第28回水理講演会論文集　1984年２月

利水用貯水池機能の評価のための単純化された相関流量による解析

Stochastic Analysis of Reservoir Function for Water-supply with Simplified Markov Inputs

名古屋工業大学　正会員　○　長尾正志
同大学院　学生員　羽鳥明満
同学部　学生員　浅野和広

1. 研究の概要

1.1 従来の研究の経緯と問題点

利水用貯水池の統計的手法による機能評価の研究で，独立流量の前提は，以後の計算は比較的容易であるが，現実の渇水期にみられる持続性の顕著な流況とはかけ離れている。そこで，流量時系列に自己相関性を導入したモデルが要求される。現在のところ，そのモデルには，マルコフ過程，しかも主として単純マルコフ連鎖が採用されることが多い。その１つとして，行列演算上の次元の拡大による煩雑化を回避しつつ，マルコフ性を勘案していこうとする手法に酔歩理論（ random walk ）の応用がある。これは，貯水量の遷移を酔歩粒子の運動に擬して数式化し，貯水量の定常確率などの計算を容易にしたもので，Phatarfod などの研究がある。[1),2)] 著者は，すでに，この手法を発展させて，流量の存在域，目標放流量，および貯水池容量を任意に選んだ場合の計算法を提案している。[3),4)] しかし，その結果は，かなり一般的な条件を考慮した表式化のために，複雑さを免れ得ず，貯水池の治水・利水機能に対する流量時系列や貯水池容量の影響が，直観的に把握し難いという難点があった。

1.2 本研究のねらい

上述の理由から，流量時系列や目標放流量などを単純化して取り扱うことにする。この点に関して，Phatarfod は，二項分布で３状態量（ 0 ， 1 ， 2 ）および単位目標放流量の場合の諸式を得ているので，これを用いることにする。なお，著者がすでに導出している関係式で，二項分布変量の上限 r を２，目標放流量Mを１とすれば，この結果と合致することが証明される。そこで，これら単純化された状態の下で，各種条件が与えられたときの各種貯水量状態の定常分布を簡便に図解的に計算する方法を示すとともに，諸要因による影響を解析的に明確にした。また，これら量的側面とともに，ある初期貯水量から出発して始めて空水に至る期間長の確率特性を，とくに平均値に関して，具体的に表式化し，その特性を解析的に明確にした。

2. 渇水時流況の時系列表示

2.1 相関流量時系列の二項分布表現

渇水が出現した，またはそれが懸念される際の流量時系列を表現するには，顕著な持続性と少流量部の多発性が常識であろう。また，行列演算の有用性などを勘案して，流量状態を離散的に表示すれば，一般に渇水時流況は正または負の二項分布による表現が適当であろう。正・負の二項分布は簡単な変換によって互換性があるから，以下正の二項分布（単に二項分布という）についてのみ記述する。二項分布では，その出現流量の上限を r で記すと，平均流量は ra となる。また，あい続く流量 X_t, X_{t+1} の間の自己相関係数を ρ で表わしておく。この場合の時系列分布の具体的表現は既発表論文 3)，4)を参照されたい。

2.2 3状態二項分布による単純化

先述のような渇水期の流況を対象としたある単位期間に着目してみる。その間の目標放流量を単位量にとり，これを整数倍した形で流量や貯水池容量を考えておく。渇水期であるから，流量は，目標放流量（１単位），あるいは，それ未満（ 0 単位）が大部分で，精々で２単位までの出現とみなすことにする。もちろん現実には３単位以上の流量も出現しうるが，これは安全側とみておくわけである。この場合の流量時系列の条件付分布，周辺分布および各種母数を表-1に示す。

3. 貯水池貯水量の定常分布

3.1 貯水量定常分布の基礎式

初期貯水量 $u=Z_0$ から出発して満水することなく空水に至る定常確率Puは，貯水池容量をKとした3状態二項分布流量に対して，以下の諸式で与えられることが酔歩理論から誘導されている。

ITEM		RANGE OF VARIABLES $i,j=0,1,2$
$p_{ij}=P_r\left[X_{t+1}=j \mid X_t=i\right]$		$\sum_{s=0}^{\min(i,j)} \binom{i}{s}\binom{-i+2}{j-s}\{a(1-\rho)+\rho\}^s \times \{1-a(1-\rho)\}^{s+2-i-j}a^{j-s}(1-a)^{i-s}(1-\rho)^{i+j-2s}$
$P_i=P_r\left[X_t=i\right]$		$\binom{2}{i}(1-a)^{2-i}a^i$
PARAMETERS	E(X)	2a
	V(X)	2a(1-a)
	Cs	$(1-2a)\{2a(1-a)\}^{1/2}$
	$Corr(X_t,X_{t+1})$	ρ

表-1　3状態二項分布の条件付分布，周辺分布および各種母数

$$P_u=\frac{\{(1-a)/a\}^2x_0^{K-1}-[(1-a)(1+\rho)/\{1-a(1-\rho)\}]^2x_0^u}{\{(1-a)/a\}^2x_0^{K-1}-1}\qquad(a\fallingdotseq 1/2)\qquad(3.1)$$

$$P_u=\frac{K-u+\rho/(1-\rho)}{K+2\rho/(1-\rho)}\qquad(a=1/2)\qquad(3.2)$$

ただし

$$x_0=[\{1-a(1-\rho)\}/\{\rho+a(1-\rho)\}]^2\qquad(3.3)$$

そこで，貯水量の定常分布，$V_i=P_r[Z=i]$は，まず $a\fallingdotseq 1/2$ に対しては，

$$V_0=\gamma\frac{(1-a)^2(1-2a)(1+2a\rho)}{a^2\{1-a(1-\rho)\}^2}x_0^{K-1}\qquad(3.4)$$

$$V_i=\gamma\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2(x_0-1)x_0^{K-1-i}\qquad(i=1,2,\cdots,K-2)\qquad(3.5)$$

$$V_{K-1}=\gamma\left[\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2x_0-1\right],\ ただし\quad\gamma=\frac{1}{\{(1-a)/a\}^2x_0^{K-1}-1}\qquad(3.6)$$

また，$a=1/2$のときは，$i=1,2,\cdots,K-2$に対して

$$V_0=V_{K-1}=\{K+(2-K)\rho\}^{-1},\quad V_i=(1-\rho)/\{K+(2-K)\rho\}\qquad(3.7)$$

となる。[1)] なお，貯水池容量Kとしては，(3.5)式が意味をもつ場合として，$K\geqq 3$としておく。

3.2 貯水量定常分布の図解法

ここでは，流量時系列の特性と貯水池容量を与えた場合の貯水量定常分布の図解的計算法を説明しよう。まず，空水確率V_0，満水確率V_{K-1}，さらに中間状態の確率V_iの順で記述する。

i) 空水確率　式(3.4)を変形して，V_0を書き直す。ただし，$\alpha_a=\{(1-a)/a\}^2$

$$V_0 = C_0(a,\ \rho)\cdot f(x_0;K,\alpha_a),\quad f=1+\frac{1}{\alpha_a x_0^{K-1}-1},\quad C_0=\frac{(1-2a)(1+2a\rho)}{\{1-a(1-\rho)\}^2} \qquad (3.8)$$

したがって，種々の a，ρ の組合わせに対するC_0，x_0，さらに a に対するα_aをあらかじめ図化しておけば，V_0の計算は容易である。これらを，図-1 ～図-4 に示す。

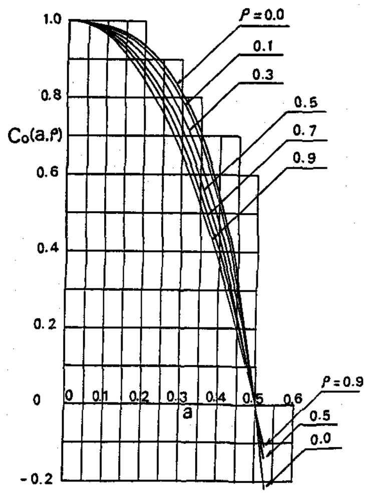


図-1　$C_0(a,\ \rho)$

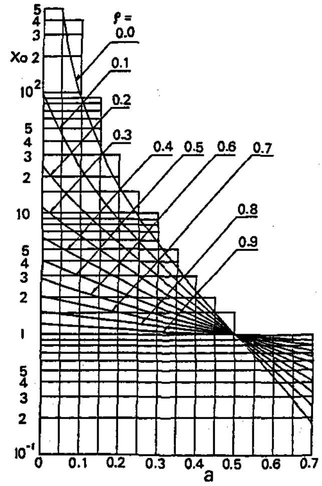


図-2　x_0

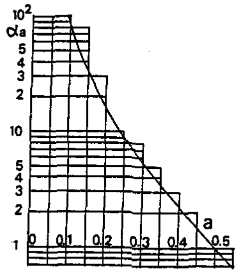


図-3　α_a

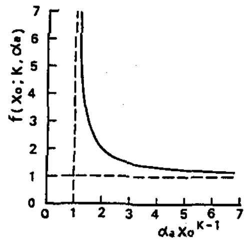


図-4　$\alpha_a x_0^{K-1}$～f

とくに注目すべきは，貯水池容量Kの効果が，f の右辺第 2 項の$\alpha_a x_0^{K-1}$の分数型式となっていることである。すなわち，渇水状態では a ≪ 1/2 であるから，$\alpha_a > 1$ または$x_0 > 1$ であり，$\alpha_a x_0^{K-1} \gg 1$ となる。さらに $K\to\infty$ となれば f → 1，したがって，C_0は無限容量の貯水池に対する空水確率を与えている[5]ことが分る。

ii)　満水確率　　すでに空水確率V_0が与えられたので，その比V_{K-1}/V_0を求めることを考える。

$$\frac{V_{K-1}}{V_0} = C_1(a,\ \rho)/x_0^{K-2},\qquad C_1=\frac{a^2\{1+2(1-a)\rho\}}{(1-a)^2(1+2a\rho)} \qquad (3.9)$$

iii)　中間状態の確率　　上と同様に，グラフ化の容易さを考慮して，上記以外の中間状態（ i = 1，2，・・・，K－2 ）の確率V_i を，V_i/V_0の形として，つぎのように表現する。

$$\frac{V_i}{V_0}=\frac{C_2(a,\ \rho)}{x_0^{\,i}}$$

$$C_2 = a^2(1+\rho)^2(1-\rho^2)\times(1+2a\rho)^{-1}\times\{a+(1-a)\rho\}^{-2} \qquad (3.10)$$

これら両式から，C_1，C_2 をあらかじめ，任意の a，ρについて計算しておくと図-5，図-6 のようになる。

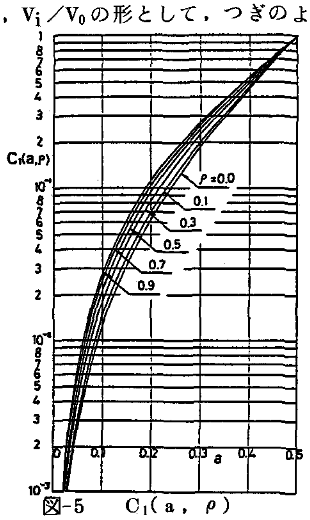


図-5　$C_1(a,\ \rho)$

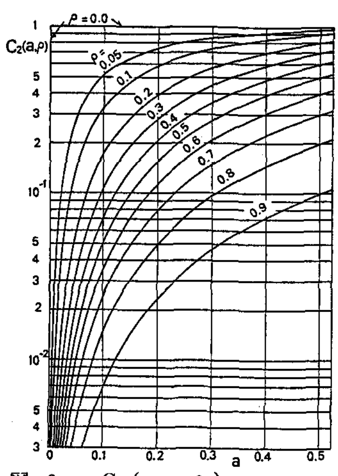


図-6　$C_2(a,\ \rho)$

たとえば，上式より明らかなように，満水確率は，Kに関して，初項C_1，公比x_0^{-1}，また，中間状態の貯水量確率は，iに関して，初項C_2，公比x_0^{-1}の等比数列になっていることに注意すべきであろう。

3.3　空水確率に関する影響要因の解析

つぎに，渇水問題で基礎的な役割を果すと目される空水確率に関する要因を解析的に考察しておこう。

i)　流量の自己相関係数との関連　　V_0のρによる変化をみるために，$dV_0/d\rho=0$より，次式がえられる。

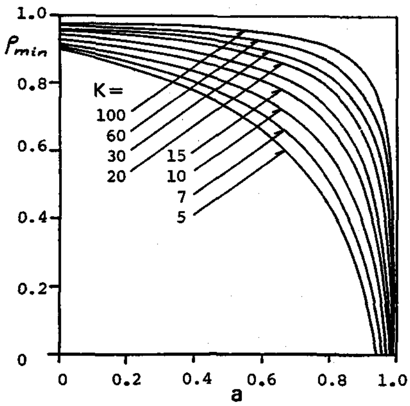
$$(1+\rho)x_0\{(1-a)^2 x_0^{K-1}-a^2\}\{a+(1-a)\rho\}^3+(K-1)(2a-1)(1+2a\rho)(1-a+a\rho)^2=0 \quad (3.11)$$

さらに，x_0をaとρで表現すると，上式は結局つぎのようになる。

$$(1+\rho)\left[(1-a)^2\left\{\frac{1-a+a\rho}{a+(1-a)\rho}\right\}^{2K-2}-a^2\right]\{a+(1-a)\rho\}$$

$$+(K-1)(2a-1)(1+2a\rho)=0 \quad (3.12)$$

なお，若干の検討によって，所与のK，aについて，上式で与えるρまでは，V_0は単調に減少し，以後は単調に増加するから，上式のρは最小値を与えるものであることが分る。この$\rho=\rho_{min}$を図－7に示す。これによると，ρ_{min}は，Kの増加あるいはaの減少とともに，増加する。



図－7　任意のa，Kに対するρ_{min}

したがって，一般に想定される渇水時流況（たとえば$a\leq 1/4$，すなわち流量平均値が目標放流量の半分以下，また$\rho<0.9$程度）なら，Kが30（貯水池容量が目標放流量の30倍）以上なら，空水確率V_0は，大雑把に自己相関係数ρの増加とともに，単調減少するとみてよい。

ii)　貯水量期待値との関連

貯水池の利水効果は，貯水量期待値で論議されることがあるので，これと空水確率との関連を調べる。まず，貯水量期待値は，一般に，次式の$E[V]$で求められる。$E[V]=\sum_{i=1}^{K-M} i\cdot V_i$，いま，$M=1$とし，式（3．5），（3．6）を用いると，結局，$E[V]$は若干の演算によって，次式で表わせる。

$$E[V]=\gamma\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2\left\{\frac{x_0(x_0^{K-1}-1)}{x_0-1}-(K-1)\right\} \quad (3.13)$$

上式とV_0の式（3．4）より，両者の関連はつぎのようである。

$$E[V]=\frac{a^2(1+\rho)\{1-a(1-\rho)\}^2}{(1-2a)^2(1-\rho)(1+2a\rho)}V_0-\gamma\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2\left[\frac{\{\rho+a(1-\rho)\}^2}{(1-\rho^2)(1-2a)}+K\right] \quad (3.14)$$

ところで，普通の場合，$x_0\gg 1$　かつ　$K\gg 1$と考えてよいから，式（3．13）はx_0^{K-1}のオーダで近似できて，$E[V]\fallingdotseq\gamma[(1-a)(1+\rho)/\{1-a(1-\rho)\}]^2 x_0^{K-1}$となる。これに$V_0$の式（3．4）を用いると，結局，式（3．14）の右辺第2項は無視できる。また$x_0/(x_0-1)\fallingdotseq 1$から，$E[V]/V_0$の近似式として，つぎのように貯水池容量Kに無関係で，流況のみに依存した形となる。

$$E[V]/V_0\fallingdotseq a^2(1+\rho)^2/\{(1-2a)(1+2a\rho)\}：\text{indep. of K} \quad (3.15)$$

すなわち，貯水池容量に着目して利水機能の評価をしようとする場合，$E[V]$を使ってもV_0を使っても本質的に等価であるということになる。

4.　空水に至る期間長の確率特性

独立流量に対する標記の問題には，著者が行列演算による解析法を提示したが[6]，相関のある場合はかなり複雑である。Phatarfod は，ある貯水量 u から出発して始めて空水に至る期間長（以後簡単に初空水到達期間と呼ぶ）の確率特性を，3 状態の二項分布について，次式の確率母関数の形で与えている。

$$G_u(s)=\frac{1}{P_u}\left\{\frac{1-a(1-\rho)}{\rho+a(1-\rho)}\right\}^{2u}\frac{P(x_1)\cdot Q(x_2)\cdot x_2{}^{K-u}-P(x_2)\cdot Q(x_1)\cdot x_1{}^{K-u}}{Q(x_2)\cdot x_2{}^{K}-Q(x_1)\cdot x_1{}^{K}} \tag{4.1}$$

ただし，

$$x_1,\ x_2=\left[\frac{1+\rho s\pm\{(1-\rho s)^2-4sa(1-\rho)^2(1-a)\}^{1/2}}{2\{a(1-\rho)+\rho\}\sqrt{s}}\right]^2 \quad \text{（符号同順）} \tag{4.2}$$

$$P(x)=\left(\frac{1-\rho\sqrt{s/x}}{1-\rho}\right)^2 \tag{4.3}$$

$$Q(x)=\left[\frac{\sqrt{sx}\{a(1-\rho)+\rho\}-\rho s}{a(1-\rho)\sqrt{sx}}\right]^2 \tag{4.4}$$

したがって，これから初空水到達期間 n の平均，分散などの諸特性が求まるはずである。ここでは平均のみについて記す。確率母関数 $G_u(s)$ より，平均値 $E[n]$ を求めるには，次式のような微分を要する。

$$E[n]=[dG_u(s)/ds]_{s=1} \tag{4.5}$$

以後，この微分を逐次行っていくが，その過程は甚だ煩雑で，詳細は記述し難い。そこで，途中で使われる諸式をまとめて示しておくに止める。ただし，その結果は s = 1 とした場合のものである。

$$x_1=[\{1-a(1-\rho)\}/\{\rho+a(1-\rho)\}]^2 \tag{4.6}$$

$$x_2=P(x_2)=Q(x_2)=1 \tag{4.7}$$

$$\frac{dx_1}{ds}=-\frac{1}{1-2a}\left\{\frac{1-a(1-\rho)}{\rho+a(1-\rho)}\right\}^2 \tag{4.8}$$

$$\frac{dx_2}{ds}=\frac{1}{1-2a} \tag{4.9}$$

$$P(x_1)=\left\{\frac{(1+\rho)(1-a)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2 \tag{4.10}$$

$$Q(x_1)=\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\left\{\frac{\rho+a(1-\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2 \tag{4.11}$$

$$\frac{dP(x_1)}{ds}=-\frac{2\rho(1+\rho)}{1-\rho}\ \frac{(1-a)^2}{1-2a}\ \frac{\rho+a(1-\rho)}{\{1-a(1-\rho)\}^2} \tag{4.12}$$

$$\frac{dP(x_2)}{ds}=\frac{2\rho a}{(1-\rho)(1-2a)} \tag{4.13}$$

$$\frac{dQ(x_1)}{ds}=-\frac{2\rho(1-a)^2}{a^2(1-2a)(1-\rho)}\left\{\frac{\rho+a(1-\rho)}{1-a(1-\rho)}\right\}^2 \tag{4.14}$$

$$\frac{dQ(x_2)}{ds}=\frac{2\rho}{(1-\rho)(1-2a)} \tag{4.15}$$

i) 厳密解　以上により，初空水到達期間の平均値はつぎのようになる。

$$\begin{aligned}
E[n]=\ & P_u^{-1}(1-2a)^{-1}\left[1-\{(1-a)/a\}^2x_0{}^{K-1}\right]^{-2}\Bigg[-\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{\rho+a(1-\rho)}\right\}^2\left\{\frac{2\rho(\rho+a(1-\rho))}{1-\rho^2}+u\right\}x_0{}^{u-1}\\
&+\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\left\{\frac{(1-a)(1+\rho)}{\rho+a(1-\rho)}\right\}^2\left\{\frac{2\rho(2-a(1-\rho)+\rho)}{1-\rho^2}+2K-u\right\}x_0{}^{K+u-2}\\
&+\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\left\{\frac{2\rho}{a(1-\rho)}+2K-u\right\}x_0{}^{K-1}+\left(\frac{1-a}{a}\right)^4\left(\frac{2\rho a}{1-\rho}+u\right)x_0{}^{2K-2}\Bigg]
\end{aligned} \tag{4.16}$$

ⅱ)　近似解　　前述のように，$x_0 \gg 1$，$K \gg 1$と考えると，$[1-\{(1-a)/a\}^2 x_0^{K-1}]^2 \fallingdotseq \{(1-a)/a\}^4 \times x_0^{2K-2}$ などと近似でき，その結果E〔n〕は，つぎのような簡単な形に帰着することが導ける。

$$E[n] \fallingdotseq (u+\Delta u)/\{P_u \cdot (1-2a)\} \equiv E_a[n],\quad \Delta u = 2\rho a/(1-\rho) \qquad (4.17)$$

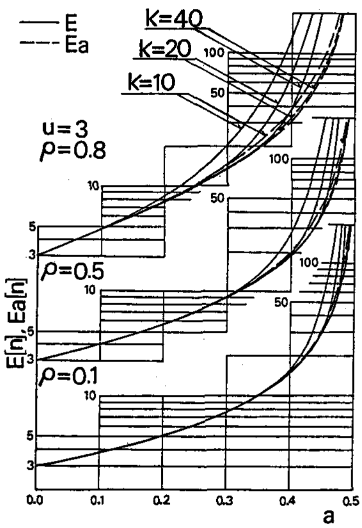
ところで，上式の意味は以下のように理解することができる。

まず，条件E〔X〕＝ra＜M（流量平均が目標放流量より小さい）の場合，貯水量系列の時間的変化を考えると，次第に減少し，やがて空水に到達するはずである。ここで，M－raは，平均的な意味における単位時間当りの貯水量の減少量である。ところで，この減少の結果として最終的に空水に至る割合は，初期貯水量uに対してほぼP_uとみなしてよい。したがって，この確率をも勘案した平均的な貯水量の減少速度は（M－ra）$\cdot P_u$である。また，初期貯水量はuであるから，残存貯水量uをこの平均減水速度（M－ra）$\cdot P_u$で割れば，初空水到達期間の期待値の近似値が，$E_1[n] = u/\{(M-ra)\cdot P_u\}$で，ほぼ求められることになる。

さらに，この考えによれば，M＜raの場合には，満水に至る期間の平均値E_2〔n〕も，$E_2[n] = (K-u)/\{(ra-M)(1-P_u)\}$で求められるはずである。しかし，これらの式が近似的であることは，ra≶Mに応じて，E_1〔n〕，E_2〔n〕のどちらか一方しか存在しないとみている点にあり，実際には両者が共存しても差しつかえないことは自明である。したがって，このことに対する補正を初期貯水量uに対する補正量Δuの形で行ない精度を高めたものが式（4．17）であると解釈できよう。

ⅲ)　厳密解と近似解の比較　　図－8に，初空水到達期間の平均値に対する厳密解E〔n〕と近似解E_a〔n〕を示す。

このように，一般に，aが1/2に比して小さければ（すなわち流量平均が目標放流量に比して小さければ），また，貯水池容量Kが1（目標放流量）に比して十分大きければ，近似解と厳密解はほとんど差がない。したがって，実用的には式（4.17）の近似解で，空水に至る定常確率P_uを求める式（3．1）を利用して計算しておけばよいといえよう。また，相関係数ρの減少とともに，近似解の近似度は上っていく。



図－8　初空水到達期間の平均E〔n〕，E_a〔n〕

参　考　文　献

1)　R. M. Phatarfod & K. V. Mardia : Some results for dams with Markovian inputs, J. Appl. Prob., Vol.10, 1973, pp. 166 ～ 180

2)　R. M. Phatarfod : Some aspects of stochastic reservoir theory, Jour. of Hydrology, Vol.30 1976, pp. 199 ～ 217

3)　長尾正志・池田吉隆：流量相関を考慮した利水用貯水池の機能評価に関する確率過程論の応用，第23回土木学会水理講演会論文集，1979，pp. 247 ～ 255

4)　長尾正志：利水用貯水池の機能評価へのマルコフ連鎖理論の応用，名古屋工業大学学報，第31巻，1979，pp. 369 ～ 377

5)　S. Odoom & E. H. Lloyd : A note on the equilibrium distribution of levels in a semi-infinite reservoir subject to Markovian inputs and unit withdrawals, J. Appl. Prob. Vol.2, 1965, pp. 215 ～ 222

6)　長尾正志・梶間津洋志：利水用貯水池における期間長特性の確率行列による推算，第24回土木学会水理講演会論文集，1980，pp. 65 ～ 70