

表層放出二次元密度流の流動形態分類および最終上層厚について

Classification and the Ultimate Layer Depth of the Surface Discharge of Two-Dimensional Density Flows

東京大学工学部 正員 玉井 信 行
○東京電機大学理工学部 正員 有 田 正 光

1 はじめに

表層放出の鉛直二次元密度噴流の流動形態に関する研究として、Stefan¹⁾, Koh²⁾, Wilkinson-wood³⁾, 室田・中述・橋本⁵⁾, 有田⁸⁾等があげられる。しかし、これらの研究において放出水理量や放出場の条件による流動形態 特に、噴流と内部跳水の特徴並びに出現領域の区分は明らかになったとはいいがたいと考えられる。ところで、密度流の流動形態は第一義的にその混合機構を支配するものであり、この点についての研究を進める事は工学的にも極めて重要な事柄となる。

本研究においては、共に運動量保存則を用いて記述される密度噴流と内部跳水があたかも別個のものとして取扱われてきたのは不自然であるとの認識に立ち、両者がどのような条件下で生ずるかを統一的に論ずる。また問題の単純化の為に半無限水深時の場合のみを取上げる。

2 運動量方程式および比力一定の条件

考える場合は図1に示す通りであり、又同図中に本研究において考慮する基本的な流れの模式図を示してある。同模式図はWilkinson-woodにより与えられたものであり、流れは連行領域とそれに引続く内部跳水の領域から成ると考えるものである。図1で ρ は水の密度、 h は水深、 q は単位幅流量である。添字0, 02, 1, 2, 1f, 2fはそれぞれ順に、放出口における値、放出口断面における下層の値、①断面上層、①断面的下層、連行および内部跳水による混合終了後の②断面上層、連行および内部跳水終了後の②断面的下層での値を示すものである。

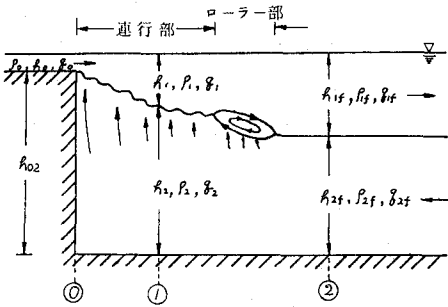


図-1 概念図と記号

解析に当り使用する上下層についての運動量方程式は早川⁴⁾の与えたものを採用する事とし、半無限水深 ($h_{02}, h_{2f} \rightarrow \infty$) の場合については上・下層についてそれぞれ式(1)、式(2)で与えられる。式(1)、式(2)においては流速分布が各断面において一様であると仮定する事により運動量補正係数の値は1とされている。

$$\frac{\rho_1 q_1^2}{h_1} - \frac{\rho_0 q_0}{h_0} = \frac{1}{2} \rho_0 g h_0^2 + \frac{1}{2} (h_{02} - h_2) (\rho_0 g h_0 + \rho_1 g h_1) - \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 \dots\dots\dots (1)$$

$$\rho_0 g h_0 + \rho_2 g (h_{02} - h_2) = \rho_1 g h_1 \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 g は重力の加速度である。

式(1)、式(2)より $\Delta h = h_{02} - h_2$ を消去すると式(3)を得る。

$$F_s = \frac{\rho_1 q_1^2}{h_1} + \frac{1}{2} \rho_1 g h_1^2 \left(1 - \frac{\rho_1}{\rho_2}\right) = \frac{\rho_0 q_0^2}{h_0} + \frac{1}{2} \rho_0 g h_0^2 \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho_2}\right) = \text{const.} \dots\dots\dots (3)$$

式(3)は比力 F_s が各断面において等しく、この量が流下過程において保存される事を表わしている。式(4)、式(5)に示される連続の条件および欠損密度流束保存の条件を考慮すると式(3)は書き直されて式(6)となる。

$$\rho_1 q_1 = \rho_0 q_0 + \rho_2 q_2 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\Delta \rho_1 q = \Delta \rho_0 q_0 \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$F_{st} = \frac{F_s}{\frac{1}{2} \frac{\rho_0}{\rho_2} \Delta \rho_0 g h_0^2} = 2 \left\{ 1 + \frac{\rho_2}{\rho_0} (Q-1) \right\} \frac{Q}{H} F_{d0}^2 + \frac{H^2}{Q^2} \left\{ 1 + \frac{\rho_2}{\rho_0} (Q-1) \right\} = 2 F_{d0}^2 + 1 = \text{const.} \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここに $\Delta \rho_1 = \rho_2 - \rho_1$, $\Delta \rho_0 = \rho_2 - \rho_0$, F_{d0} = 放出密度フルード数, $H = h_1/h_0$, $Q = q_1/q_0$ である。
式(6)は希釈倍率 Q を与えれば F_{d0} の関数として H について解く事ができ, その結果は式(7)で与えられる。

$$H^3 - \frac{2 F_{d0}^2 + 1}{\frac{\rho_2}{\rho_0} Q - \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0}} Q^2 H + 2 F_{d0}^2 Q^3 = H^3 - CH + D = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに, $C = \frac{(2 F_{d0}^2 + 1) Q^2}{\frac{\rho_2}{\rho_0} Q - \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0}}$, $D = 2 Q^3 F_{d0}^2$

上式の解を三角関数を使用して記述すると結局, 式(8)の解が得られる。

$$H = \begin{cases} 2 \sqrt{\frac{c}{3}} \cos \theta_0 \\ -2 \sqrt{\frac{c}{3}} \cos \left(\theta_0 - \frac{\pi}{3} \right) \\ -2 \sqrt{\frac{c}{3}} \cos \left(\theta_0 - \frac{\pi}{3} \right) \end{cases} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここに, $\theta_0 = \frac{1}{3} \cos^{-1} \frac{-D/2}{\sqrt{c^3/27}}$

ところで式(7)は鷲見等⁶⁾によっても同様の方程式が得られており, また早川の解析結果に半無限水深の条件を課すとその結果は式(8)と一致すべきものである。さらに, 連行が生じないという理想状態を考え, $Q = 1$, とおくと式(7)の解は Yih-Guha の解⁷⁾に一致する。

3 流れの形態分類

本研究においては流れの形態分類を図2の①, ②, ③, ④, ⑤, ⑥に示す様に分類する事とし, 以下にそれぞれの形態の特徴について説明を加えてゆく。

① 密度噴流

全域, 連行領域からなり, 下層水からの連行により大きな希釈を生ずる形態。

② 噴流混在型内部跳水

全域, 連行領域となる為には下層水の希釈水量が不足し, 連行途中で内部跳水を生ずるもの(ゲートなどで下流側水深が定められた場合も同様な形態となる)で連行部による大きな希釈とローラー部による比較的小さな希釈を伴う形態。

③ 自由型内部跳水

放出口で直ちに内部跳水を生ずる場合でローラー部による比較的小さな混合による希釈のみが存在する。噴流から自由という意味でここでは自由の名を冠する事とした。

④ 潜り内部跳水(混合あり)

放出口端において上層が潜っている自由型内部跳水であり, ローラー部よりの混合希釈は極めて小さい。

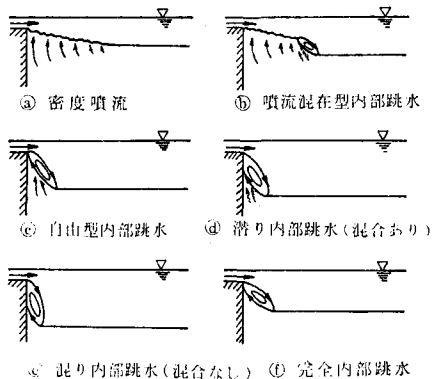


図2 流動形態の分類

⑤ 潜り内部跳水（混合なし）

潜り内部跳水であるが、上層が深くなり、混合を伴わないもの。

⑥ 完全内部跳水

自由型内部跳水と同様に放出口端で直ちに内部跳水を生ずるが上下層が混合しない異なる流体から成る場合である。（もしくは斜面勾配の存在などにより混合すべき下層水がない条件でも発生しうる。）

4 解析結果と流れの形態分類に関する考察

4.1 無次元比力（ F_{st} ）の保存と流動過程

比力の保存を表わす式(6)は希釈倍率 Q を与える事によって解けるが、1つの例として $F_{d0} = 4$ 、 $\rho_1/\rho_0 \approx 1$ の場合の解を求め、その結果を図示したものが、図3である。図3を図2に示した流動形態との関連で説明すると次のようになる。

密度噴流の場合は放出口点 $A:H=1$ 、 $F_{st}=2F_{d0}^2+1=33$ より出発して連行を伴いながら B 点を経由して C 点に至り、ここで連行を終了し最終上層厚となる。なお C 点における最終的上層密度フルード数 F_{df} は4.3節で示すように $F_{df} = 1$ である。

噴流混在型内部跳水の場合は A 点から出発し連行を伴いながら B 点に至る。 B 点において連行水量の不足を生じ、内部跳水を起して D 点になる。ここで連行終了点 B は下流側条件により定まり、図3は希釈倍率 $Q=1.4$ の場合を示す。また B 点と D 点の希釈倍率が異なるのは内部跳水により発生するローラー部よりの混合量を考慮した為である。

自由型内部跳水は A 点において内部跳水を起し E 点に至る。

完全内部跳水は A 点において内部跳水を起すが上下層の混合がない為に $Q = 1$ の比力曲線上の F 点に至る。 F 点は Yih-Guha の解に一致するものである。

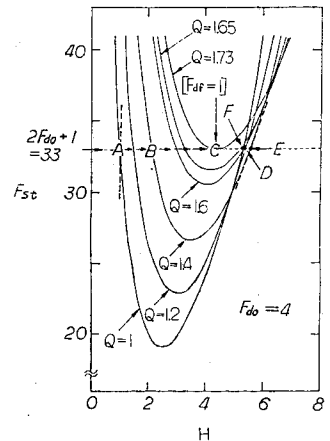


図3 無次元層厚比と無次元比力

4.2 密度噴流の最終上層厚（ H_f ）と最終希釈倍率（ Q_f ）

全域連行領域から成る密度噴流は4.1節で述べた様に A 点より発して連続的に C 点に至り、最終上層厚および最終希釈倍率に達すると考えられる。 C 点における躍層厚および希釈倍率は $\partial F_{st}/\partial H = 0$ の条件より定められる。

$\partial F_{st}/\partial H = 0$ の条件よりまず無次元の最終上層厚 H_f が求められて次式となる。

$$H_f = \frac{h_{1f}}{h_0} = Q_f F_{d0}^{2/3} \quad \dots\dots\dots (9)$$

式(9)で与えられる H_f における密度フルード数 F_{df} は式(5)、(9)を用いて $F_{df} = 1$ と計算される。

$$F_{df} = \frac{q_{1f}^2}{\frac{\Delta \rho_{1f}}{\rho_2} g h_{1f}} = F_{d0}^2 \left(\frac{\Delta \rho_0}{\Delta \rho_{1f}} \right) Q_f^2 H_f^{-3} = 1 \quad \dots\dots\dots (10)$$

またこの場合の最終希釈倍率 Q_f は式(9)を式(7)に代入して、結局式(11)を得る。

$$Q_f = \frac{q_{1f}}{q_0} = \frac{\rho_0}{\rho_2} \left\{ \frac{2F_{d0}^2 + 1}{3F_{d0}^{4/3}} + \frac{\Delta \rho_0}{\rho_0} \right\} \div \frac{2F_{d0}^2 + 1}{3F_{d0}} \quad \dots\dots\dots (11)$$

式(11)を式(9)に代入して H_f は式(12)の形に書き直される。

$$H_f = \frac{2F_{d0}^2 + 1}{3F_{d0}^{2/3}} \quad \dots\dots\dots (12)$$

図4は式(12)より得られる H_f と F_{d0} の関係を描いたものである。また、同図中に完全内部跳水の場のYih-Guhaの解も示してある。同図より密度噴流の解は完全内部跳水の解と $F_{d0}=85$ 程度でその大小関係が反転している事が興味深い。また式(11)で示される密度噴流の場合の希釈倍率を放出密度フルード数の関数として表-1に示してあるがその結果は比較的妥当なものであると判定される。

表-1 放出密度フルード数と最終希釈倍率(密度噴流)

F_{d0}	1	2	4	8	12	16	20
Q_f	1.00	1.19	1.73	2.69	3.51	4.24	4.92

4.3 H-Q図と流動形態分類

式(8)より得られるH-Q図を比較的小さい放出密度フルード数, $F_{d0}=4$ と比較的大きい放出密度フルード数, $F_{d0}=14$ の場合について図5に示してある。同図中において密度噴流, 噴流混在型内部跳水, 自由型内部跳水, 完全内部跳水の通るべき軌跡がそれぞれ実線(A→C), 破線(A→B→D), 一点鎖線(A→E)で示されている。

本図で留意すべきはE点である, E点は $\partial H/\partial Q$ を満足すべき点, である事より算出され, その場合の H_f , Q_f はそれぞれ式(13), 式(14)で与えられる。

$$H_f \div 2^{1/3} \frac{2F_{d0}^2 + 1}{3F_{d0}^{2/3}} \dots\dots\dots (13)$$

$$Q_f \div 2^{-1/3} \frac{2F_{d0}^2 + 1}{3F_{d0}^{1/3}} \dots\dots\dots (14)$$

著者等はE点が自由型内部跳水を与えると考えるが, この場合の混合量が従来の実験結果と比較して少々大きいのは気になる点である。しかし自由型内部跳水とされる従来の実験はほとんど染料による可視化によってその条件が判定されたものである。一般に可視化される密度界面は本来の温度差による密度界面より上層にある事を考慮すると自由型内部跳水とされる実験は潜り跳水の状態での実験となっていた可能性は否定できないものであり, 解析の妥当性を否定するものではないと考える。ところで潜り跳水となった場合の混合量は極めて急激に低下するものと考えられる。図5中に潜り跳水の場合に定性的に予測される曲線を模式図的に示した(破線の曲線E→G)。

図5の検討より得られる知見を要約すると次の通りである。

- (1) 密度噴流の最終的躍層厚は前節にも述べた様に F_{d0} が小さい場合, 完全内部跳水の解より小さくなり, F_{d0} が大きい場合は完全内部跳水の解より大きくなる。
- (2) 噴流混在型内部跳水の最終的躍層厚は密度噴流の場合より大きくなり, またその程度は内部跳水域が大きくなる程, 大きい。

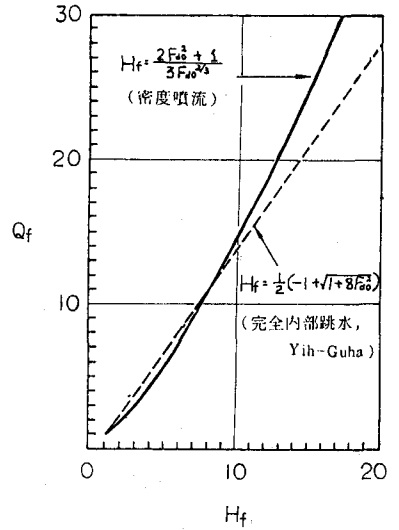
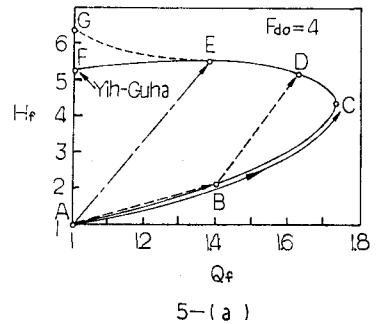
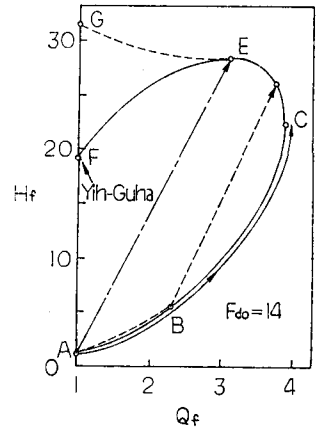


図4 放出密度フルード数と最終上層厚の関係



5-(a)



5-(b)

図5 希釈倍率と無次元上層厚の関係

- (3) 自由型内部跳水の場合はA点から発し、Hのピーク値を与えるE点に至る。また自由型内部跳水後の上層厚がE-F間に位置するのは、上下層間の混合のしやすさ、つまり物性によると予測される。(斜面勾配がある場合その程度に応じてE-F間に位置すると考えられる。)
- (4) 潜り跳水の場合は下流側躍層厚が大きくなるとその大きさに応じてEからGへ移動してゆく。結局、最終的躍層厚の存在域は密度噴流から潜り跳水へ遷移するに伴ない。C→D→E→Gとなると考えられる。

4.4 H-F_{do} 図と流動形態分類

式(7)の解である式(8)を基に4.3節のH-Q図に対する考察結果を念頭においてH_f-F_{do}図上で流動形態分類を行い、その結果を図6に示す。ただし式(8)の負解は意味がないので無視してある。

図6は図5との関連において次の様に理解される。図6中の領域Ⅰ(潜り内部跳水)は図5中の曲線E→G; 図6中の自由型内部跳水(曲線O→E)は図5中の点E; 図6中の領域Ⅱ(噴流混合型内部跳水)は図5中の曲線C→E; 図6中の密度噴流(曲線O→C)は図5中の点C; 図6中の領域Ⅲ(遷移域)は図5中の曲線A→C; 図6中の完全内部跳水(曲線O→F)図5中の点F; にそれぞれ対応する。

図6は潜り内部跳水以外は最終的上層厚は領域Ⅱの範囲に入る事を示すものである。領域Ⅱは比較的低放出密度フルード数においてはYih-Guhaの解で近似する事が可能であり、また比較的高放出密度フルード数においてはYih-Guhaの解より大きくなると言う事ができる。

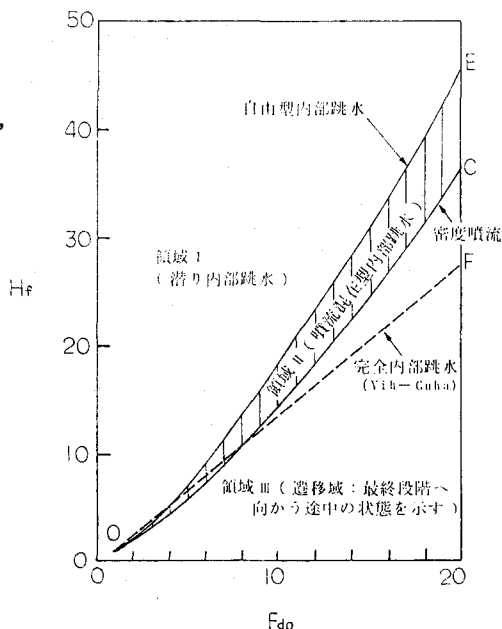


図6 流動形態別の無次元最終上層厚さ

5 解析結果の検証

5.1 流動形態の遷移について の実験による理論の検証

実験に使用した水槽は長さ10 m, 幅10 cm, 高さ1 mの鉛直二次元水槽であり、その模式図を図7に示す。理論の検証の為の実験は放出口水深: 1 cm, 放出密度フルード数: $F_{do} \approx 12$ で行われた。実験においては下層

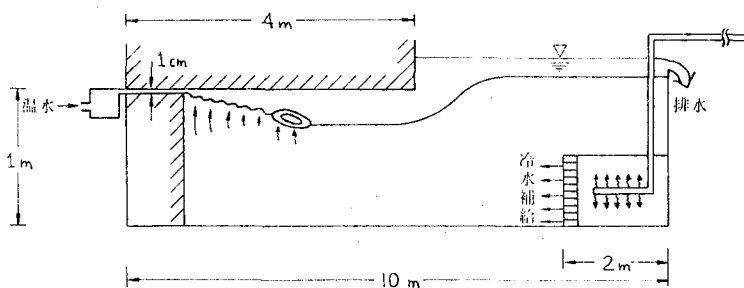


図7 実験水槽

水の補給を行わず時間経過によって、流動形態を密度噴流から潜り跳水まで変化させる事とした。実験における流動形態の時間的な変化について記述すると次の様である。

- (1) 流れはその初期状態において下層水から十分な連行水量を得て、全域連行領域の密度噴流として流動する(形態分類④)。
- (2) 徐々に連行されるべき下層水が不足し、連行途中で内部跳水を発生し、噴流混在型内部跳水(形態分類⑤)となる。
- (3) さらに下層水が不足すると希釈水量が少なくてすむ自由型内部跳水(形態分類⑥)となる。
- (4) 最終的には希釈水量が極めて少ない潜り内部跳水(形態分類⑦), そして上下層の混合を全く伴わない、さらに深い潜り内部跳水(形態分類⑧)となって定常状態に達する。

ここに記述する実験による流動形態の遷移は図5上で点C→D→E→Gと躍層厚を増加させながら移動す

る事に対応している。今回の実験においては希釈水量 Q は測定されなかったため図5の形式で理論のチェックはできなかった。従って、理論と実験の整合性は図8に示す様に H_f - F_{d0} 図上で検証することとした。図8中で実験において密度噴流と見做せるものは $\triangle$, ∇ , $\square$ 噴流混在型内部跳水は $\blacktriangle$, $\blacktriangledown$, $\blacksquare$ で落り跳水は $\blacktriangle$, $\blacktriangledown$, $\bullet$ で示してある。

実験より解析結果において示した様な流動形態が密度噴流から落り跳水へ変化させながら最終的上層厚が厚くなってゆく様子が分る。また実験結果を理論と比較すると、実験結果は理論曲線より全体として H_f が小さい事が分る。この原因は比較的放出密度フルード数が大きい為下層の逆流の影響が出やすい事(有限水深の影響)や解析の為の基礎式である式(1), 式(2)の誘導において使用された水圧が静水圧分布に従うとの仮定等に問題がある事を示すものと考えられる。

5.2 最終的躍層厚に関するデータの蒐集と解析結果の検証

最終的上層厚に関する著者等の実験データおよび著者等以外の実験データの蒐集により図9を描いた。図9において実験者により落り跳水と判定されているものには左向きのフラッグ、密度噴流と判定されているものには右向きのフラッグをつけてある。同図より全体として、左向きフラッグのついたデータは領域Ⅰに、その他のデータは領域Ⅱに、また領域Ⅲにはデータがないという事が概ね言えると考えられる。この事は解析の妥当性を裏付けるものであると考えられる。

6 結論

本研究は早川の使用した運動方程式より発して半無限水深時の表層放出二次元密度流の流動形態に関する解析を行い、その結果と実験結果との比較検討により、解析の妥当性を示したものである。本論文の概要および結論は次の通りである。

- (1) 図2の①~④に示してある様な流れの流動形態の分類を行った。
- (2) 放出比力保存の条件より、希釈倍率を変数として無次元比力と無次元層厚比との関係(図3)を描き、同図における流れの流動過程を明らかにした。

- (3) 密度噴流および自由型内部跳水の最終上層厚および最終希釈倍率を誘導した。

- (4) 解析結果より希釈倍率の関数として最終層厚比を示し(図5), 流動形態に応じた流況の特徴を明瞭に示した。

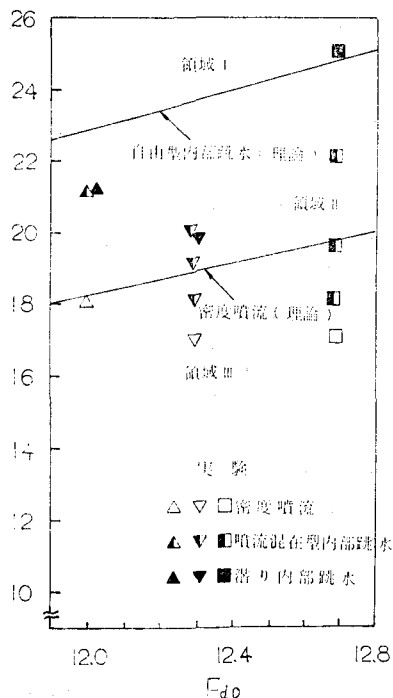


図8 最終上層厚の理論と実験値との比較

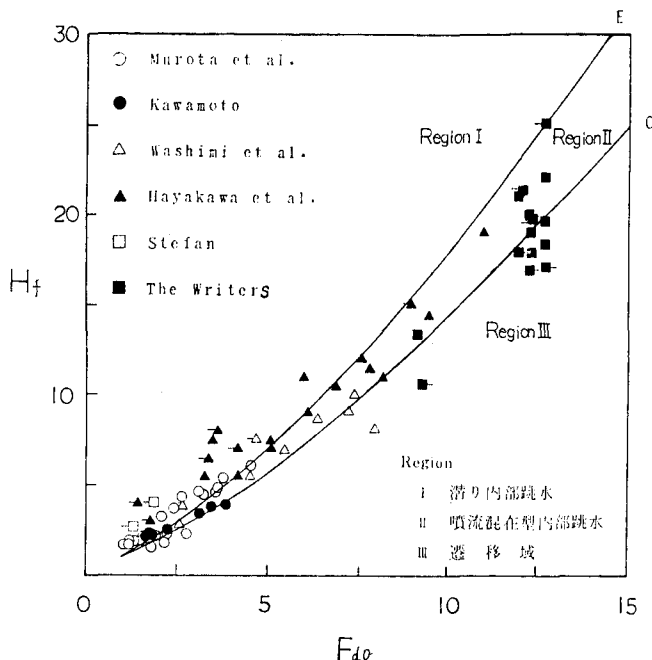


図9 形態分類図と実験結果

- (5) 放出密度フルード数に応じた流動形態分類を行った。
- (6) 実験により解析的に得られた流動形態分類図の妥当性を検証した。

参 考 文 献

- 1) Stefan, H. : Stratification of flow from channel into deep lake , Proc. of ASCE, HY7, PP1417-1434, 1970.
- 2) Koh, R. : Two-dimensional surface warm jets, Proc. of ASCE, HY6, PP819-836, 1971.
- 3) Wilkinson, D. L. and Wood, I. R. : A rapidly varied flow Phenomenon in a two-layer flow, JFM, Vol. 47, PP241-256, 1970.
- 4) Hayakawa, N. : An analytical study of two-layered, rapidly varied flow, Proc. JSCE, No. 30, PP83-89, 1974.
- 5) 室田明・中述啓二・橋本長幸：表層密度流の界面における乱れ構造について，第23回水理講演会論文集，PP 399-404, 1979.
- 6) 鷲見元宏・吉川秀夫・福井吉孝・橋本進：断面の変化する水路における密度流，第27回水理講演会論文集，PP 537-542, 1983.
- 7) Yih, C. - S. and C. R. Guha : Hydraulic jump in a fluid system of two layers, Tellus, Vol. 7, No. 3, PP 358-366, 1955.
- 8) 有田正光：噴流型表層密度流の内部 Jump について，第34回年次講演会概要集，PP 275-276, 1978.