

流線の曲率が卓越する流れの解析法

Analysis of the Mean Flow with Remarkable Curvature of Streamlines

長岡技術科学大学工学部 正 員 福 嶋 祐 介
東京工業大学工学部 正 員 福 岡 捷 二

1. はじめに

近年、計測器および測定技術の進歩に伴って乱流計測が盛んに行なわれ、流れの細部構造が次第に明らかにされている。しかし、乱流構造の複雑さのため現在の知識ではその成果を流れの解析にまで反映できる段階にまで至っていない。著者らはこれまで平均流を知ることが実用上最も重要であるという立場から研究を進めてきた。平均流の解析における従来の手法は、流線の曲率を十分に小さいと見なし、圧力を静水圧分布と仮定する漸変流解析である。漸変流の仮定による解析は、開水路流、塩水くさびなどに応用され既に実用化されている。しかし、流線の曲率の影響を無視できず、従って圧力を静水圧分布と見なすことができない流れも多い。著者らは、過去2、3年にわたり、開水路流、貯水池密度流、河口密度流などを対象として流線の曲率が卓越する流れの研究を実験的・解析的に行って来た。本研究の目的は、異なる型の流れに対して用いた解析手法を、流線の曲率の影響による流速分布、圧力分布の変化を明らかにするという観点から統一化して再検討し、流線の曲率が卓越する平均流の解析法を確立することである。

2. 解析法の考え方

流体運動の非線形性、境界条件の複雑さを考えると、流線の曲がりが大きい流れを直接解析することは数学的には極めて困難である。プラントルは、すぐれた着想のもとにこの問題を解決した。つまり、流体の粘性は境界面近傍だけで重要な役割を果たし、その外側の領域では近似的に非粘性の渦なし流れとみなせるという境界層理論である。この境界層理論の考え方は、図1に示す縮流を伴う急変流に対して適用できる。2つの境界面が流下方向に狭くなっている場合には、流下方向の圧力が大きくなり、境界層の発達が押えられる。

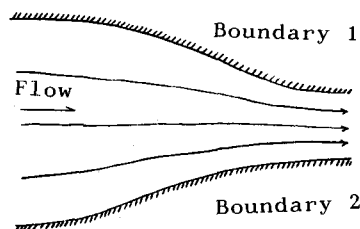


図1 縮流を伴う急変流

この結果、境界面近傍のごく薄い層を除いて流れは、ポテンシャル流とみなすことができる。したがって、二次元流の場合、境界の形状が与えられさえすれば、ラプラス方程式を解くことにより平均流を解析することができる。ラプラス方程式の解は、理論解でも数値解でも同様の取扱いが可能である。境界面に働く抵抗を評価する場合には、ポテンシャル流より決まる圧力勾配のもとでの境界層の発達を議論する必要があるが本報では取扱わない。

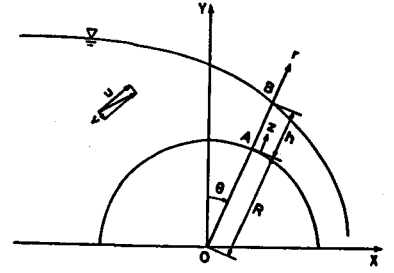
以上の基本的な考え方は、境界面が固定境界面（壁面）であっても自由境界面（自由水面、二層流の内部境界面）であっても適用できる。したがって、解析の対象となる流れは、開水路流、密度流など広範囲に及び、種々の型の流れに対して本解析法の考え方が適用できる。

3. 円頂ぜき上を越流する流れ

せきを越流する流れでは、常流から射流に流れが遷移し、途中で支配断面があらわれることが多い。支配断面の影響は無限遠にまで及ぶので、その位置および水深を正確に算定することが重要となる。一方、このような流れでは、流線の曲率を無視できないことが多く、流速分布および圧力分布の算定では、これらの影響を十分に考慮する必要がある。ここでは、図2の円頂ぜきを越える流れを解析的に取扱い、水面形方程式を導く。流れは急縮流であり重力効果が卓越することから、壁面の近傍を除いて、ポテンシャル流と見なす

ことができる。円筒座標系 (θ, r) において、流関数 ϕ についてのラプラスの式は、次のようにあらわされる。

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$



ここで、 θ , r 方向の流速 u , v は、次のように定義される。

図2 円頂せきを越える流れ

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial r} \quad v = -\frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial \theta} \quad (2)$$

流速分布は与えられた境界条件のもとで(4)式を解くことによって求められる。しかし、一般的に式(1)の解は無限級数解となり、水面形の計算に用いることは困難である。ここでは、近似的に1項だけで表わされると考え、 u , v を次のようにおく。

$$u = \frac{q}{R} \lambda \frac{(1+z^*)^{-1+\lambda} + (1+z^*)^{-1-\lambda}}{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}} \quad (3)$$

$$v = \frac{q}{R} \lambda \frac{d h^*}{d \theta} \frac{(1+h^*)^{-1+\lambda} + (1+h^*)^{-1-\lambda}}{\{(1+h^*)^\lambda - (1+h^*)^{-\lambda}\}^2} \{ (1+z^*)^{-1+\lambda} - (1+z^*)^{-1-\lambda} \} \quad (4)$$

ここで、 q は単位幅流量、 R は底面の曲率半径、 h は水深であり、 $z^* = z/R$, $h^* = h/R$ である。静水圧からの差圧 P は、水面と任意点との間でベルヌイの式をたてることにより、次のように求められる。

$$P' = \frac{1}{2} \rho (u_1^2 + v_1^2) - \frac{1}{2} \rho (u^2 + v^2) \quad (5)$$

式(3), (4), (5)は、未定係数 λ を含んでいる。 λ は、境界条件から決まる固有値であるが、式(3), (4)が一項だけの近似解であることを考慮し、実験定数と考えてせき頂の流速分布が最も良く一致するように選ぶ。

図3は、図中に示す測線上で測定した合速度 $w (= \sqrt{u^2 + v^2})$ をせき頂の平均流速 q/R で無次元化し、式(3), (4)で求められる理論値と比較したものである。指数 λ はせき頂 (No. 8) での分布と一致するように選び $\lambda = 0.42$ としている。図より、せき頂以外でも実測値と理論値はよく一致しており、式(3), (4)が流速分布に対するよい近似であることがわかる。以下では、 $\lambda = 0.42$ として計算を行った。

流速分布・圧力分布が求められたのでこれを用いて急変流の水面形方程式を導く。境界層の厚さを無視し、粘性の影響を底面せん断応力で考慮することとする。 θ 方向の運動方程式は、

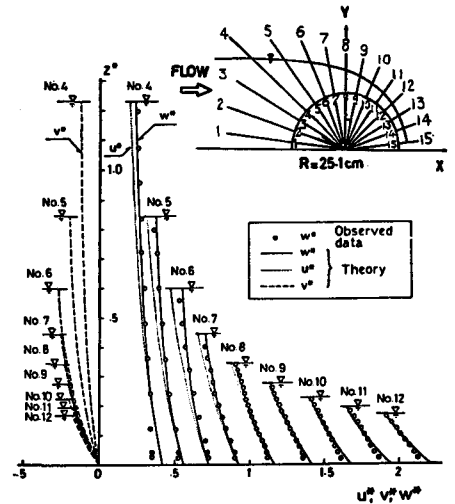


図3 無次元流速分布

$$\frac{\partial u^2}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial r} u v r + u v$$

$$= -\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{p}{\rho} + g r \cos \theta \right) - \frac{\partial}{\partial r} \overline{u' v' r} \quad (6)$$

である。式(6)に式(3), (4), (5)を代入し、 $r = R$ から $r = R + h$ まで積分し、連続の式を用いて水深の変化率について整理すると次式を得る。

$$\frac{d h^*}{d \theta} = \frac{(1 + h^*) \sin \theta - i_f}{\cos \theta - \phi(h^*) \cdot q^2 / g R^3}$$

ここで

$$\phi(h^*) = 4 \lambda^3 \frac{(1 + h^*)^\lambda + (1 + h^*)^{-\lambda}}{(1 + h^*)^3 \{ (1 + h^*)^\lambda - (1 + h^*)^{-\lambda} \}^3} \quad (8)$$

であり、 $i_f = \tau_0 / \rho g h$ は摩擦勾配である。円頂ぜきを越える流れの支配断面は、式(7)の分母・分子が同時に零になる条件から求められるがここでは省略する。漸変流の場合には、支配断面においてフルード数 $F_0 (= u \sqrt{g h \cos \theta})$ は1になるが、急変流では、支配断面では $F = 1$ にならない。流線の曲率があるために圧力が静水圧分布と異なるからである。そこで、式(7)の分母が零のとき、1になるような関数を考え、それを急変流のフルード数 F_r と定義することにする。すなわち、

$$F_r = \sqrt{h^{*3} \phi(h^*)} \cdot F_0 \quad (9)$$

である。 $h^{*3} \phi(h^*)$ は h^* が小さくなるに従って滑かに1に漸近する関数である。

図4は式(7)で水面形を計算し、実測値と比較したものである。図中には、流線を同心円状とした岩崎の理論¹⁾による値も示している。本理論の値は、実測値よりわずかに小さいが、これは計算において $\tau_0 = 0$ としているためである。急変流のもとでの底面せん断応力を正しく評価

できれば、理論値は実測値をより良く説明すると考えられる。図5は壁面で測定した静水圧からの差圧をせき頂での平均流速で無次元化し、本理論の値、ポテンシャル流の数値計算、岩崎の理論値¹⁾と比較したものである。岩崎の理論では、 v の影響を無視しているために、差圧を過大に見積っているが、本理論の値は、実測値及び数値解とよく一致している。図6は、実測した流れの支配断面の位置を推定するために、測定した水深を用いて急変流のフルード数 F_r を求め、漸変流のフルード数 F_0 と比較したものである。 F_0 は、せき頂の上流で1になり、物理的な意味をもたないのに対し、 F_r は、せきの直下流で1になっており、この位置で支配断面があらわれていることを示す。

4. 貯水池流入端で潜り込む密度流

貯水池水より密度の大きな流入水は密度差のために、流入端付近で表層から下層に潜り込む。このような流れでは、密度差による重力効果と流線の曲がりによる静水圧からの差圧が本質的な役割を果たし、乱れや粘性は、2次的効果として無視し得る。したがって、流れはポテンシャル流と考えることができる。潜り込

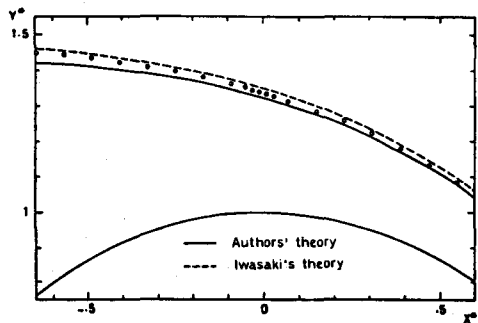


図4 水面形状の比較

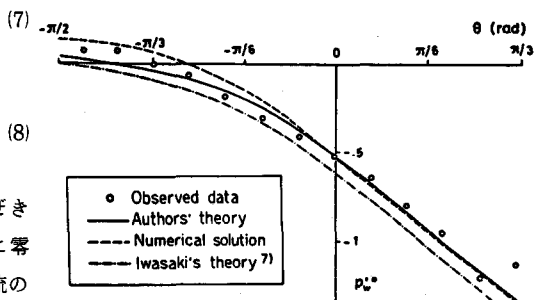


図5 壁面での無次元差圧分布

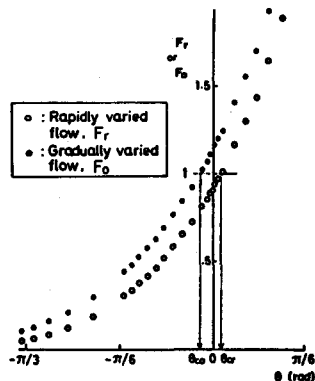


図6 急変流のフルード数

み点のごく近傍の流れは、Benjamin³⁾ がキャビティ流れに対して求めた境界形状の解析解で近似できることが実験によって確められた。Benjamin の理論により、界面形状が近似的に与えられるので、流速分布はラプラスの式を解くことにより求められる。ただし、この場合には、解析解を得ることは困難なので、緩和法によりラプラス方程式の数値解を求め流速を計算する。静水圧からの差圧の分布は、潜り込み点（図7のO点）がよどみ点であり、かつ、圧力が大気圧となっていることから、このO点と任意点の間でベルヌイの式をたてることにより、次式で求められる。

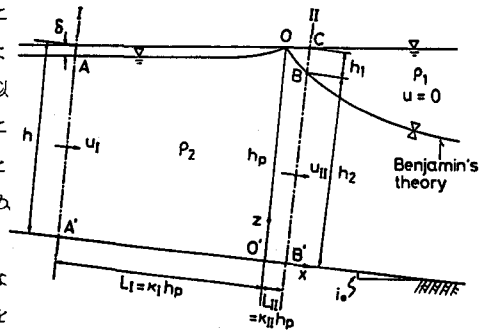


図7 潜り込み点近傍の流れ

$$p' = -\frac{1}{2} \rho_2 w^2 \quad (10)$$

ここで、 ρ_2 は流入水の密度、 $w (= \sqrt{u^2 + v^2})$ は合速度である。図8は、このようにして求めた静水圧からの差圧を潜り込み点での平均流速 u_p で無次元化した $p'^* = p' / \frac{1}{2} \rho_2 u_p^2$ である。無次元差圧は、潜り込み点の近傍で大きく変化しており、流線の曲がりの影響が顕著にあらわれている。潜り込み点の上流では、差圧は次第に小さくなり、水深の大きさほど上流であれば、差圧の影響を考慮する必要はなく、静水圧と見なすことができる。

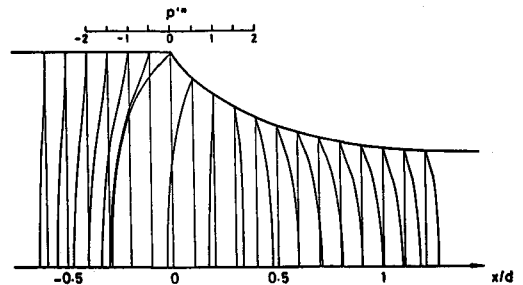


図8 無次元差圧分布

以上のように、流速分布と圧力分布を求めることができたので、運動量方程式において、運動量と圧力の頂を厳密に見積ることが可能となり、貯水池密度流の境界条件として重要である潜り込み水深を求めることができる。検査面を図7のA A' B' Cにとり、運動量保存式をたてる。潜り込み点Oより十分離れた検査面Iでは、流れは一樣であり、圧力は静水圧と見なすことができるが、検査面IIでは急変流であり、流線の曲がりを無視できない。上層の流体では、静止しており、点Oはよどみ点となる。このとき、潜り込み点付近の流れは、AO間のベルヌイの式と運動量保存式であらわされる。

AO間のベルヌイの式

$$\delta = u_1^2 / 2g \quad (11)$$

運動量保存式

$$\begin{aligned} \rho_2 \beta \bar{u}_1^2 h_2 - \rho_2 u_1^2 \left(h - \frac{\delta}{\cos \theta} \right) &= \frac{1}{2} \rho_2 g \left(h - \frac{\delta}{\cos \theta} \right)^2 \cos \theta - \frac{1}{2} \rho_1 g (h_1 + h_2)^2 \cos \theta \\ - \alpha \frac{1}{2} \Delta \rho g h_2^2 \cos \theta + \frac{1}{2} \rho_2 g (h + h_p) L_I \sin \theta + \frac{1}{2} \rho_1 g (h_p + h_1 + h_2) L_{II} \sin \theta \\ + K \frac{1}{2} \Delta \rho g (h_p + h_2) L_{II} \sin \theta \end{aligned} \quad (12)$$

ここで、 δ : A点での水面隆下量、 $h (= h_p - L_I \tan \theta)$: 検査面Iの水深、 h_p : 潜り込み水深、 h_1, h_2 : 検査面IIの上層および下層水深、 $L_I (= \kappa_I h_p)$ 、 $L_{II} (= \kappa_{II} h_p)$: 検査面I、検査面IIまでの距離、 K : 体積補正係数である。 β 、 α は、それぞれ、運動量補正係数、圧力分布補正係数であり、次式で定義される。

$$\alpha = 1 + \int_0^{h_2} p' dz / \frac{1}{2} \Delta \rho g h_2^2 \quad \beta = \int_0^{h_2} u_{II}^2 dz / \bar{u}_{II}^2 h_2 \quad (13)$$

運動量と圧力分布の補正係数 α , β の値は、ラプラス方程式の数値解、および式(10)による差圧から求めることができる。すなわち、検査面と潜り込み点との無次元距離を $\kappa = 1$, $\kappa = 0.1$ としてこれに対応する位置での流速分布・圧力分布より、 α , β を計算する。この値を式(12)に代入し整理すると潜り込み点での内部フルード数 F_p が、水路床の傾き θ の弱い関数として求まる。さらに、内部フルード数から潜り込み水深を求める式は、

$$h_p = \sqrt[3]{\frac{1}{F_p^2} \frac{q_0^2}{\epsilon g}} \quad (14)$$

ように求められる。

図9は、式(13)により潜り込み水深を計算し、実験値および現地の実測値と比較したものである。理論値は、実験室から現地規模までの広い範囲の実測値を良く説明し、ここで述べた運動量および圧力の見積りが妥当であることがわかる。

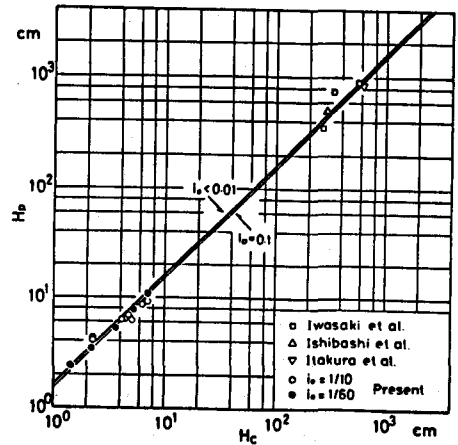


図9 潜り込み水深

貯水池密度流の境界条件である潜り込み水深が求められたので、これに続く界面形状を計算することが可能となる。界面形状に関する Benjamin の解は、ポテンシャル流に関するものであり、流れの規模に関係なく適用できる。しかし、十分下流の流れが密度流的に常流であれば、界面形状は、下流の水深の影響を受けるので、Benjamin の理論で近似できる範囲は著しく狭くなる。下流の流れが射流の場合には、Benjamin の理論が適用できる範囲は比較的広くなる。また、潜り込み点の下流では、次第に、粘性および界面での混合の影響を無視できなくなり、ポテンシャル流と見なすことには無理がある。以上の考察に基づき、以下のような解析法を提案する。

- 1) 潜り込み点付近の流れを流線の曲率が無視できない急変流の領域と粘性および界面での混合を無視できない漸変流の領域とに分割する。急変流と見なす領域の範囲は、十分下流の流れが密度流的に常流が射流かによって決定する。
- 2) 式(14)により、潜り込み点での水深を求め、急変流の領域の界面形状を Benjamin の理論により決定する。
- 3) 急変流の領域と接続して、界面での混合を考慮した漸変二層流方程式により、界面形状を計算する。

図10, 11はこのようにして求めた界面形状を実測値と比較したものである。図10は、流れが常流から射流に変化する場合であり、急変流となる範囲は、潜り込み点から支配断面までとしている。図11は、全領域が常流の場合であり、急変流となる範囲は、潜り込み点の近傍 ($x^* \leq 0.05$) に限定される。いずれの場合も実測値は計算値とよく一致する。

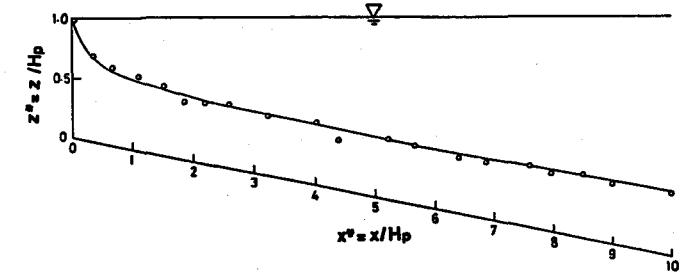


図10 常流から射流に移る流れの界面形状

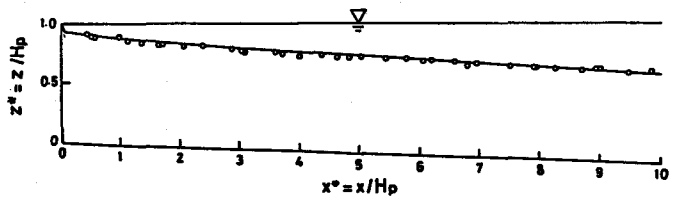


図11 全領域が常流の流れの界面形状

5. 河口から海へ急変流的に広がる密度流

河口密度流の淡水の流れは、通常、河川部で常流であり、河口近傍で支配断面を生じ海では射流となる。レイノルズ数が比較的大きく、流れが乱流でかつ淡水深が比較的大きい場合には、淡水深の変化が大きい場合には、淡水深の変化は急激で流れは急変流となる。ここでは、3.の開水路急変流の場合と同様に、流線の曲がりを考慮して、支配断面の位置と水深、界面形状を求める。

図12に急変河口密度流の座標系および記号を示す、流れは定常で上層は十分発達した乱流である。支配断面付近の流れを対象とするので、河口近傍の流れを考える。河口近傍では、流線の水平方向の拡がりはいくらか小さく、 $u \gg w \gg v$ である。界面での混合は無視し、下層は静止していると考えることができる。

急変流として解析するためには、まず、流れの流速分布と圧力分布を知る必要がある。このために、境界形状つまり界面形状を知る必要がある。ここでは、次のように考えた。

水路幅6cmの実験装置を用い、流量および相対密度差を変化させて実験を行い、河口近傍の界面形状を測定した。この結果、河口での内部フルード数が一定であれば、河口水深で無次元化した界面形状は、ほぼ相似であることを示した。また、河口近傍を考えれば、広がりはいくらか小さく、流れは近似的に二次元と見なすことができる。そこで、河口近傍の急変流が二次元のポテンシャル流で近似できると考え、実測した界面形状を境界条件として、ラプラス方程式を数値計算して、流速分布を求めた。静水圧からの差圧の分布は、水表面と任意点とにベルヌイの式をたてることにより求められる。図13はこのようにして求めた流速分布を断面平均流速で無次元化し、実測値と比較したものである。実測値は水素気泡をブロック状に発生させ、流速ベクトルを求め、気泡の上昇速度を補正して求めたものである。この結果より、界面近傍では、粘性の影響により実測値は計算値からはずれるが、それ以外の領域では、よく一致している。つまり、この付近の流れをポテンシャル流と近似してもよいことがわかる。

次に、界面の近傍を除いて流れをポテンシャル流れであると見なし、流線の曲がりによる静水圧からの差圧を考慮して、河口密度流の支配断面を決定する方法について述べる。自由表面および界面での境界条件を考慮してx方向の運動方程式を淡水層($z_0 \leq z \leq z_1$)と塩水層($z_1 \leq z \leq z_2$)について積分すると、次式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \int_0^B \int_{z_0}^{z_1} u^2 dz dy = - \frac{B}{\rho_1} \left\{ -\rho_1 g (z_1 - z_0) \frac{dz_0}{dx} + \frac{d}{dx} \int_{z_0}^{z_1} p' dz - p'_i \frac{dz_1}{dx} \right. \\ \left. + \int_{z_0}^{z_1} \frac{\tau_i}{\rho_0} dz + \int_0^B \frac{\tau_i}{\rho_1} dy \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

$$g(z_2 - z_1) \frac{dz_0}{dx} = -\epsilon g(z_2 - z_1) \frac{dz_1}{dx} + (z_2 - z_1) \frac{1}{\rho_1} \frac{dp'_i}{dx} + \frac{1}{B} \int_0^B \frac{\tau_i}{\rho_1} dy \quad (16)$$

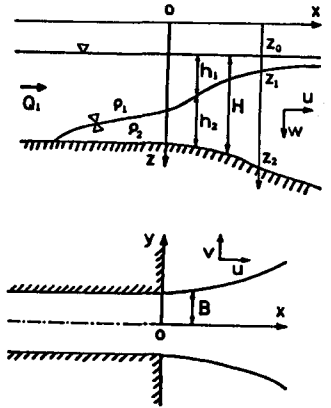


図12 急変河口密度流

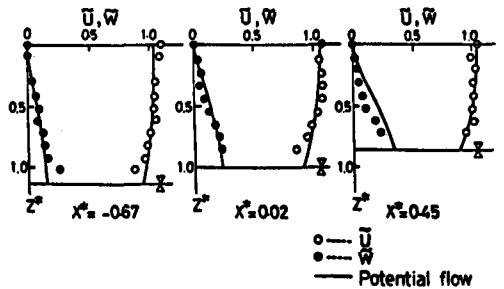


図13 流速分布の比較

ここで、 p' は、静水圧からの差圧、 p'_i は、その界面での値、 τ_i は界面でのせん断力である。式(15)、(16)から、 z_0 に関する項を消去し、相対密度差 ε の2次以上の微小項を省略して、淡水層厚の変化率について整理すると、次式を得る。

$$\frac{d h_1}{d x} = \frac{F_{i1}^2 \{ K_2 (x^*) h_1 / B \cdot dB/dx - 1/2 \cdot (h_1 / B + H/h_2) \cdot \overline{f_i} \}}{1 + K_1 (x^*) F_{i1}^2} \quad (17)$$

ここで、式中の K_1 、 K_2 は、流線の曲がり起因する係数であり、

$$K_1 = \beta - h_1^* \frac{d\beta}{d h_1^*} + \frac{1}{2} \left(h_1^* \frac{\partial p_i'^*}{\partial h_1} - p_i'^* - h_1^* \frac{\partial \overline{p_i'^*}}{\partial h_1} + \overline{p_i'^*} \right) \quad (18)$$

$$K_2 = \beta - p_i'^* + \overline{p_i'^*} \quad (19)$$

である。ここで、 β は運動量補正係数、 $p_i'^* = p' / \frac{1}{2} \rho_1 \bar{u}_1^2$ 、 $\overline{p_i'^*}$ は $p_i'^*$ の断面平均値、 $\overline{f'}$ は界面抵抗係数、 $F_{i1} = Q / (\varepsilon g h_1^3 B^2)$ は、静水圧を仮定した淡水層の内部フルード数、 $h_1^* = h_1 / h_0$ 、 $x^* = x / h_0$ 、 h_0 は河口での淡水深である。 K_1 、 K_2 は、数値的に求めた流速分布・圧力分布の値から計算できる。

図14は、流線の曲がり起因する係数 K_1 、 K_2 の河口近傍の変化を示したものである。漸変流と仮定するとこれらの値はともに $K_1 = K_2 = 1$ となるが、実際の K_1 、 K_2 の値は大きく変化しており、河口近傍の流れを漸変流として取扱うことは適当でないことがわかる。

支配断面の位置は、式(17)の分母と分子が同時に零になる場所として求められる。淡水の流動幅 B の x 方向変化、水理量、界面抵抗係数を与えると、式(17)の分母・分子はともに x^* 、 h_0 だけの関数となり、支配断面の位置とそこでの淡水深が決定できる。ただし、この場合には数値解を用いているので、若干の試行錯誤が必要である。図12は、以上の方法により、支配断面の位置とそこでの水深を求め、この水深と相似形の仮定より界面形状を求め、実測値と比較したものである。同図には、比較のため、漸変流($K_1 = K_2 = 1$)として、同様な方法により求めた界面形状も記している。支配断面の位置は、2つの解析法ではほとんど変化がなく、河口のごく近傍に求められる。しかし、支配断面での淡水深は2つの方法で異なり、急変流解析による値は、漸変流解析による値より小さく計算され、実測値をよりよく説明することがわかる。

6. おわりに

流線の曲率が大きな流れでは、一般的に流速分布・圧力分布の見積りが困難なために、水面形や界面形を計算することは難しい。本研究は、このような流れ

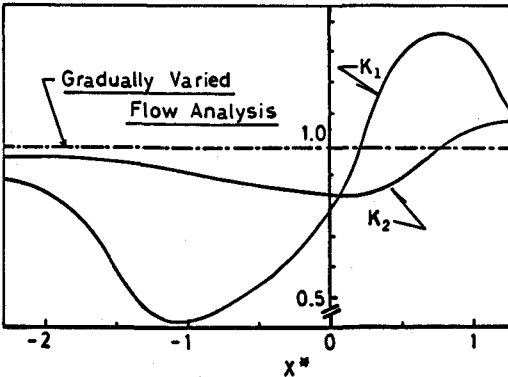


図14 K_1 、 K_2 の流れ方向の変化

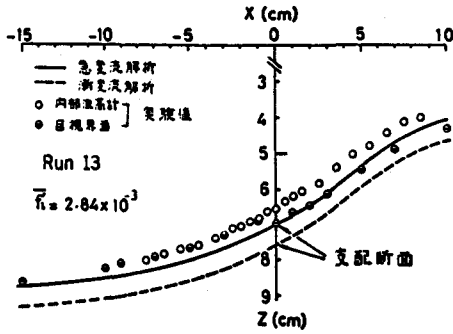


図15 界面形状の実測値と計算値

のうち急激に縮流する流れでは、流れの大半の領域がポテンシャル流で近似できるとの物理的洞察に基づき、流速分布、圧力分布を求め、水面形方程式あるいは、密度流の界面形状を評価する方法を示したものである。これをまとめると表1のようになる。

表1 解析法のまとめ

対象とする流れ	1.円頂ぜきを越流する流れ	2.貯水池流入端で潜り込む流れ	3.河口から海に広がる流れ
基礎方程式	ラプラス方程式 ベルヌイの式	ラプラス方程式 ベルヌイの式	ラプラス方程式 ベルヌイの式
解法の種類	解析解	リラクゼーション法 による数値解	リラクゼーション法 による数値解
自由境界面形状	与えなくともよい	Benjaminの理論 による境界面形状	実験から求めた 無次元界面形状
妥当性の確認	流速分布 圧力分布 壁面差圧 の比較により確認	潜り込み水深 界面形状 の比較により確認	流速分布 界面形状 の比較により確認
得られた主要な成果	支配断面の決定法 水面形状の算定法	潜り込み水深の 算定式 界面形状の算定法	支配断面の決定法 界面形状の算定法

表1に示すように、流れの型が異っていても、ほとんど同じ方法で解析を行なうことができる。3.の場合には、境界形状として実測値を用いていることから、汎用性がないと思われる可能性がある。しかし、このような指摘は妥当ではない。すなわち、ポテンシャル流で近似できるような流れは、粘性の影響が小さいため、水理現象の規模に依存せず、界面形状は相似形となるためである。

本論文では、境界近傍の境界層については全く議論されていない。ポテンシャル流で近似できる領域と同時に、境界層についても解析を行い、急変流下のせん断応力の分布を明らかにすることが今後の課題である。

参考文献

- 1) 岩崎敏夫, 土木学会論文集, 第43号, 1957.
- 2) 福岡捷二, 福嶋祐介, 土木学会論文報告集, 第329号, 1983.
- 3) Benjamin, T. B., Journal of Fluid Mech., Vol. 31, Part 2, 1968.
- 4) 福岡捷二, 福嶋祐介, 中村健一, 土木学会論文報告集, 第302号, 1981.
- 5) 福岡捷二, 福嶋祐介, 守屋祥一, 新庄高久, 土木学会論文報告集, 第327号, 1982.