{\partial x}}_{\text{強制外力項}} \dots\dots\dots (22)$$

ここに $r = m \bar{q}_B / V$ である。(21)式で $c = 0$ の場合は右辺第一項の“拡散係数”の正負が初期の攪乱の成長、減衰を左右する。事実、ポテンシャル流れとして(21)式の b を与えるときには林の結果と全く一致する。次に $b = 0$ で $c(x)$ のみあるときは、 $t = 0$ で、 $\eta = 0$ の初期値問題として扱えられる。 $c(x)$ として前節の理論計算より得られるポテンシャルを微分すると、 $c(x) = A \sin k_0 x \dots\dots\dots (23)$ 、となる。ここに A はある定数。このとき(22)式の解は、

$$\eta(x, t) = A r k_0 \cos k_0 (x - \delta) \frac{1}{\alpha \bar{q}_B k_0^2} \{ 1 - \exp(\alpha \bar{q}_B k_0^2 \cdot t) \} \simeq - A r k_0 \cos k_0 (x - \delta) \cdot t \cdot \exp(\alpha \bar{q}_B k_0^2 t) \dots\dots\dots (24)$$

となり、(1)式を満たす波数 k_0 をもつ河床波がしだいに発達する解を得る。このように河床波には二通りの種類のものが存在し、一方は水面の影響(Airy波)という強制外力のもとに発達するものであり、他方は微小攪乱の増幅という形で発達する河床波である。河床波の実験で発達初期に現れる式(1)を満たすものは前者であり、他方 Airy 波の影響が底までとどかないような大水深のところに見い出されるいわゆる ripple は後者によって発達したのだと言えよう。後者は定在水面波の影響を受けないことより、二次元管路に見い出される“河床波”と同一の性質を有していよう。付録によると二次元管路内の河床波は $k\delta \simeq 1$ において最大の増幅率を有している。ここで遅れ距離 δ として砂粒子の粒径 d の100倍をとると、 $k \cdot 100d \simeq 1$ より、卓越波長 L_{max} は、 $L_{max} \simeq 600d$ となる。このことは水深の浅い実験室スケールの河床波では上に述べた定在 Airy 波によって強制的に作り出されたものと、自励振動的に発達したリップルのスケールが非常に近いためにどちらがどの成分なのかは外見上区別がつかないということになる。Jain & Kennedy の実験においては上記の二種類の河床波は河床波スペクトルの二つのコブとなって現れている。

5.2 二次元開水路の移動床実験: 上記のことを確かめるために以下に示すような実験を行った。同様の実験は、⁸⁾ Jain や中川・辻本¹²⁾によって行われており、非常に精度の高いデータが得られているが、ここでは特に二次元性の確保、発達初期に着目する、という二点に留意して実験を行った。用いた水路は幅 5 cm、長さ 4 m であり、使用した砂は $d = 0.2$ mm の豊浦標準砂である。実験ではすべて通水後 1 分以内の非常に二次元性のい

い状態の河床波に着目して計測が行われた（通水後時間がたつと、上流側から非常に波長の長い河床波がやって来たり、三次元化した河床波が現われたが、前者は上流端の影響ではないかと思われる）。図10はそのときの結果であり、実線は式(1)を示している。この図より $Fr < 0.8$ では式(1)と実験点の傾向は非常によく一致している（この結果そのものは、Jain & Kennedy⁸⁾や中川・辻本¹²⁾らのものと全く同様である）。前節の図7と比較して水面波と河床波がフルード数に対して全く同一の関係をもっていることがわかる。このことはまさに安定問題としてではなく、一種の強制振動としての二次元小規模河床波の発生を裏付けているように思われる。

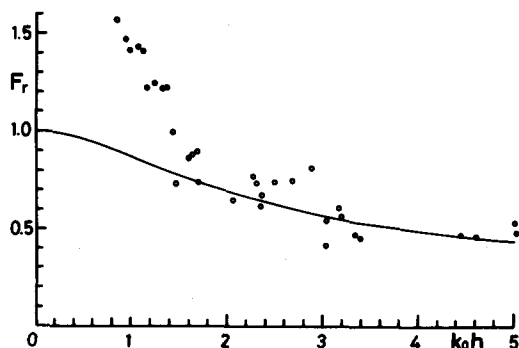


図10. 二次元開水路に発生する河床波の波数とフルード数の関係（図中の実線は式(1)）

結論 本研究で得られた主な結果はつぎのようである。(1)sine形をした水路床上の流れの水面形には射流の水面形、シュート&プールの水面形、常流の水面形が存在する(Iwasa & Kennedy⁴⁾の結論と同じ) ことを実験的に確認した、(2)上記の水面形の遷移には履歴効果がある、(3)不規則底面上の流れの水面には平均流速と一致した位相速度をもつ定在波が存在する、(4)(3)で得られた定在波の存在をポテンシャル流理論を用いて確認することができた、(5)二次元小規模河床波のうち、波数がAiry波（とフルード数）の関係を満たすものは上記の定在波によって強制的に作り出されているという一つの試案を提示し、実験により確認した。以上である。

謝辞 本研究は東京工大・土木工学科の福岡捷二助教授との議論から啓発されて行ったものである。さらに本論文の後半では中央大学土木工学科林泰造教授の大学院講義ノートを参考にした。ここに両先生に対して深湛なる感謝の意を表します。

付録 高さ h の二次元管路の底面に $\eta = a \sin kx$ の攪乱が存在するときのポテンシャルは容易に計算できるが、これを(22)式あるいは(19)、(20)式に代入すると、増幅率 $(da/dt)/a$ 、および移動速度 U_b は次式で与えられる。 $\frac{1}{a} \frac{da}{dt} = \bar{q}_B k^2 \cos(k\delta) \left[\alpha - \frac{m \tan(k\delta)}{\tanh(kh)} \right] \dots (S. 1)$, $U_b = \bar{q}_B k \cdot \frac{\cos(k\delta)}{\tanh(kh)} \left[m + \alpha \tan(k\delta) \cdot \tanh(kh) \right] \dots (S. 2)$

(S.2)より U_b は常に正であり、下流にのみ進む。一方(S.1)式で与えられる増幅率のうち、その最大値を与える $(kh)_{\max}$ は m , α にはほとんど影響されず、かつ δ/h が 0.2 から 2 程度までかわっても卓越波数と δ の積 $k\delta$ は常に $k\delta \approx 1$ の関係を保っている。

参考文献 1) Kirkby, M.J編: Hillslope Hydrology, John Wiley & Sons, 1980., 2) 平野宗夫, 伊藤尚規: 第22回水理講演会論文集, 1978., 3) 山田正: 土木学会論文報告集, No. 306, 1981., 4) Iwasa, Y. and J.F.Kennedy: J. Hyd. Div., Proc. ASCE, Mar., 1968., 5) Yuen, A. F. H. and J. F. Kennedy: IIHR Report No. 121, Dec. 1971., 6) Kennedy, J. F.: J. Fluid Mech. 16, 1963., 7) Hayashi, T.: J. Hyd. Div. 96, 1970., 8) Jain, S.C. and J. F. Kennedy: J. Fluid Mech. 63, part 2, 1974., 9) Lamb, H.: Hydrodynamics, 6th ed. Cambridge University Press, 1932., 10) ランダウ=リフシッツ: 物理的運動学1, 東京図書, 1982., 11) Lighthill, M. J.: Waves in Fluids, Cambridge University Press, 1978., 12) 中川博次・辻本哲郎: 土木学会論文報告集, No. 335, 1983.