

バルブストロッキングによる水撃制御の粘性解 A viscous solution of a valve-stroking to control waterhammer

農林水産省 農業土木試験場 正 員 島 田 正 志
農林水産省 農業土木試験場 正 員 ○奥 島 修 二

1. 緒 言

大規模流量輸送パイプラインでは、事故緊急時を含めて、水撃圧に留意しつつ、過渡現象を早急に定常化することが重要である。Streeterの提案した Valve-Stroking 法¹⁾は、水撃圧をある一定の許容範囲に制御し、過渡現象の継続時間を短時間に押え、不必要な圧力振動を完全に消滅させる点で、すぐれたシステムの予測制御法といえる。本手法による数値解析法を使えば、複雑なクロズドパイプラインに対して、上述の特徴をもつ制御が可能であることがすでに示されている²⁾。

単純なクロズドシステムの Valve-Stroking 法による制御を理論的に取り扱えるように、本論文では、図1に示す単管路システムをモデルとして、粘性効果が無視しえない場合に Valve-Stroking の粘性解を求めるものである。

単管路システムに対しては、バルブ完全遮断にもとづく水撃圧の予測、制御の理論的成果として、以下の非粘性解析結果が知られている。

急閉鎖の場合の無次元最大水撃圧 h_M は、 $\Delta h = h_M - 1$ とすれば、

$$\Delta h = \frac{a V_0}{g H_0} = B \quad (1)$$

a = 圧力伝播速度 (m/s), V_0 = 初期流速 (m/s)
 g = 重力加速度 (m/s²), H_0 = 代表水頭 (貯水池水頭)。(1)式の右辺は、アリエビ定数と呼ばれる。

緩閉鎖の場合、 Δh は、 B のみならず、閉鎖時間、バルブ特性により決まる。Jones-Wood式では³⁾

$$\Delta h = \frac{B}{2 t_c - 1} \quad 1 \leq t_c \quad (2)$$

ただし、 $t_c = T_c / (\frac{2L}{a})$, T_c = バルブ操作時間 (s), L = 管長 (m)

以上のバルブ操作では、系内の圧力振動が残る。この乱れを時間 t_c ($t_c \geq 1$) で完全に消去し、流れを定常化する方法として、Streeterは、Valve-Stroking 法を提案した¹⁾。

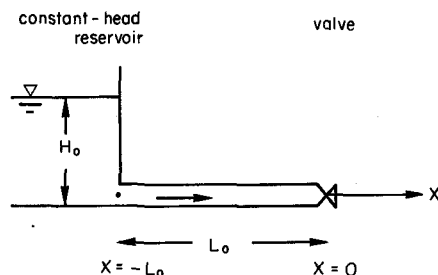


図1 解析モデル

$$\Delta h = \frac{B}{2 t_c - 2} \quad 2 \leq t_c \quad (3)$$

Propsonは、さらに Valve-Stroking の適用範囲を拡張し、(4)式を誘導した⁴⁾。

$$\Delta h = \frac{B}{2} \quad 1 \leq t_c \leq 2 \quad (4)$$

本論文では、粘性効果による重要な修正を(3)、(4)式に加え、最大水撃圧の正確な予測を可能にするばかりでなく、具体的な Valve 操作を決定するのに必要な関係式を誘導する。まず、(3)、(4)式を与える非粘性解が、より一般的な議論により、最大水撃圧を最小化する意味での最適制御を与えることを示す。次に、粘性解を非粘性解からの摂動解として誘導する。解析結果が、既応の実験値、及び、粘性効果の著しいパイプラインに対する Valve-Stroking の数値解と比較され、解析の有効性と留意点を示される。

2. Valve-Stroking の粘性解

1) 基礎方程式

管内流れの運動方程式、連続の式は、弾性波速度が管内流速より十分大きな場合に妥当な、(5)、(6)式を使う。

$$\frac{\partial V}{\partial T} + g \frac{\partial H}{\partial X} + f \frac{V|V|}{2D} = 0 \quad (5)$$

ただし、Darcy-Weisbachの friction factor は $f = k |V|^S$ で種々の経験則が適用可能であるよう

一般化しておく。

$$\frac{\partial H}{\partial T} + \left(\frac{a^2}{g}\right) \frac{\partial V}{\partial X} = 0 \quad (6)$$

なお、(5)、(6)式を無次元特性形式に変換して、(7)、(8)、(9)、(10)式を得る。

$$C^+: \frac{dx}{dt} = 2 \quad (7)$$

$$dh + B dv + 2 h_f v |v|^{s+1} dt = 0 \quad (8)$$

$$C^-: \frac{dx}{dt} = -2 \quad (9)$$

$$-dh + B dv + 2 h_f v |v|^{s+1} dt = 0 \quad (10)$$

ここで、 $v = V/V_0$, $h = H/H_0$, $x = X/L_0$, $t = T/(2L_0/a)$, $h_f = kV_0^{2+s}L_0/(2gH_0D)$, V = 流速 (m/s), H = 水頭 (m), D = 管径 (m), T = 時間 (s), X = バルブから上流へとした位置座標 (m) で、添字 0 は管の代表量であるとする。ここでは、 L_0 = 管長 (m), H_0 = 貯水池水頭 (m), V_0 = 初期定常流速 (m/s) とする。

2) 理論解析

バルブ操作時間 (過渡現象の継続時間) によって、Valve-Stroking による流れのパターンは、図 2 (TYPE A, TYPE B), のように 2 つに区別されることが知られている。⁴⁾

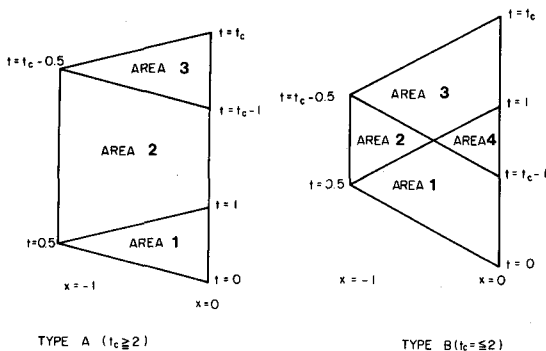


図 2 流れのパターン

TYPE A では、流れの領域が特性直線の影響領域の違いにより、領域 1, 2, 3 に区分される。また、TYPE B では、さらに別の領域 4 が現われる。この 4 つの領域ごとに解を決定する必要がある。

解を微小パラメーター h_f でベキ級数展開する。

$$v = v_0 + h_f v_1 + h_f^2 v_2 + O(h_f^3) \quad (11)$$

$$h = h_0 + h_f h_1 + h_f^2 h_2 + O(h_f^3) \quad (12)$$

v_k , h_k は、第 k 近似解を意味する。

(11), (12) 式を (8), (10) 式に代入して、 h_f のベキごとに整理して、0 次、1 次、2 次近似解を構成しよう。

1) 非粘性解 (0 次近似解)

$$C^+: dh_0 + B dv_0 = 0 \quad (13)$$

$$C^-: -dh_0 + B dv_0 = 0 \quad (14)$$

初期定常条件、最終定常条件は、次式の通りである。

$$\text{初期定常条件: } v_0 = 1, \quad h_0 = 1 \quad (15)$$

$$\text{最終定常条件: } v_0 = v_c, \quad h_0 = h_c \quad (16)$$

ここで、上流端貯水池出口の流速、および水頭変化を次のように表現する。

$$v_0 = 1 + \frac{m}{2} f(2t - 1) \quad (17)$$

$$h_0 = 1 - \frac{Bm}{2} g(2t - 1) \quad (18)$$

$$\frac{1}{2} \leq t \leq t_c - \frac{1}{2} \quad (19)$$

ただし、 $f(\cdot)$, $g(\cdot)$ は任意関数であるが、 $t = \frac{1}{2}$, $t = t_c - \frac{1}{2}$ の条件より、

$$f(0) = 0, \quad g(0) = 0 \quad (20)$$

$$v_c = 1 + \frac{m}{2} f(2t_c - 2) \quad (21)$$

$$h_c = 1 - \frac{Bm}{2} g(2t_c - 2) \quad (22)$$

ただし、 m は、 t_c , v_c で記述されるパラメーターである。上流端を一定水頭貯水池と考えれば、

$$g(\cdot) = 0, \quad h_c = 1 \quad (23)$$

なお、損失は、摩擦損失が支配的であり、局所損失の効果は無視できるとする。

以上の式より、Valve-Stroking の非粘性解を領域 1, 2, 3, 4 に対して、任意関数 $f(\cdot)$ を使って求めると、次式を得る。

領域 1

$$v_0 = 1 + \frac{m}{4} f(x + 2t) \quad (24)$$

$$h_0 = 1 - \frac{Bm}{4} f(x + 2t) \quad (25)$$

領域 2

$$v_0 = 1 + \frac{m}{4} (f(x+2t) + f(2t-x-2)) \quad (26)$$

$$h_0 = 1 + \frac{Bm}{4} (-f(x+2t) + f(2t-x-2)) \quad (27)$$

領域 3

$$v_0 = \frac{1+v_c}{2} + \frac{m}{4} f(2t-x-2) \quad (28)$$

$$h_0 = 1 + \frac{B}{2} (1-v_c) + \frac{Bm}{4} f(2t-x-2) \quad (29)$$

領域 4

$$v_0 = \frac{1+v_c}{2} \quad (30)$$

$$h_0 = 1 + \frac{B}{2} (1-v_c) \quad (31)$$

次に、関数 f の形を時間のべき乗に従って変化する単調増加関数として、バルブで生ずる最大水撃圧を最小化するような指数 n を決定すると、 $n=1$ となり $f(X)=X$ とすれば、次式が得られる。

領域 1

$$v_0 = 1 + \frac{m}{4} (x+2t) \quad (32)$$

$$h_0 = 1 - \frac{Bm}{4} (x+2t) \quad (33)$$

領域 2

$$v_0 = 1 + m(t-0.5) \quad (34)$$

$$h_0 = 1 - \frac{Bm}{2} (x+1) \quad (35)$$

領域 3

$$v_0 = \frac{1+v_c}{2} + \frac{m}{4} (2t-x-2) \quad (36)$$

$$h_0 = 1 + \frac{B}{2} (1-v_c) + \frac{Bm}{4} (2t-x-2) \quad (37)$$

領域 4

$$v_0 = \frac{1+v_c}{2} \quad (38)$$

$$h_0 = 1 + \frac{B}{2} (1-v_c) \quad (39)$$

$$\text{ただし } m = \frac{(v_c - 1)}{(t_c - 1)} \quad (40)$$

以上の非粘性解は、Streeter, Propson のものと完全に一致する。^{1), 4)}

ii) 粘性解 (第 1 近似解)

(32) ~ (39) の非粘性解を利用して、 v_1, h_1 に対する特性式を積分する。 h_1 の 1 次項より次式を得る。

$$C^+ : dh_1 + Bdv_1 + 2v_0 |v_0|^{s+1} d\tilde{t} = 0 \quad (41)$$

$$C^- : -dh_1 + Bdv_1 + 2v_0 |v_0|^{s+1} d\tilde{t} = 0 \quad (42)$$

ただし、 $\tilde{t}$ は特性線上の時間を示すパラメーター

である。また、次の条件が設定できる。

$$\text{初期定常条件: } {}_0v_1 = 0, {}_0h_1 = -(1 + \frac{x-2t}{2})$$

$$\text{最終定常条件: } {}_s v_1 = 0, {}_s h_1 = -v_c^{2+s} (1 + \frac{x+2t}{2} - t_c)$$

$$\text{上流端条件: } {}_2 v_1 = 0, {}_2 h_1 = 0$$

以上の式・条件より、各領域の解が積分を実行して求められる。なお、非粘性解 v_0 は、どの領域でも正值であるので、積分にあたって、絶対値をはずすことができる。

領域 1

$$C^+ : h - {}_0 h_1 + B(v - {}_0 v_1) + 2 \int_{p_1}^t v_{1p}^{2+s}(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0 \quad (43)$$

$$C^- : -({}_2 h_1 - h) + B({}_2 v_1 - v) + 2 \int_t^{p_2} v_{1m}^{2+s} d\tilde{t} + 2 \int_{p_2}^{p_3} v_{2m}^{2+s}(\tilde{t}) d\tilde{t} = 0 \quad (44)$$

なお、 $p = (2t-x)/4$, $M = (2t+x)/4$, $p_1 = p$, $p_2 = M + \frac{1}{2}$, $p_3 = 2M + \frac{1}{2}$ である。 p は正の特性線上、 M は負の特性線上で一定値をとる。 $v_{1p}(\tilde{t})$ は、領域 i の正の特性線上の流速、 $v_{1m}(\tilde{t})$ は、領域 i の負の特性線上の流速を示すものとする。

$$v_{1p}(\tilde{t}) = m\tilde{t} + 1 - mp$$

$$v_{1m}(\tilde{t}) = 1 + mM$$

$$v_{2m}(\tilde{t}) = m\tilde{t} + 1 - \frac{m}{2}$$

$\tilde{t}$ について (43), (44) 式を積分して

$$v_1 = -\frac{1}{B} \left[\frac{1-2p}{2} + F(v_{1p}(t), v_{1p}(p_1)) - v_{1m}^{2+s}(p_2-t) - F(v_{2m}(p_3), v_{2m}(p_2)) \right] \quad (45)$$

$$h_1 = -\left[\frac{1-2p}{2} + F(v_{1p}(t), v_{1p}(p_2)) + v_{1m}^{2+s}(p_2-t) + F(v_{2m}(p_3), v_{2m}(p_2)) \right] \quad (46)$$

$$\text{ここで、} F(A, B) = (A^{3+s} - B^{3+s}) / (3+s) / m$$

領域 2

同様にして解を求めると、

$$v_1 = -\frac{1}{B} \left[F(v_{2p}(t), v_{2p}(p_4)) - F(v_{2m}(p_3), v_{2m}(t)) \right] \quad (47)$$

$$h_1 = -\left[F(v_{2p}(t), v_{2p}(p_4)) + F(v_{2m}(p_3), v_{2m}(t)) \right] \quad (48)$$

$$\text{ただし、} p_4 = 2p - \frac{1}{2}, v_{2p}(\tilde{t}) = m\tilde{t} + 1 - \frac{m}{2}。$$

領域 3

$$v_1 = -\frac{1}{B} \left[-\frac{v_c^{2+s}}{2} (1+2M-t_c) + F(v_{2p}(P_5), v_{2p}(P_4)) + v_{3p}^{2+s} (t-P_5) - F(v_{3m}(P_6), v_{3m}(t)) \right] \quad (49)$$

$$h_1 = -\left[\frac{v_c^{2+s}}{2} (1+2M-t_c) + F(v_{2p}(P_5), v_{2p}(P_4)) + v_{3p}^{2+s} (t-P_5) + F(v_{3m}(P_6), v_{3m}(t)) \right] \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \text{ただし, } v_{3p}(\tilde{t}) &= m(p-0.5) + \frac{1+v_c}{2} \\ v_{3m}(\tilde{t}) &= m\tilde{t} + \frac{1+v_c}{2} - m(M + \frac{1}{2}) \\ P_5 &= p + \frac{t_c+1}{2}, \quad P_6 = M + \frac{t_c}{2} \end{aligned}$$

領域 4

$$v_1 = \frac{1}{B} \left[\frac{v_c^{2+s}}{2} (1+2M-t_c) + p - \frac{1}{2} + \left(\frac{1+v_c}{2} \right)^{2+s} \cdot (P_2-t) + F(v_{3m}(P_6), v_{3m}(P_2)) - \left(\frac{1+v_c}{2} \right)^{2+s} \cdot (t-P_5) - F(v_{1p}(P_6), v_{1p}(P_1)) \right] \quad (51)$$

$$h_1 = -\left[\frac{v_c^{2+s}}{2} (1+2M-t_c) + \frac{1}{2} - p + \left(\frac{1+v_c}{2} \right)^{2+s} \cdot (P_2-t) + F(v_{3m}(P_6), v_{3m}(P_2)) + \left(\frac{1+v_c}{2} \right)^{2+s} \cdot (t-P_5) + F(v_{1p}(P_6), v_{1p}(P_1)) \right] \quad (52)$$

$$\text{ただし, } v_{4p} = v_{4m} = \frac{1+v_c}{2}$$

iii) 最大水撃圧の関係式

Valve-Stroking によって生ずる最大水撃圧は、主に非粘性解から判断される。TYPE A では、領域 2 のバルブ位置で最大水撃圧が発生し、この領域でこの値が保持され、TYPE B では、領域 4 の全領域で最大水撃圧が発生している。

以上の結果は、粘性効果によって修正される。ここでは、ii) の第 1 近似解を使って粘性効果による若干の修正を行って、最大水撃圧の関係式を誘導する。抵抗則は、Darcy-Weisbach 式で $s=0$ と単純化して、以下議論する。

TYPE A ($t_c \geq 2$) では、バルブ ($x=0$) での $\partial h_1 / \partial t > 0$ が証明できる。また、非粘性解 h_0 も増加関数であるから、最大水撃圧 h_M は、 $t=t_c-1$ で発生する。

$$h_M = 1 - \left(\frac{Bm}{2} \right) - \frac{h_f}{3} (v_c^2 + v_c(v_c-m) + (v_c-m^2)) \quad (53)$$

$$t_c \geq 2$$

もし、バルブが完全閉鎖すれば、 $v_c=0$ であるから、

$$h_M = 1 + \frac{B}{2} \frac{1}{(t_c-1)} - \frac{h_f}{3} \frac{1}{(t_c-1)^2} \quad (54)$$

TYPE B ($1 \leq t_c \leq 2$) に対しては、領域 4 で負の特性線に沿って $dh_1/dt > 0$ 、正の特性線に沿って $dh_1/dt < 0$ であることが示される。従って最大水撃圧 h_M の発生する時間 t_M 、位置 x_M は、

$$t_M = \frac{t_c}{2}, \quad x_M = t_c - 2 \quad (55)$$

$$h_M = 1 + \frac{B}{2} (1-v_c) - \frac{h_f}{3} (t_c-1)(v_c^2+v_c+1) \quad (56)$$

バルブの完全閉鎖時には $v_c=0$ として

$$h_M = 1 + \frac{B}{2} - \frac{h_f}{3} (t_c-1) \quad (57)$$

バルブ位置での最大水撃 h_M は、 $t=1$ で発生するが、次式となる。

$$h_M = 1 + \frac{B}{2} (1-v_c) - h_f \left(\frac{2-t_c}{2} (v_c^2 + \left(\frac{1+v_c}{2} \right)^2) + \frac{1}{3m} (v_c^3 - 1) \right) \quad (58)$$

iv) 第 2 近似解

h_f の値が 1 に近づくにつれて、級数解の精度に問題が出る。そこで h_f^2 を含む項までの第 2 近似解も誘導できる。この結果は、長大なパイプラインで高損失なシステムに対しても利用できるであろう。

特性式は、次式の通りである。

$$C^+: dh_2 + Bdv_2 + 2(s+2)v_0^{s+1}v_1 d\tilde{t} = 0 \quad (59)$$

$$C^-: -dh_2 + Bdv_2 + 2(s+2)v_0^{s+1}v_1 d\tilde{t} = 0 \quad (60)$$

次の条件式が課せられる。

$$\text{初期定常条件: } {}_0v_2 = 0 \quad {}_0h_2 = 0$$

$$\text{最終定常条件: } {}_sv_2 = 0 \quad {}_sh_2 = 0$$

$$\text{上流端条件: } {}_2v_2 = 0 \quad {}_2h_2 = 0$$

計算方法は、第 1 近似解と同様である。各領域の解の表現についての詳細は別にゆずるとして、(54) (57) 式を修正して、次式を得る。

$$h_M = 1 + \frac{B}{2} \frac{1}{(t_c-1)} - \frac{h_f}{3} \frac{1}{(t_c-1)^2} + \frac{11}{120} \frac{h_f^2}{B} \frac{1}{(t_c-1)^3} \quad (t_c \geq 2) \quad (61)$$

$$h_M = 1 + \frac{B}{2} - \frac{h_f}{3} (t_c-1) + \frac{11}{120} \frac{h_f^2}{B} (t_c-1)^2 \quad (1 \leq t_c \leq 2) \quad (62)$$

v) バルブ操作の決定

なお、具体的バルブ操作は、得られた解 v 、 h の中で $x=0$ とした $\bar{v}$ 、 $\bar{h}$ をバルブで成立する関係式

$G(\bar{v}, \bar{h}, d) = 0$ に代入して、バルブの開度を経時的に決定して得られる。

3. 解析結果の検討

1) Propson の実験値による検証^{4), 5)}

Propson が 1970 年に行った単管路 システムのバルブ閉鎖、開放時の Valve-Stroking の実験を用いて、本解析の妥当性を検証する。

図 3 には、 $h_f = 0.236$, $B = 0.666$, $t_c = 1.50$, $v_c = 0.091$ の場合のバルブ閉鎖の実験値と解析値 (第 1 近似解を含む) が、 $x = 0.0$, $x = -0.5$ の水撃圧について比較される。最大水撃圧の発生は、(55) 式に一致することを実験も示している。

図 4 には、 $h_f = 0.007$, $B = 0.0596$, $t_c = 1.50$, $v_c = 10.0$ の場合のバルブ開放時の同様の比較が示

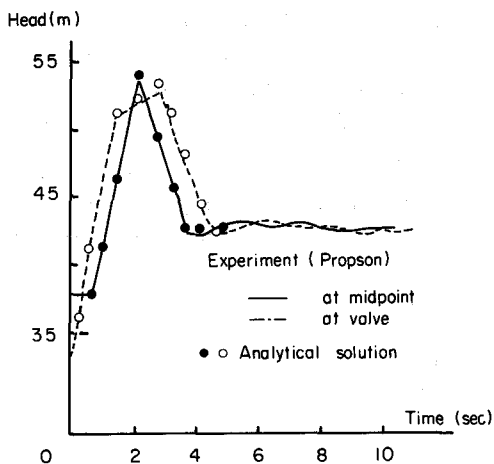


図 3 バルブ閉鎖実験値との比較

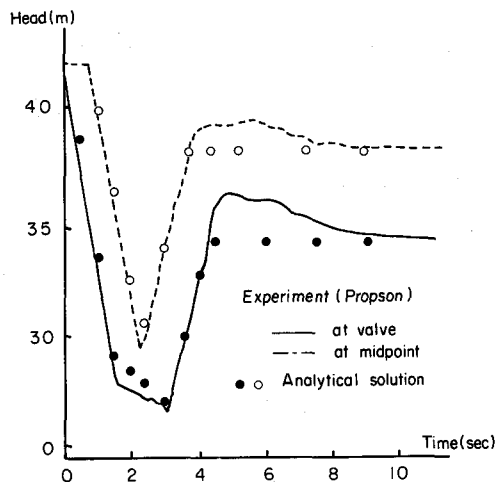


図 4 バルブ開放実験値との比較

される。解析値は良く実験結果を記述しうる。

2) 高損失な系への適用性

解析の有効性と留意点について、高損失な系での Valve-Stroking の数値解との比較を通して述べる。

図 5, 6 では、 $B = 0.5$, $h_f = 0.9$, $t_c = 2.5$, $v_c = 0.0$ の場合、 $x = 0$ 及び -0.5 の水撃圧・流速値が数値解と解析解 (第 2 近似解を含む) で比較される。解の誤差はバルブ地点 ($x = 0$) で最大となるが、実用上の精度は十分である。ここで、注意を要するのは、これまで述べた制御を行うバルブ操作が現実的なバルブの特性を踏まえないと仮空の議論となるおそれがある点である。

図 7, 8 には、 $B = 0.5$, $h_f = 0.9$, $v_c = 0.0$, $t_c = 1.5$ の場合の同様な比較を示す。 $x = 0$ では、わずかに逆流が生じており、流速の回復する現象も認め

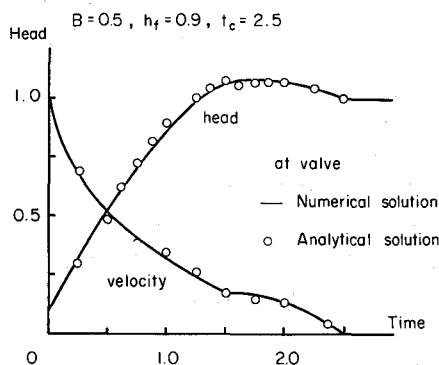


図 5 高損失なシステムでのバルブストロッキング (TYPE A)

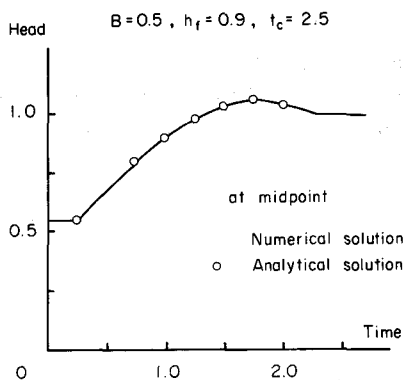


図 6

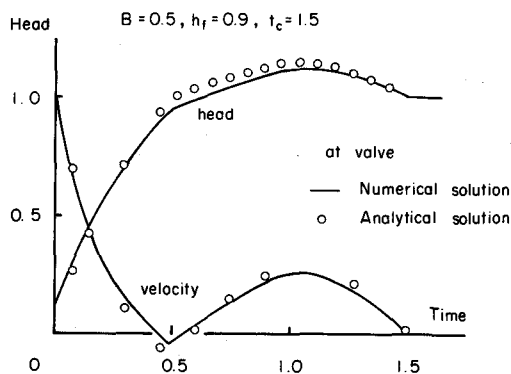


図7 高損失なシステムでのバルブストロッキング
(TYPE B)

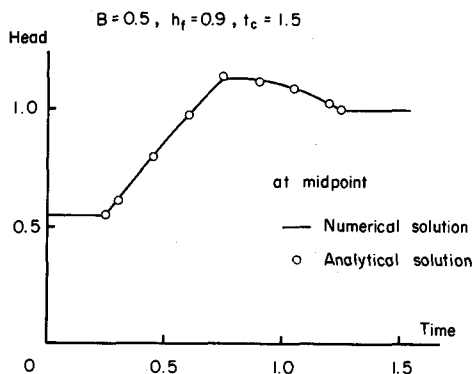


図8

られる。高損失なシステムの Valve-Stroking では、系のパラメーターとの関係でバルブ操作時間 t_c を適切に決定する必要がある。

4. 結 論

単管路システムの Valve-Stroking 理論解析を粘性効果が無視できない場合に拡張し、数値解によらず理論解を得た。とくに、最大水撃圧 h_M 、バルブ操作時間 t_c (過渡現象の継続時間)、システムパラ

メーター B 、 h_f の間の一般的関係式、バルブ操作を決定するのに必要な関係式を得ることができた。

本解析は既応の実験値によって検証され、また、とくに、高損失なパイプシステムに対して、解析の有効性と留意点を示した。

また、単管路システムの Valve-Stroking の解析を発展させることで、より複雑な系に対しても理論的に取扱う展望を得た。

参 考 文 献

- 1) Streeter, V.L. : Valve Stroking to Control Water Hammer. Jour. of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 89, No. HY2, 1963
- 2) Streeter, V.L. : Valve Stroking for Complex Pipng Systems. Jour. of the Hydraulics Division, ASCE, Vol. 93, No. Hy 3, 1967
- 3) Jones, S.E. and D.J. Wood : Prediction and Control of Pressures Surges due to Valve Closures. Int. Conf. on Pressure Surges, paper F1, 1972
- 4) Propson, T.P. : Valve Stroking to Control Transient Flow in Liquid Systems. PhD Thesis, Civil Engineering, Univ. of Michigan, Ann Arbor, 1970
- 5) Wylie, E.B. and V.L. Streeter : Fluid Transients, McGRAW-HILL Inc. 1978