

短周期界面波における非線形現象の発生条件

Conditions for Nonlinear Development of Short-Period Interfacial Waves

北海道大学大学院 学生員 中野 渉
北海道大学大学院 学生員 遠藤 浩
北海道大学工学部 正 員 八鍬 功

1 はじめに

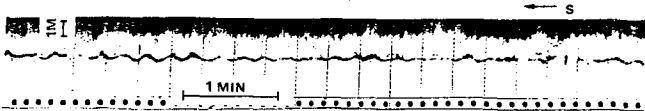
河口二層流に関する過去の現地観測結果¹⁾²⁾³⁾⁴⁾によれば、河道内にはほぼ定常的に塩水楔が存在する流量状況の下では、二層の密度界面には極小振幅の波動が存在する程度であり、河道内における塩水拡散の主要因は、剪断不安定波の存在よりも地形性擾乱及び風による表面攪乱であると考えられる。これに対し、流量が増加し塩水楔の限界流量 Q_c を越える場合、塩水楔の後退とともにその界面に波動が成長し、この波動の砕波による塩水拡散が広い領域にわたって生ずる様になる。³⁾ 写真-1は増水時に石狩川河道内に超音波測深機を設置して測定された界面形状の記録であるが、(a)においてすでに波の峰が cusp 状になって局所的砕波を生じており、約10時間後の(b)では長周期で大振幅の波のために大規模な砕波・拡散を生じている。この様な増水期における界面波の特徴は、波形が正弦関数から外れていることと、数波からなる波群を形成していることである。

有限振幅波における非線形性は、個々の波に対する波形の変形と、線形分散関係に対する修正効果のほかに波群特性にも影響を与えることが知られている。水の表面波において Benjamin-Feir 型と称される波列の自己変調現象⁵⁾⁶⁾や波束の包絡線 soliton への分裂⁷⁾⁸⁾などが良く知られた例であり、いずれも Nonlinear Schrödinger 方程式(NLS 方程式)(1)で記述される。ここで A は波の複素振幅であり、角周波数 ω と波数 k は線形分散関係を満す。 μ, ν は系に特有な係数である。

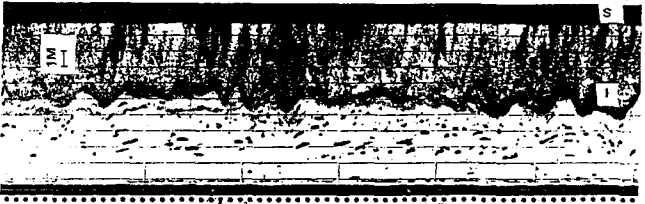
$$i \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{d\omega}{dk} \frac{\partial A}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \nu |A|^2 A = 0 \dots\dots\dots (1)$$

内部波や界面波の非線形波群の振舞いもこの方程式で記述される場合のあることが、Grimshaw,⁹⁾ Tanaka¹⁰⁾によってそれぞれ導かれているが、いずれも非粘性理論でありこの種の弱い非線形現象が実際の系での強い粘性効果に打ち勝って維持されるかどうかは不明である。

そこで今回は、この NLS 方程式で記述される非



(a) 1981年10月22日 14:35 ($Q = 300 \text{ m}^3/\text{s}$)



(b) 1981年10月23日 12:05 ($Q = 1,200 \text{ m}^3/\text{s}$)

写真-1 石狩川増水期における界面形状

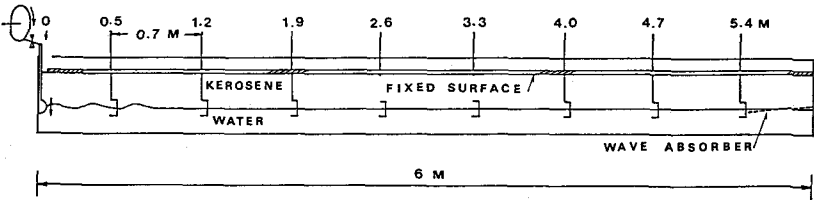


図-1 実験水槽

線形現象がいかなる条件の下で現われるのか実験によって調べ、考察を加えた。

2 実験装置と方法

実験装置の構成は図-1に示した通りである。長さ6 m、幅25 cm、高さ50 cmの全面アクリル製水槽内に密度の異なる二流体で二層系を形成し、表面は固定壁とする。この状態で左側の造波装置より、一様波、変調波、波束などを発生させ、70 cm間隔で設置された8本の赤外線式波高計⁽¹¹⁾⁽¹²⁾により各点での界面変位を検出する。波高計は probe ごとに特性が異なるが、図-2に示した様にほぼ線形で、抵抗線式波高計に比べ校正が容易である。波高計出力は2台の4-CHデータレコーダに記録され、A/D変換した後、ミニコンピュータで数値的に処理を行なった。

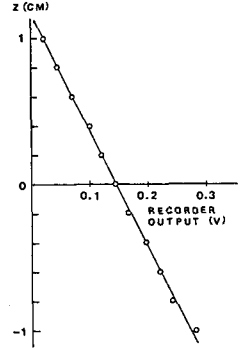


図-2 波高計校正図

今回の実験では、理想的な二層系が形成できるという理由から、灯油と水を用いて実験を行なった。淡水と塩水の場合には各層の赤外線吸収率があまりちがわないためいずれかの層に吸収体を混入して波高計感度を補う必要があったが、水が赤外線の良い吸収体であるのに対し、灯油はあまり吸収せず、他の吸収体を混入する必要がなくなった。測定時における水の密度は1.004 g/mlで、灯油の密度は0.792 g/mlであった。

最初の実験では、水槽の一方に roughness のある傾斜板を設置して消波を行ない、反射の影響をほぼ除いて、一様波、変調波、波束の発達を調べた。その後この消波板を除いて波束を発生させ、鉛直壁反射の場合について実験を行なった。

3 実験結果と考察

3.1 無反射での実験

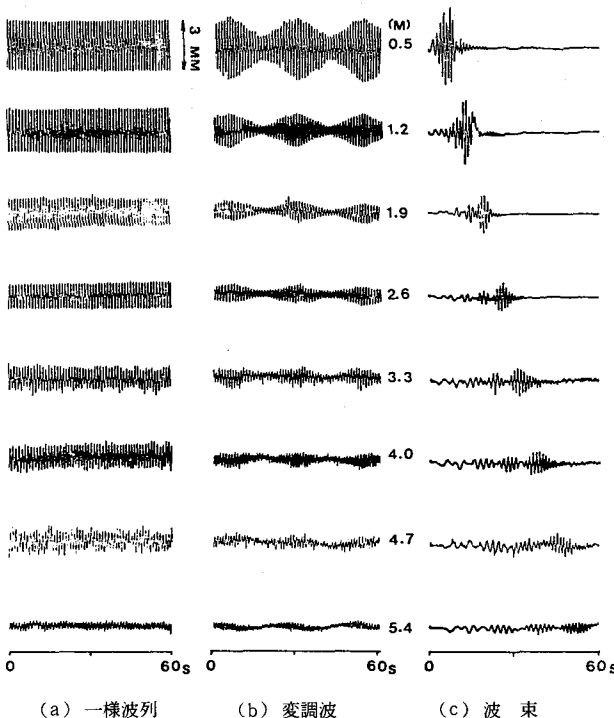


図-3 無反射時の波形記録

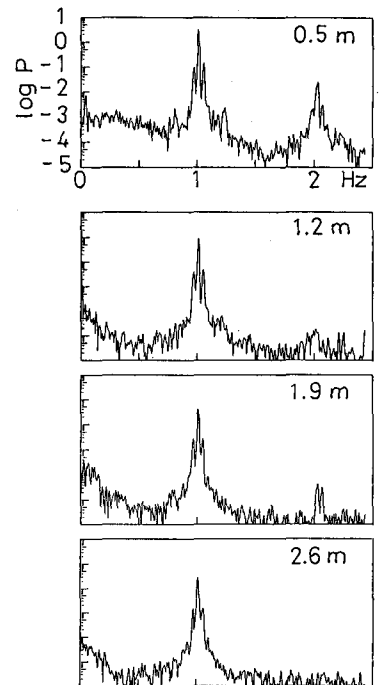


図-4 図-3(b)のスペクトル

消波板により反射の影響をほぼ除いた場合の、一様波、変調波、波束造波における各点での波形を図-3の(a)(b)(c)にそれぞれ示す。各層の厚さは上層が21cm、下層が24cmである。

一様波の結果図-3(a)について考察する。この実験条件の下でNLS方程式(1)の係数¹⁰⁾は、 $\mu = -4.4 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ 、 $\nu = -0.83 \text{ cm}^2 \text{ s}^{-1}$ となり、振幅 $a_0 = 0.15 \text{ cm}$ を使えば、周期23秒程度の変調不安定が発達するはずである。ところが、ほとんどその様な現象は見られず、一様に減衰している。周期24秒の変調を与えた図-3(b)でも非線形な特性が現われている様には見えない。図-3(b)のスペクトルを求めた図-4を見ると、0.5 mのスペクトルは基本波成分及び side-band の変調波成分に対して2 Hz付近に高調波成分を持ち非線形性を有しているが、1.2 m以後では高域側の back ground の成分とともに高調波も減衰し、非線形波としての特性を消失していることがわかる。

次に、波束を造成した図-3(c)によれば、ほぼ同じ振幅の4波束への分裂が見られるが、この分裂は初期波 にもともと含まれていた波群成分が単調に分散した結果とも考えられる。図-5に0.5 mと5.4 mでのスペクトルを示す。初期スペクトルは1 Hzの卓越波 peakを含む複数の broad な peak から成っている。このスペクトルは、5.4 mまでに高周波成分ほど減衰を強く受け、その結果4つの peak がほぼ同じ大きさになっている。つまり図-3(c)の5.4 mでの波形はこの減衰効果と分散効果の結果に過ぎない。

図-4及び図-5におけるスペクトルの変化から判断すると変調不安定モードが成長しなかった原因は粘性減衰にある様である。そこで、成分波の振幅減衰率 γ と不安定モードの空間増幅率 β を求め、比較してみる。振幅 a 、群速度 c_g 、NLS方程式の係数 ν を使って空間増幅率 β は

$$\beta = |\nu| |a/2|^2 / c_g \dots\dots\dots (2)$$

与えられる。一方、各周波数成分に対する γ を求めるために、図-5に示した波束のスペクトルが広帯域であることを利用する。図-3(c)の波形のうち0.5、1.2、1.9、2.6 mにおけるスペクトルを求め、2 Hz以下の領域に存在する peak の強度減衰率を求める。 γ は強度減衰率の $\frac{1}{2}$ で与えられる。この様にして求めた減衰率 γ と、図-3の実験における初期振幅(約0.15 cm)に近い0.1 cmとその10倍の1 cmの振幅を持った一様波に生ずる不安定モードの増幅率 β の周波数依存性を図-6に示す。 γ は周波数 f にはほぼ比例して増加しており、高域成分ほど減衰が大きい。 β は指数関数的な増加を示しており、また振幅 a に大きく依存している。ある周波数の波は、 $\beta > \gamma$ なる条件下では粘性に抗して不安定化するが、 $\beta \ll \gamma$ なる条件の下では単調な減衰波として観測されるであろう。 $a = 0.1 \text{ cm}$ に対する増幅率曲線を見ると、上の実験における搬送周波数1 Hz付近では $\beta = 0.02 \text{ m}^{-1}$ に対して $\gamma = 0.95 \text{ m}^{-1}$ と減衰効果が卓越しており、不安定現象が見られなかったことが理解できる。

ところで、 $\beta < \gamma$ なる条件下でも γ に対して β が極端に小さくなければ、変調不安定モードだけは減衰率が $\gamma - \beta$ と小さくなるため他の周波数成分に対する相対的な増幅が観測されるであろう。 $a = 1 \text{ cm}$ の場合は、図-6に見られる様に、0.9 Hz以下にその様な領域を持っている。図-6では $\beta > \gamma$ なる領域も存在する様に見えるが、実際には周波数0.5~0.6 Hzより高い周波数で1 cmの振幅を得ることは無理である。結局、振幅1 cm程度で0.5 Hzから0.6 Hz程度の低周波の波を発生すればよいことになるが、伝播速度が大きくなるため、6 mの水槽では十分な伝播時間を得られない。そこで、水槽の終端にあった消波板を取り除き、12 m

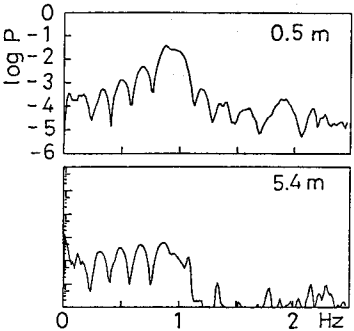


図-5 図-3(c)のスペクトル

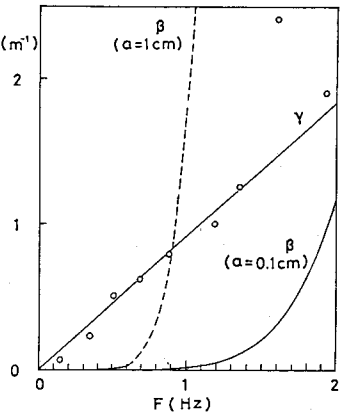


図-6 振幅減衰 γ と不安定モードの増幅率 β の周波数依存性

の水槽での実験と等価とは言えないが、反射を利用することで波群の長時間的振舞いを調べた。入・反射波間の衝突が全領域にわたってしまうため波列の実験は不可能で、衝突領域が一部に限られる波束の実験のみ行なった。

3.2 波束の反射実験

実験は、周波数が 0.54 Hz の波10波からなる波束（最大振幅 1.1 cm ）及び5波からなる波束（最大振幅 0.8 cm ）について行なった。その結果が図-7の(a)、(b)である。

まず図-7(a)について見ると、 0.5 m における入射波束は幅が広いが、 1.9 m では収束を見せており、 3.3 m まで比較的安定して伝播している。 4.0 m から 5.4 m までは入・反射波が重複しているが、 6 m の所にある壁で反射された後、 $(8.7) \text{ m}$ （造波機からの正味の伝播距離を括弧に入れて表示する）では入射波と分離した反射波が幅の広い波束となって現われる。この波束は安定でなく、 $(9.4) \text{ m}$ から $(11.5) \text{ m}$ まで波束の分裂と結合を繰り返して $(11.5) \text{ m}$ では3個の波束の状態になる。この3つの波束のうち、特に最初に現われる低周波の波束は $(10.1) \text{ m}$ の小振幅の部分から急速に生じており、

その特異性が注目される。次に図-7(b)に移る。 0.5 m での波束は幅の狭いパルス状であるが、これは安定でなく、分散効果のためにしだいに幅の広い波束となる。 3.3 m 以後の衝突領域では入射波-反射波間の相互作用のために複雑な波形になっているが、この領域内での反射を経て波束は不安定化し、 $(9.4) \text{ m}$ では多数の波束に分裂している。 $(11.5) \text{ m}$ までの間は、この波束群が相互に pairing を生じて少数の幅の広い波束にまとまっている様である。以上の図-7の波形記録のうち、造波機に近い4つの波高計記録を入射波と反射波の領域に分離し、(a)、(b)についてそれぞれのスペクトルを求めてみた結果が図-8の(a)、(b)である。ここで、反射波のスペクトルには再反射成分も何割か混在しているが、分離が不可能なため取りあえず「反射波成分」として一括して扱う。

図-8(a)の入射波スペクトルは、 0.5 m で 0.54 Hz の基本波の peak を持ち、高域側にその第三高調波の peak まで現われている。波の伝播にともなって高域成分は減衰してゆくが、高調波成分は 2.6 m まで残っている。反射後 $(9.4) \text{ m}$ ではスペクトルの高域側が減衰しているものの基本波の peak は 2.6 m のものと大差ない（ただし反射波のスペクトルは、計算に用いた data 長が長いので入射波のスペクトルに比べ分解能が良くなっている）。それが $(11.5) \text{ m}$ に進むに従って基本波の peak が分裂を始め、 $(11.5) \text{ m}$ では基本波の peak とその低域側のやや小さな2つの peak になっている。これらの peak は図-7(a)の $(11.5) \text{ m}$ における三つの波束に対応しており、特に最も成長の著しい 0.37 Hz の peak は $(11.5) \text{ m}$ で急に成長した波束とちょ

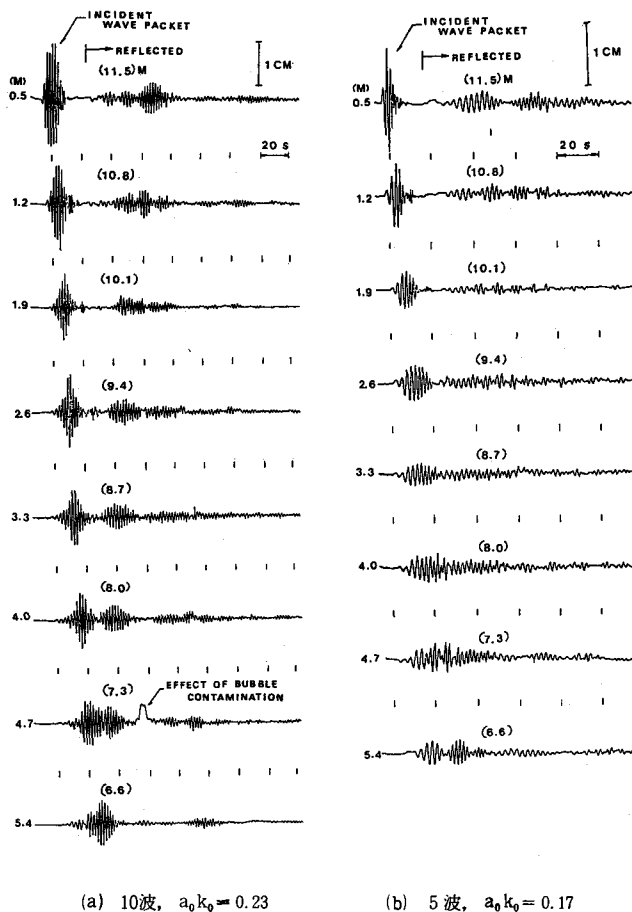


図-7 鉛直壁による波束の反射

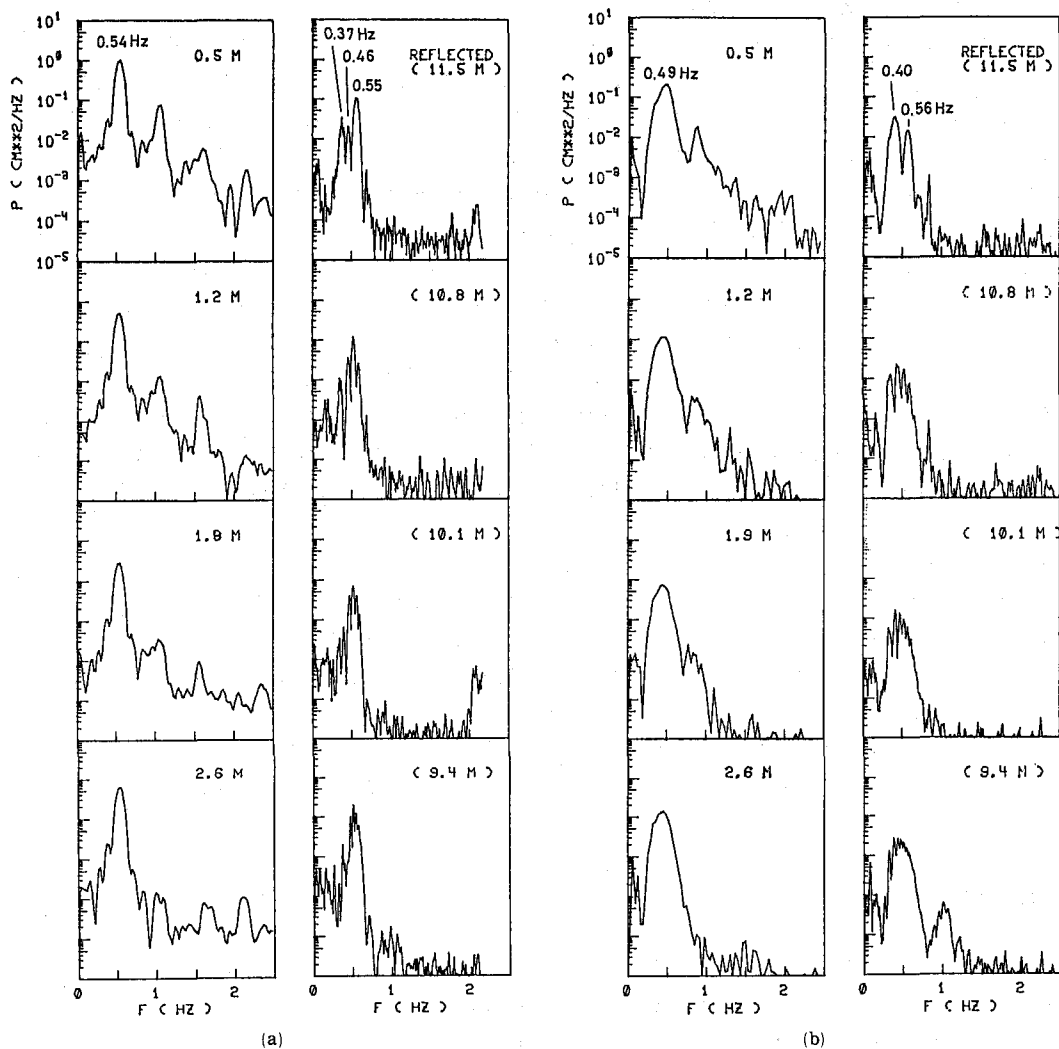


図-8 図-7の入射・反射波スペクトル

うど対応している。次に、図-7(b)に対するスペクトル図-8(b)に移る。0.5 m での基本波 peak は(a)に比べて broad であり、高次の高調波成分は比較的小さい。このスペクトルも伝播に従って高域側での減衰が大きく、2.6 m では一時的に第一高調波さえ消失している。しかし、反射後の (9.4) m では反射波成分に再び第一高調波が成長しており、基本波 peak の頂上が細かく分裂している。これは (10.1) m 以後少数の peak にまとまってゆき、(11.5) m では最終的に、約 0.4 Hz に生じた新しい peak が 0.56 Hz の基本波成分を越えて成長し、新しい基本波成分となっている。これは非線形表面波に見られる。「低周波遷移現象⁶⁾⁷⁾」と同様の現象であると考えられる。

以上の図-7、図-8における(a)と(b)を比較してみると、ともに鉛直壁での反射を経て波束が不安定化し、スペクトル成分間の energy 輸送が生じた結果波束の分裂及び結合が生じていることがわかる。また、図-8の(a)と(b)では入射波スペクトルの peak 幅がかなり異なるにもかかわらず、最終段階の (11.5) m における反射波スペクトルの peak は形が良く似てきている様に思われる。この後さらに伝播すれば、スペクトルがある種の平衡スペクトル⁷⁾に達することも考えられる。

4 波群に非線形現象が生ずる条件

今回の灯油と水の二層系の実験に対し、著者らは先に水と塩水の系における実験結果を報告している¹²⁾。それによると、上・下層の厚さが今回とほぼ同じ20cm程度の場合、搬送周波数0.36 Hzの強い変調波がいわゆる側帯域不安定⁵⁾を生じて変調-非変調状態を繰り返している。これに対し、今回の実験では、十分な伝播時間が得られる1 Hz付近の周波数を持った一様波や変調波は減衰が大きく、非線形現象を見出すことができなかった。3.1節で述べた様に、0.6 Hz程度の低い周波数を与えれば減衰は抑制されることがわかったが、6 mの水槽では波群の伝播時間が短かく、不安定モードの発達に至らない様である。波束の反射の場合に非線形な振舞いが見られたことを考えると、さらに長い水槽で実験を行えば非線形効果を観測できる可能性がある。また、自然界の界面波動ははるかに大きな時間スケールを持っているから、減衰が小さいという点ではfieldの方が現象の観測には有利かもしれない。

ところで、これまで考えてきたのは波群が造波部以外から何らのenergy供給を受けない場合であるが、散逸系であっても、波群が外部のenergy供給源と強くcouplingしておれば非線形性をうまく維持できる場合がある。特に、層流境界層内に人工的に作られた波束が、非線形性を保ったまま長距離伝播することがGaster¹³⁾らの実験で示されており、類似の機構が平均流の影響下にある界面波にも存在する事が考えられる。

5 おわりに

二層界面波の波群に関する実験を行なった結果、波群が粘性減衰に抗して非線形現象を生ずるための必要条件是、振幅減衰率 γ と不安定モードの増幅率 β が $\beta \ll \gamma$ とならない事であると確認された。また、この条件を満足する長波長の波束を壁面で反射させると、入射波と反射波の衝突領域を経て波束が不安定化し、容易に非線形な発達をすることも知られた。今後の課題は、

- (1) 鉛直壁反射の衝突領域で生じている現象に物理的解釈を与えること
- (2) 平均流の存在が有限振幅界面波の波群に与える影響を調べること

である。

謝辞 実験に御協力願った北海道大学大学院生山下浩幸君ほか研究室のスタッフの方々に謝意を表します。

参考文献

- 1) 大谷守正・西條淳夫・八鍬功(1984):第28回水理講演会論文集。
- 2) 吉田静男(1983):第27回水理講演会論文集, p555。
- 3) 中野 渉・八鍬 功・大谷守正(1982):第29回海岸工学講演会論文集, p555。
- 4) 吉田静男(1983):第30回海岸工学講演会論文集, p585。
- 5) Benjamin, T.B. and Feir J.E. (1967): J.Fluid Mech., 27, p417。
- 6) Lake, B.M. et al. (1977): J.Fluid Mech., 83, p49。
- 7) Su, M.-Y. (1982): Phys.Fluids, 25, p2167。
- 8) Yuen, H.C. and Lake, B.M. (1975): Phys.Fluids, 18, p956。
- 9) Grimshaw, R.H.J. (1977): Stud.Appl. Math., 56, p241。
- 10) Tanaka, M. (1982): J. Phys. Soc. Jpn., 51, p2016。
- 11) Koop, C.G. et al. (1979): Rev.Sci. Instrum., 50, p20。
- 12) 中野 渉・遠藤 浩・八鍬 功(1983):第30回海岸工学講演会論文集, p576。
- 13) Gaster, M. and Grant, I. (1975): Proc. Roy. Soc. London, A 347, p253。