

ベルヌーイ式と管水路、開水路に於るエネルギー損失について Bernoulli's Equation and Energy Loss in Pipe and Open Channel Flow

北海道大学工学部 正会員 浜 中 建一郎

1. まえがき

水理学に於て基礎的役割をはたしているベルヌーイ式は、通常、エネルギーの保存則とみなされている。又、エネルギー損失はベルヌーイ関数の差として取扱われることが多い。

一般に、流体力学では、オイラー座標系でみる場合と、ラグランジェ座標系でみる場合がある。ベルヌーイ式をエネルギーに関する式としてみる場合は、後者のラグランジェ座標系内に固定した領域、すなわち、移動する実質流体部分に着目して考えていることに相当する。その際、定常流であれば圧力はポテンシャルの性質を有し、ベルヌーイ関数の中の圧力項は、流体が移動するときに圧力がなすであろう仕事をあらかじめ見積った量となっている。しかし、非定常流に於ては、その様な性質を有せず、圧力を一般的に流体のエネルギーとみなすことは出来ない。又、エネルギー損失を考える場合は、実質流体部分に働く全ての力がなす仕事を正確に評価しなければならず、ただ単にベルヌーイ関数の差によってエネルギー損失を見積ることは出来ない。

一方、オイラー座標系でみた場合は、その導出過程から明らかな様に、ベルヌーイ式は運動量の保存則に関する表現であり、ベルヌーイ関数は運動量流束を表わしている。この場合、エネルギー損失と共にベルヌーイ関数の意味を考察するためには、粘性の効果も考慮したベルヌーイ式を導く必要がある。

本研究では、さらに一般的に、乱れの効果も考慮したベルヌーイ式を導き、その物理的意味を調べるため、あるコントロールボリュームにわたって積分し、エネルギー流束に対する同様の表現と比較する。この様にして、ベルヌーイ関数が、流線方向の運動量の、流線方向の流束のうち、粘性や乱れに依存しない部分を表わしていることが示される。

さらに、管水路、開水路の流れでは、断面平均値を用いた議論が多いことを考え、断面平均ベルヌーイ式の種々の表現を示す。これらの表現式に対する考察から、ある特別な流れに限り、断面平均ベルヌーイ関数の差が、ある意味でのエネルギー損失を示すことが分る。水理学上の管水路、開水路の取扱いの多くは、この特別な場合に相当していると思われる。

2. 典型的な2・3の流れ

典型的な流れを例にとり、エネルギー及びエネルギー損失について簡単な考察を行う。初めに、円管ポワズイユ流と平行平板クエット流を考える。いずれも水平に置かれたものとする。流速 v と基準面からの高さ z は流線に沿って変化しない。円管ポワズイユ流では圧力だけが流線に沿って変化し、その変化量が、すなわちベルヌーイ関数の差が、検査断面間のある意味でのエネルギー損失（後に詳述するが検査断面間での単位時間当りのエネルギー損失を流量で割ったもの）を表わす。

一方、平行平板クエット流では、圧力も流線に沿って変化せず、ベルヌーイ関数は変化しない。従って、上の考えを用いれば、エネルギー損失はないという結果になる。しかし、粘性によるエネルギー散逸は当然起っており、エネルギー損失は零ではない。

次に完全流体に対して、ベルヌーイ式は、流線に沿って

$$\rho v^2 / 2 + \rho \phi = \text{const}$$

$$\phi : \rho \times \text{重力ポテンシャル}$$

(1)

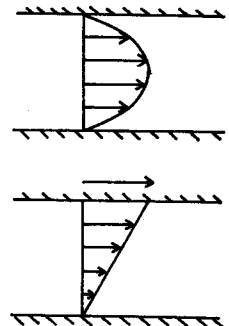


図-1
ポワズイユ流(上)と
クエット流(下)

であるが、非回転流に対するベルヌーイ式（圧力方程式）は

$$\rho\phi_t + \rho v^2/2 + \varrho + p = \text{const} \quad \phi: \text{速度ポテンシャル} \quad (2)$$

である。この場合、圧力はポテンシャルの性質は持たず、エネルギーとみなすことは出来ない。又、 $\rho\phi_t$ もエネルギーとして理解することは困難であり、(2)式はただ単に、運動エネルギーあるいは力学的エネルギーの場所的・時間的变化の様子を表わす式と考えるべきであろう。

3. 粘性・乱流中の平均流に対するベルヌーイ式

運動方程式は、 η を粘性係数として

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{v}) = \rho \mathbf{g} - \nabla P - \rho(\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} + \eta \Delta \mathbf{v} \quad (3)$$

である。平均流と乱れ成分に分け、

$$\begin{cases} \mathbf{v} = \mathbf{U} + \mathbf{u}, & \overline{\mathbf{u}} = 0 \\ P = p + p', & \overline{p'} = 0 \end{cases}$$

を3式に代入し、平均をとると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho \mathbf{U}) &= \rho \mathbf{g} - \nabla p - \rho(\mathbf{U} \cdot \nabla)\mathbf{U} - \rho \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}} + \eta \Delta \mathbf{U} \\ &= -\nabla(\varrho + p + \frac{\rho}{2}U^2) + \rho \mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U} - \rho \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}} + \eta \Delta \mathbf{U} \end{aligned} \quad (4)$$

となる。ここで、流れは定常流とすると、 $\partial(\rho \mathbf{U})/\partial t = 0$ 、さらに、流線方向の成分で考えると
($\mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U}$)_s = 0⁽¹⁾（以下添字_sは流線方向の成分を表わす）。従って

$$\nabla_s(\varrho + p + \frac{\rho}{2}U^2) + \rho \overline{(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}}_s - \eta \Delta \mathbf{U}_s = 0 \quad \nabla_s: \text{流線方向の微分演算子} \quad (5)$$

これが、平均流に対するベルヌーイ式である。

一方、(4)式をテンソル表示すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\rho U_i) &= -\frac{\partial}{\partial x_i}(\varrho + p) - \frac{\partial}{\partial x_k} \{ \rho U_i U_k + \overline{\rho u_i u_k} - \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x_k} \{ (\varrho + p) \delta_{ik} + (\rho U_i U_k + \overline{\rho u_i u_k} - \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_k}) \} \end{aligned} \quad (6)$$

ここで(6)式右辺の下式中{ }の中は運動量流束テンソルと呼ばれている。流線方向の成分をとると

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho U_s) = -\frac{\partial}{\partial x_s}(\varrho + p + \frac{\rho}{2}U^2) - \frac{\partial}{\partial x_k}(\overline{\rho u_s u_k} - \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_k}) \quad (7)$$

$B = \varrho + p + \rho U^2/2$ をベルヌーイ関数と呼ぶと、 B は流線方向の運動量に対し流線方向だけから寄与する流束、(7)式右辺第二項の()の中は、乱れと粘性によって三方向から寄与する流束を表わしていることが分る。

4. 断面平均ベルヌーイ式

(5)式の意味をさらに良く理解するために、(5)式をあるコントロールボリュームで積分する。(図-2)

(5)式を書き変えて

$$\frac{\partial}{\partial x_s} B = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_k} - \overline{\rho u_s u_k} \right) \quad (8)$$

流線に直交する二つの検査面Ⅰ、Ⅱにはさまれた体積Ⅴにわたって(8)式を積分する。左辺については

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial x_s} B dV &= \frac{\partial}{\partial x_s} B \cdot dx_s \frac{dA_1 + dA_2}{2} \\
 &= (B_2 - B_1) \frac{dA_1 + dA_2}{2} \\
 &= B_2 dA_2 - B_1 dA_1 + \frac{B_1 + B_2}{2} (dA_1 - dA_2) \\
 &= B_2 dA_2 - B_1 dA_1 - B \frac{\partial}{\partial x_s} (dA) \cdot dx_s \quad (9)
 \end{aligned}$$

従って(8)式左辺の積分は $\frac{\partial}{\partial x_s} (dA) = \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} \frac{ds_0}{dx_s}$ を用いて

$$\int \frac{\partial}{\partial x_s} B dV = \int_{A_2} B_2 dA_2 - \int_{A_1} B_1 dA_1 - \int_A B \frac{1}{dA} \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} ds_0 dA \quad (10)$$

両辺を ds_0 で割って $ds_0 \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{ds_0 \rightarrow 0} \frac{\text{左辺}}{ds_0} = \frac{d}{ds_0} \int_A B dA - \int_A B \frac{1}{dA} \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} \cdot dA \quad (11)$$

ここで $\frac{1}{dA} \frac{\partial}{\partial s_0} (dA)$ は流線の広がり具合を表わす。

右辺の体積 V にわたっての積分は、ガウスの発散定理より周辺積分に置き変り、

$$\int_V \frac{\partial}{\partial x_k} (\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_k} - \rho \overline{u_s u_k}) dV = - \int_{A_1} (\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} - \rho \overline{u_s^2}) dA_1 + \int_{A_2} (\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} - \rho \overline{u_s^2}) dA_2 + \int_{A_3} \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_f} dA_3 \quad (12)$$

両辺を ds_0 で割って $ds_0 \rightarrow 0$ の極限をとると

$$\lim_{ds_0 \rightarrow 0} \frac{\text{右辺}}{ds_0} = \frac{d}{ds_0} \int_A (\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} - \rho \overline{u_s^2}) dA + \int_F \lambda \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_f} dF \quad F: \text{断面の周辺} \quad (13)$$

$$\text{ただし} \quad \lambda = \frac{dx_s}{ds_0}, \quad \frac{dA_3}{ds_0} = \frac{ds dF}{ds_0} = \lambda dF$$

(11)式と(13)式より

$$\frac{d}{ds_0} \int_A (B - \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} + \rho \overline{u_s^2}) dA = \int_A B \frac{1}{dA} \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} \cdot dA + \int_F \lambda \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_f} dF \quad (15)$$

これが、断面積分されたベルヌーイ式である。これから断面間の運動量流束の差が、流線の拡がる効果と周辺での摩擦抵抗とで釣り合っている様子が分る。

断面平均ベルヌーイ式を導くには、(15)式の両辺を A で割り、

$$\frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{1}{A} \int_A f dA \right\} = - \frac{1}{A^2} \frac{dA}{ds_0} \int_A f dA + \frac{1}{A} \frac{d}{ds_0} \int_A f dA$$

を用いて

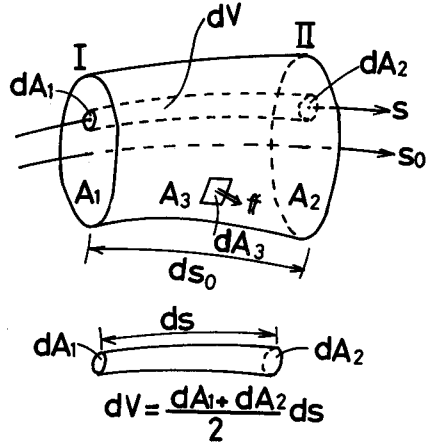
$$\begin{aligned}
 \frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{1}{A} \int_A (B - \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} + \rho \overline{u_s^2}) dA \right\} &= - \frac{1}{A^2} \frac{dA}{ds_0} \int_A (B - \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} + \rho \overline{u_s^2}) dA + \int_A B \frac{1}{dA} \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} dA \\
 &\quad + \frac{1}{A} \int_F \lambda \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_f} dF \quad (16)
 \end{aligned}$$

又、流線が断面内で一様に拡縮していると仮定出来る場合は、(16)式は

$$\frac{1}{dA} \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} = \frac{1}{A} \frac{dA}{ds_0} \quad \text{を用いて}$$

$$\frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{1}{A} \int_A (B - \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} + \rho \overline{u_s^2}) dA \right\} = \frac{1}{A^2} \frac{dA}{ds_0} \int_A (\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} - \rho \overline{u_s^2}) dA + \frac{1}{A} \int_F \lambda \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_f} dF \quad (17)$$

(16)、(17)式が断面平均ベルヌーイ式である。



もし、ベルヌーイ関数だけに注目するなら、(16)式は

$$\frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{1}{A} \int_A B dA \right\} = \frac{1}{A} \int_A B \frac{1}{dA} \frac{\partial (dA)}{\partial s_0} \cdot dA - \frac{1}{A^2} \frac{dA}{ds_0} \int_A B dA + \frac{1}{A} \frac{dA}{ds_0} \int_A \left(\eta \frac{\partial U_s}{\partial x_s} - \rho \overline{u_s^2} \right) dA + \frac{1}{A} \int_F \lambda \eta \frac{\partial U_s}{\partial x_f} dF \quad (18)$$

これを見ると、通常損失と呼ばれているものの内容は、(18)式右辺第一項と第二項の流線の拡縮の効果と、第三項の粘性と乱れによる拡縮の効果と、第四項の周辺での摩擦抵抗との和であることが分る。

これら、一連の積分式、断面平均式の各項の物理的意味を厳密に理解することは、実は簡単なことではない。何故なら、これらの式は元々(7)式の両辺を積分したものであり、(7)式の左辺の積分は、一般的には、異った方向の運動量のスカラー和を計算しており、その様なスカラー和は、もはや、明確な力学的意味は持っていない。右辺の積分は、そのスカラー和の時間的変化を、周辺での出入や、内部でのやりとりで評価したもので、それが(19)~(18)式の意味するところである。しかし、これらの式は、基本的には運動量に関する表現であることは否定出来ないであろう。

5. エネルギー流束とエネルギー損失

エネルギーの損失を求めるには、前節で運動量の出入を与えたと同様、エネルギーの出入を考えなければならない。前節との比較のため、ここでも、粘性・乱流中の平均流の力学的エネルギーを考える。しかし、エネルギーの散逸を考えるときは、運動エネルギーだけで十分であるから、(4)式を用いて、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) &= \mathbf{U} \cdot \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{U}) \\ &= -\nabla \cdot \left\{ \mathbf{U} \left(\frac{\rho}{2} U^2 + P + \varrho \right) \right\} - \rho \mathbf{U} \cdot (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \eta \mathbf{U} \cdot \Delta \mathbf{U} \quad (19) \\ (\because \nabla \cdot \mathbf{U} &= 0, \mathbf{U} \cdot (\mathbf{U} \times \text{rot } \mathbf{U}) = 0) \end{aligned}$$

$$\text{ここで } (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = u_k \frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \frac{\partial}{\partial x_k} u_i u_k \equiv \frac{\partial}{\partial x_k} Ri_k$$

を用いて、(19)式を変形すると、

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) = -\frac{\partial}{\partial x_k} \left(U_k B + \rho U_i Ri_k - \eta U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) + \rho Ri_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} - \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)^2 \quad (20)$$

前節との比較のため、同様のコントロールボリューム V にわたって積分する。(図-3)

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) \right\} dV = -\oint \left\{ U_k B + \rho U_i Ri_k - \eta U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right\} df_k + \int_V \rho Ri_k \frac{\partial U_i}{\partial x_k} dV - \int_V \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)^2 dV \quad (21)$$

左辺は、自由境界面 $Z = \zeta$ を S_1 とすると、

$$\int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) \right\} dV = \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) dV - \oint_{S_1} \zeta t \left(\frac{\rho}{2} U^2 \right) \Big|_{Z=\zeta} dS_1 \quad (22)$$

(21)式の右辺第一項は、上下流検査面、自由境界面、固定壁面、を各々 A_1 、 A_2 、 S_1 、 S_2 として、自由境界面では、

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{U} \cdot d\mathbf{f} = \zeta t dS_1 \\ (P \delta_{ik} + \rho Ri_k - \eta \frac{\partial U_i}{\partial x_k}) df_k = 0 \end{array} \right.$$

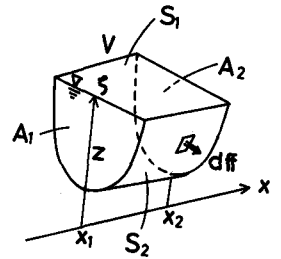


図 - 3

および、固定壁面では

$$U_i = 0, \quad u_i u_k = 0,$$

等を用いると、②③式は

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \int_V \frac{\rho}{2} U^2 dV + \oint_{s_1} \zeta_i Q_i dS_i = & - \oint_{A_1} \left[U_k B + \rho U_i R_{ik} - \eta U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right] df_k - \oint_{A_2} \left[\quad \right] df_k \\ & + \int_V \rho R_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial U_k} dV - \int_V \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)^2 dV \end{aligned} \quad (23)$$

あるいは、 ds_0 で割り、 $ds_0 \rightarrow 0$ の極限をとり、さらに定常流とするなら

$$\frac{d}{ds_0} \left\{ \int_A \left(U_k B + \rho U_i R_{ik} - \eta U_i \frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right) df_k \right\} = \int_A \lambda \rho R_{ik} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} dA - \int_A \lambda \eta \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_k} \right)^2 dA \quad (24)$$

ここで、②③式と②④式を比較すると、②④式はエネルギーに関する表現であるから、流体内部で粘性によって散逸する項を含むが、壁面での出入の項はない（固定壁面上の水粒子は動かないから仕事をしない）。それに対し、②③式は、運動量に関する表現であるから、内部での散逸項はないが、壁面での出入の項を含む。このことから、ベルヌーイ関数が運動量流束であることの意味がさらに明確となる。

次に、②④式の右辺（すなわち左辺）によって平均流に対するエネルギー損失と定義しよう。②④式右辺第二項は、常に負の値を持ち、粘性によって失われるエネルギーを表わしている。しかし、第一項は常に負の値を持つとは限らない。このことは、流れを平均流と乱れとに分け、平均流のエネルギーだけを考えたことによる。勿論、乱れの成分も含めた同様の計算を行えば、負の散逸項だけが現われることは言うまでもない。

最後にエネルギー損失（上で定義した意味での）と、ベルヌーイ関数との関係を考察する。②④式をみて分かることは、次に述べる特別な流れの場合には、ベルヌーイ関数の断面平均値の差はエネルギー損失と明確な関係を持つ。すなわち、

(i) 定常流であること

(ii) 流線に平行な境界面は仕事をしないこと

(iii) (i) 流線間隔が流れに沿って一定で、 $(p+Q)$ が断面内で一定（乱流構造も流れに沿って一様）
又は
(iii) 流速が断面内で一様分布し、粘性および乱れによるエネルギー流束は無視出来る

(i)～(iii)の条件が同時に満たされるときは、②④式の両辺を流量 Q で割ると、左辺は断面平均ベルヌーイ関数となる。言い換えれば、断面平均ベルヌーイ関数の差に流量をかけたものはエネルギー損失となる。

上に述べた条件を満たす実例として、(iii)～(i)に対しては、円管ポワズイユ流が挙げられる。すなわち、中心からの距離を r 、管の半径を a 、平均流速を u_m とすると、流体内の力の釣り合いから、 x 軸を流線にとれば

$$u = -\frac{a^2}{4\eta} \frac{dp}{dx} \left(1 - \frac{r^2}{a^2} \right), \quad \frac{du}{dr} = \frac{r}{2\eta} \frac{dp}{dx}, \quad u_m = -\frac{a^2}{8\eta} \frac{dp}{dx} \quad (25)$$

断面平均ベルヌーイ式②④は、（この場合右辺で値を持つのは最後の項だけである）

$$\frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{1}{A} \int_A B dA \right\} = \frac{\eta}{A} \int_F \frac{du}{dr} dF = \frac{dp}{dx} \quad (26)$$

直径を D 、動粘性係数を ν とし、 $Du_m/\nu = Re$ を用いると

$$\frac{\eta}{A} \int_F \frac{du}{dr} dF = -\frac{64}{Re} \frac{\rho}{D} \frac{u_m^2}{2} \quad (27)$$

となり、通常摩擦損失と呼ばれているものは、壁面での摩擦力であることが分る。一方、②④式左辺は

$$\frac{d}{ds_0} \left\{ \frac{1}{A} \int_A u B dA \right\} = \frac{d}{dx} \left\{ \int_A u p dA \right\} = \frac{dp}{dx} \cdot Q \quad (Q: \text{流量}) \quad (28)$$

となり、断面平均ベルヌーイ関数の差に流量をかけたものが、エネルギー損失となっている。

(i)~(iii)を満たす実例としては、管水路に於る急拡大部や、開水路に於る跳水等が挙げられる。この場合は、近似的に(i)~(i)の条件が満たされるとして取り扱われている。

6. エネルギー損失再考

4節、5節では、オイラー座標系内で固定された領域での運動量やエネルギーの変化を、境界面を通る出入(流束)と内部での損失によって考察した。ここではラグランジェ座標系内で固定された領域、すなわち、ある実質流体部分に着目して、そのエネルギー損失について再考する。

実質流体部分の初期状態でのエネルギーを E_I とし、 δt 時間後流れによって移動した別の場所でのエネルギーを E_{II} とする。状態Iから状態IIに致る間に流体部分に働いた力がなした仕事を W 、エネルギー損失を Ed とすると、

$$E_{II} = E_I + W - Ed \quad (29)$$

である。さて、我々が力学によって知っているのは、仕事と運動エネルギーの関係であるから、ここで E_I 、 E_{II} としては運動エネルギーを考えるのが最も自然であろう。その場合、 W としては、質量力や圧力も含め、流体に働く全ての力のなす仕事を考えればよい。一方、それらの力の中で、保存力とみなせる力がある場合は、そのポテンシャルを E_I 、 E_{II} に含めて考えることが出来る。その場合は、まえがきで述べたように、それらの保存力のなす仕事をあらかじめ見積ったことになるから、 W としてはそれらを除外して考えなければならない。

2節で述べたポワズイユ流を例にとると、図-4に於て L を単位の長さ、 δt を単位の時間にとり、 E_I 、 E_{II} として運動エネルギーを考えた場合は

$$E_I - E_{II} = 0, W = \int_A u \frac{dp}{dx} dA = Q \frac{dp}{dx} \quad (30)$$

E_I 、 E_{II} としてベルヌーイ関数を考えた場合は、重力と圧力以外は仕事をしないから

$$E_I - E_{II} = \int_A u \frac{dp}{dx} dA = Q \frac{dp}{dx}, W = 0 \quad (31)$$

図-4

となり、いずれの場合も $Ed = Q dp/dx$ となり一致する。クエット流に対しても同様に考えることが出来、その場合は2節で述べたような矛盾は起こらない。

7. 結 論

これまで述べてきたことから得られる主な結論は次のとおりである。

- (i) ベルヌーイ式を考える場合、実質流体部分について考えるか、オイラー座標系内で固定した領域で考えるのかを明確に区別して考えなければならない。
- (ii) ベルヌーイ関数をエネルギーとみる場合は、実質流体で考えなければならない。
- (iii) 検査断面を固定した場合の様にオイラー座標内での固定領域で考える場合は、ベルヌーイ関数は、流線方向の運動量の、流線方向の流束(粘性や乱れがある場合はその一部)を表わす。
- (iv) (iii)の場合のエネルギー損失は、エネルギー流束から求め、その時、5節(i)~(i)を満たすとき、断面平均ベルヌーイ関数の差に流量をかけたものとエネルギー損失は等しくなる。

なおこの研究は、北海道大学工学部土木工学科、板倉、長谷川、森、黒木の各氏との討論の中でなされたものであることを、謝意をもって付記する。

参 考 文 献

- (1) Landau, L.D. and Lifshitz, E. M. : Fluid Mechanics, Pergamon Press, 1959