

被圧地下水位解析への粘弾性モデルの適用について
 Application of Visco-Elastic Model
 to the Analysis of Confined Groundwater Head

東京都土木技術研究所 正員 守田 優

1. はじめに

広域的な被圧地下水流動の解析手法として、Tyson と Weber¹⁾ (1964) によって最初のモデルが開発されて以来、地下水シミュレーションモデルは、二次元モデルから準三次元化、さらには三次元モデルへ、手法的には有限差分法から有限要素法の応用へと発展してきた。これらの理論的なモデルが、詳細な入力データを必要とし、その解析の作業にあたり質量ともかなりの労力を要求することは避けることができない。ただ、その方法の本質が、つまるところ基礎となる偏微分方程式の近似解法という点にあるため、揚水量の変化とそれともなり被圧水頭の変動を、いわば外力と変位の関係のようにモデルから直接的に把握することが困難となっている。たとえば、ある地域の揚水量の増加によってどのような水位変化の影響が生じるかという問題も、構造力学的な考え方からみると単位荷重に対する変位の問題として理解することができるが、地下水シミュレーションモデルによる複雑な計算は、その見通しをきわめて困難なものにしているように思われる。最近では、広域地下水流動への線型システムモデルの適用も見られるようになった。²⁾

本研究は、被圧帯水層における揚水量の増加と水頭の変動を、粘弾性体に加わる外力と変位の関係としてとらえ、粘弾性モデル (Voigt モデル)³⁾ の適用によって、動力学的な新しい観点から被圧地下水位解析モデルの確立を意図したものである。

2. 粘弾性モデルの基礎理論とモデルの定式化

被圧地下水位解析のための粘弾性モデルについて、まず基本的な考え方を説明し、そのあと理論式によるモデルの定式化を行なう。

2.1 粘弾性モデルの考え方について

いま被圧帯水層内において揚水量とかん養量が平衡状態にある。このときA地域に $a \cdot \Delta q_a$ の揚水量の増加があったとする。帯水層内で新たな被圧水頭低下、地下水の流動が生じ、かん養量が増加する。そして充分な時間の後、再び新しい平衡状態に達する。この過程は、図-1の上図に示したように、 $a \cdot \Delta q_a$ の外力の増加による粘弾性的な変位の過程として考えることができ、時間の経過とともに図中点線で示した平衡状態に近づいていく。(図-1は帯水層を断面から見ているかたちになる。)もしこれと並行して、B地域で $b \cdot \Delta q_b$ の揚水量増加があった場合、両地域の揚水量増加による被圧水頭の変動は、重ね

合せの原理によって図-1のように求めることができる。このようにして、各地域ごとに、単位揚水量増加 $\Delta q_a, \Delta q_b, \dots$ による被圧水頭の変動特性、すなわち単位荷重による粘弾性的な変形特性がわかっているれば、あとは線型的な重ね合せによって全体の水頭変化を計算することができる。

以上の説明では、平衡状態からの揚水量の増加を考えた。このとき揚水量の差を揚水量の増加分とするこ

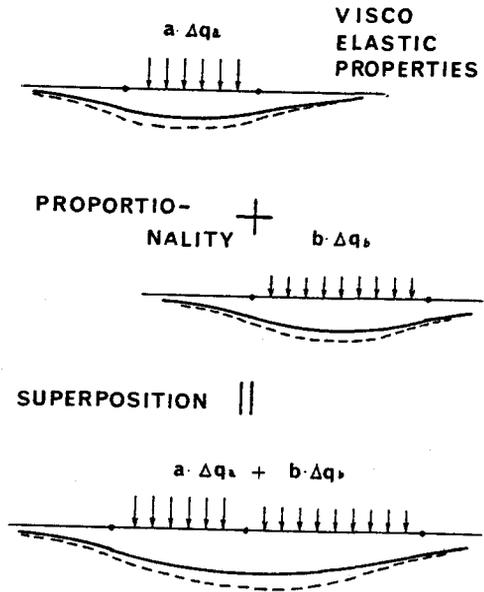


Fig. 1

とができる。しかし、平衡状態になく、揚水量とかん養量が等しくない状態でさらに揚水量が変化した場合、そのときのかん養量と新たな揚水量との差が揚水量増加分になる。こうして各地域ごとに揚水量の実質的な増加を計算し、単位時間ごとに水頭変化の重ね合わせを繰り返せば、対象地域の揚水量の変化にともなう被圧水頭の変動を順次求めることができる。

2.2 基礎方程式

被圧帯水層内に体積 V_0 の閉曲面を考えると、地下水の質量保存則からつぎの式が成立する。

$$-\int \rho_w \cdot \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV + Q \quad (1)$$

ここに、 ρ_w : 水の密度、 \mathbf{v} : 地下水流速、 $d\mathbf{S}$: 面積素片 (外向き法線を正)、 ρ : 単位体積中の地下水の質量、 Q : 揚水量あるいは人工かん養量である。

(1)式の左辺をダルシー則で、右辺の第1項をJacob⁴⁾による関係式 $\partial \rho / \partial t = \rho_{w0} \cdot S_s \cdot \partial h / \partial t$ によって、被圧水頭 $h(x, y, z, t)$ の式に書き直し整理するとつぎのようになる。

$$\int (k \cdot \text{grad } h) \cdot d\mathbf{S} = \int S_s \cdot \frac{\partial h}{\partial t} dV + \frac{Q}{\rho_{w0}} \quad (2)$$

ここで、 k は透水係数、 S_s は比貯留量、 ρ_{w0} は標準状態の水の密度であり、 $\rho_w \approx \rho_{w0}$ としている。

さて、(2)式において、 $t = t_0 + t'$ 、 $h = h_0(x, y, z, t_0) + h'(x, y, z, t')$ として変数変換を行ない、 $t = t_0$ のときの被圧水頭 h_0 、 t' 時間後の被圧水頭の変化量 h' をもちいて(2)式を表現すると

$$\int (k \cdot \text{grad } h') \cdot d\mathbf{S} = \int S_s \cdot \frac{\partial h'}{\partial t'} dV + \frac{Q}{\rho_{w0}} - \int (k \cdot \text{grad } h_0) \cdot d\mathbf{S} \quad (3)$$

を得る。上式の右辺第1項を領域内の平均値 \bar{S}_s 、 \bar{h}' によって表わし、残りの項を Δq としてまとめる。 Δq は、 $t = t_0$ のときの領域への流入量、すなわちかん養量を基準にした揚水量を表わしている。

$$\Delta q = \int (k \cdot \text{grad } h') \cdot d\mathbf{S} - \bar{S}_s \cdot V_0 \cdot \frac{d}{dt'} \bar{h}' \quad (4)$$

($t' = 0$ のとき、 $h' = 0$ 、 $\bar{h}' = 0$)

(1)式から導かれた(4)式が、粘弾性モデルの基本式であり、

これをさらに離散化してモデルを定式化する。

2.3 粘弾性モデルの定式化

現実の被圧帯水層は、難透水層 (加圧層) をはさむ数層の帯水層からなり、地下水流動も帯水層にそった流れだけではなく、漏水 (leakage) あるいは難透水層からの絞り出し (squeeze) といった垂直方向の流動が局部的に存在する。しかしここではまず、1層の被圧帯水層としてモデル化し、地下水流動についても垂直成分は垂直かん養の問題として切り離し、後であらためて述べることにする。

粘弾性モデルが解析の対象とするのは、広域的な被圧地下水流動であるが、対象地域を離散化した小領域に分割するにあたり、TysonとWeber¹⁾が地下水管理モデルでもちいた多角形小領域分割 (図-2)の方法を採用する。もちろん、これには正方形あるいは長方形メッシュ分割も含まれ、ここでは一般的な意味で多角形分割を考えている。

(4)式は任意の閉曲面について成立するので、図-2の斜線部分、断面が多角形で帯水層の厚さが m の領域で(4)式を考える。図-2の記号について説明する。 $L_{B,i}$: 領域Bと領域*i*の中心点間距離、 $J_{B,i}$: 線分 $L_{B,i}$ を垂直2等分する多角形の1辺、 $T_{B,i}$: 領域Bと領域*i*の間の平均透水量係数、 A_B : 領域Bの多

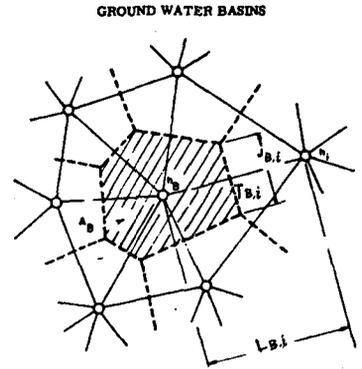


Fig.2 Polygonal Geometry¹⁾

角形の面積, h_B, h_i : 領域Bと領域*i*の各平均被圧水頭。領域Bと領域*i*の共有する面の面積は, $S_{B,i}$ ($= J_{B,i} \cdot m$)である。この面上における平均透水係数を $\bar{k}_{B,i}$ とすると, $T_{B,i} = \bar{k}_{B,i} \cdot m$ となる。

(4)式の右辺第1項は, 領域Bの各面の積分値を合計すればよい。上面と下面については, 垂直方向の流れを切り離して論じることから, その積分値を0とする。各領域の平均被圧水頭変化量 \bar{h}'_i で表わすと

$$\int (k \cdot \text{grad } h') \cdot dS = \sum_i k_{B,i} \cdot S_{B,i} \cdot \left[\frac{1}{S_{B,i}} \cdot \int (\text{grad } h') \cdot dS \right]_i = \sum_i T_{B,i} \cdot J_{B,i} \cdot \frac{1}{L_{B,i}} (\bar{h}'_i - \bar{h}'_B) \quad (5)$$

を得る。(5)の最後の式で, 水頭変化量の差にかかる係数をまとめて, $Y_{B,i} = T_{B,i} \cdot J_{B,i} / L_{B,i}$ とおく。また, (4)式の右辺第2項を領域Bの貯留係数 $S_B (= S_s \cdot m)$ をもちいて書きあらため, $(\bar{S}_s \cdot V_0)_B = S_B \cdot A_B$ とする。 $\Delta q = \Delta q_B$ として, (4)式を空間的に離散化したかたちで表わすとつぎのようになる。

$$\Delta q_B = \sum_i Y_{B,i} \cdot (\bar{h}'_i - \bar{h}'_B) - S_B \cdot A_B \cdot \frac{d}{dt} \bar{h}'_B \quad (6)$$

ここで, 粘弾性的な変形特性として考え方の基本となっている Voigt モデル (図-3) との関連について述べておく。Voigt モデルは, バネとダッシュポットが図-3に示されたように並列に結びつけられている。バネは弾性的性質を, ダッシュポットは粘性抵抗を表現している。バネにかかる応力を σ , ひずみを ϵ とすると, Voigt モデルの応力-ひずみ特性はつぎの式で表わされる。

$$\sigma = E \cdot \epsilon + \mu \cdot \frac{d\epsilon}{dt} \quad (7)$$

(E : 弾性係数, μ : 粘性係数)

いま, 離散化した各領域ごとに, 1個の Voigt モデルを想定し, しかも隣接した領域どうしがバネを共有し, その部分の応力がひずみの差によってきまるように, 有限個の Voigt モデルを並列に結合させる。このとき, 領域Bの Voigt モデルについてつぎの式が成立する。

$$\sigma_B = \sum_i E_{B,i} \cdot (\epsilon_B - \epsilon_i) + \mu_B \cdot \frac{d\epsilon_B}{dt} \quad (8)$$

ここに, σ_B : 領域Bの応力, ϵ_B, ϵ_i : 領域B, 領域*i*のひずみ, $E_{B,i}$: 領域B, *i*の共有するバネの弾性係数, μ_B : 領域Bの粘性係数。

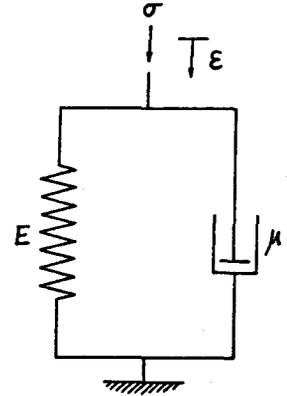


Fig. 3 Voigt Model

(6)式と(8)式を比較すれば, 両者が同じかたちをしていることがわかる。はじめに, 被圧帯水層における揚水量の増加と被圧水頭の変動を, 粘弾性体に加わる外力と変位の関係としてとらえると述べたが, (8)式にそくしていえば, バネを共有した有限個の Voigt モデルにかかる応力とひずみの関係として理解することができる。さらに, 水理定数と粘弾性定数の対応は, $Y_{B,i} \rightarrow E_{B,i}$, $S_B \cdot A_B \rightarrow \mu_B$ となる。

さて, 対象地域を*m*個の多角形領域に分割し, うち計算対象領域を*n*個とすると, 残り($m-n$)個は境界領域となる。計算領域($i=1 \sim n$)ごとに(6)式をつくり, 隣接領域が境界領域($i=n+1 \sim m$)のとき, その水頭変化の項を左辺に移す。こうして(6)式を, 各領域の水頭変化量を未知関数とする連立1次常微分方程式のかたちで表わすとつぎのようになる。

$$Y_{i,1} \cdot \bar{h}'_1 + Y_{i,2} \cdot \bar{h}'_2 + \dots + Y_{i,i-1} \cdot \bar{h}'_{i-1} + \left(-\sum_{j \neq i} Y_{i,j} - S_i \cdot A_i \cdot \frac{d}{dt} \right) \cdot \bar{h}'_i + Y_{i,i+1} \cdot \bar{h}'_{i+1} + \dots + Y_{i,n} \cdot \bar{h}'_n = \Delta q_i - \sum_{l=n+1}^m Y_{i,l} \cdot \bar{h}'_l \quad (9)$$

初期条件: $t' = 0$ のとき $\bar{h}'_i = 0$ ($i=1 \sim n$)

ここで, $\bar{q}_i = \Delta q_i - \sum Y_{i,l} \cdot \bar{h}'_l$ とおき, $\bar{q}_i = \text{const}$ として(9)式を解くと

$$\bar{h}'_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j}(t') \cdot \bar{q}_j \quad (10)$$

のかたちで解が得られる。

離散化の時間単位を Δt とし、図-4 に示すように離散化した各変数を定義する。

離散化した変数としての揚水量は、各期において一定である。 $t = t^k$ における i 領域のかん養量を Re_i^k ($i = 1 \sim n$)、 $k+1$ 期の境界領域の水頭変化を Δh_l^{k+1} ($l = n+1 \sim m$) とする。 Δh_l^{k+1} は、揚水量と同様既知量であり、 $Y_{i,l} \cdot \Delta h_l^{k+1}$ は、領域 l に隣接する領域 i の $k+1$ 期の揚水量を補正する量と考えることができる。ここで $k+1$ 期の i 領域の揚水量増加分 $\Delta \bar{Q}_i^{k+1}$ をつぎのように定義する。

$$\Delta \bar{Q}_i^{k+1} = Q_i^{k+1} - Re_i^k - \sum_{l=n+1}^m Y_{i,l} \cdot \Delta h_l^{k+1} \quad (11)$$

$t = t^k$ のとき被圧水頭 h_i^k が既知であるとき、 Re_i^k は(5)式から計算できるが、ここで被圧水頭をかん養量に変換するマトリクス $R = (r_{i,j})$ を定義する。

$$Re_i^k = \sum_{j=1}^m r_{i,j} \cdot h_j^k \quad (12)$$

ただし、 $r_{i,i} = -\sum_{j \neq i} Y_{i,j}$ 、 $r_{i,j} = Y_{i,j}$

さて、 Re_i^k がわかれば、(11)式から $k+1$ 期の揚水量増加分が各領域ごとに計算できる。この $\Delta \bar{Q}_j^{k+1}$ ($j = 1 \sim n$) から、 $k+1$ 期の水頭変化量 Δh_i^{k+1} を求める。

(11)式の揚水量増加分の定義から、 Δh_i^{k+1} は、(10)式において、 $\bar{q}_j = \Delta \bar{Q}_j^{k+1}$ 、 $t' = \Delta t$ とし、 $\bar{\alpha}_{i,j}(\Delta t) = \alpha_{i,j}$ とおくことによりつぎのように求まる。

$$\Delta h_i^{k+1} = \sum_{j=1}^n \alpha_{i,j} \cdot \Delta \bar{Q}_j^{k+1} \quad (13)$$

(13)式の $\alpha_{i,j}$ ($i, j = 1 \sim n$) は、 j 領域の単位揚水量増加分による i 領域の被圧水頭変化量に等しい。この $\alpha_{i,j}$ を要素とするマトリクス α は、揚水量増加分を水頭変化量に変換するマトリクスであり、外力を変位に変えるものとして対象地域の粘弾性的性質を表現していると考えられる。

$\Delta \bar{Q}_i^{k+1}$ は、境界水頭による補正もあるが、 $k+1$ 期の揚水量 Q_i^{k+1} と k 期の Q_i^k との差 ΔQ_i^{k+1} ではなく、 $t = t^k$ のときのかん養量 Re_i^k との差で決まる。この $\Delta \bar{Q}_i^{k+1}$ は、 $k+1$ 期における実質的な揚水量の増加を意味している。境界水頭が一定であれば、 $\Delta \bar{Q}_i^{k+1}$ を ΔQ_i^{k+1} によってつぎのように表わすことができる。

$$\Delta \bar{Q}_i^{k+1} = \Delta Q_i^{k+1} + \sum_{j=1}^n \beta_{i,j} \cdot \Delta \bar{Q}_j^k \quad (14)$$

$$\beta = E - R \cdot \alpha, \quad \beta = (\beta_{i,j}) \quad (15)$$

(14)式は、 $k+1$ 期の揚水量増加分が、 k 期と $k+1$ 期の揚水量の差だけで決まらず、 k 期の揚水量増加分の影響を受けることを意味しており、マトリクス β は、外力と変位という関係からみれば、対象地域における粘性の効果を表わしていると考えられる。粘性がないとき、 $\beta_{i,j} = 0$ 、 $\Delta \bar{Q}_i^{k+1} = \Delta Q_i^{k+1}$ である。

α 、 β マトリクスは、対象領域の帯水層定数である透水量係数、貯留係数から計算することができる。境界水頭が変化するとき、(14)式の右辺は $-\sum_{l=n+1}^m Y_{i,l} \cdot \Delta h_l$ の補正を必要とするが、 α と β が決まれば、(14)式から揚水量増加分が、(13)式から水頭変化量が求まり、 $h_i^{k+1} = h_i^k + \Delta h_i^{k+1}$ の式をつかって、各期の被圧水頭を初期値から順次求めることができる。

また、 α 、 β マトリクスが、対象地域の被圧帯水層としての地域的特性を表現している点を強調しておきたい。地域的特性は粘弾性的特性として理解することができる。

最後に、垂直かん養の問題について述べておく。被圧帯水層の上層から下層へ、あるいは不圧帯水層から被圧帯水層への垂直方向の地下水流動については、いまだその機構が充分に明らかではなく、垂直かん養の

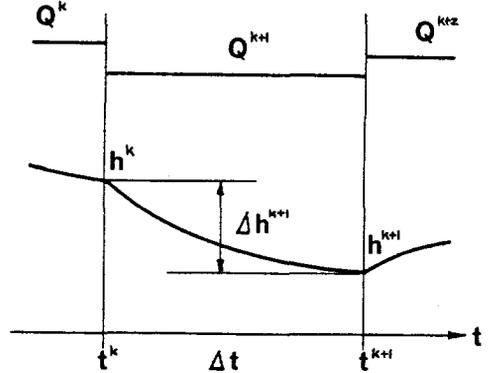


Fig. 4 Definition

メカニズムをモデルに組み込む段階には達していないように思われる。水頭差に比例して垂直方向の流動量を考える場合、各計算対象領域の上層の帯水層を境界領域としてあつかえばよいが、むしろ対象としている被圧帯水層とは切り離して水収支計算を行ない、そこで得られた垂直かん養量によって(11)式の揚水量増加分を補正する方法が正当であると思われる。

3. 粘弾性モデルによる計算例

粘弾性モデルによって被圧水頭を計算し、実測水位との比較を行なう。表層を沖積粘土層でおおわれており、垂直かん養量をほとんど無視できる東京下町低地を計算対象地域とした。

3.1 対象地域について

図-5に計算の対象とする地域を示した。東京の足立、葛飾、北、荒川、台東、文京、江戸川、墨田、江東の9区と、埼玉県南部の草加、八潮、三郷の3市、千葉県西部の市川市、浦安町を含む、東西20km、南北25kmの地域である。水文地質的には、表層を難透水層の有楽町層によっておおわれ、その下位に砂層、砂礫層を主体とした良好な被圧帯水層である東京層群の各層が分布している。⁵⁾

東京都土木技術研究所では、図-5に配置を示した地盤沈下観測井によって、被圧地下水位の観測を続けている。この被圧水頭の計算では、新足立観測井と新江戸第2観測井の2本(図中◎印)の観測井の実測水位とモデルによる計算水位を比較する。

被圧地下水位の解析では正確な揚水量のデータが必要とされる。東京都では、昭和46年から東京都公害防止条例によって井戸所有者が水量測定器を設置することが義務づけられており、それをもとに揚水量の集計が行なわれている。

3.2 計算の方法

粘弾性モデルによる計算の流れ図を図-6に示した。

揚水量が行政区ごとに集計されているため、つぎのような手順で行政区の α 、 β マトリクス値を求めた。

対象地域を、図-5に示すように、観測井を中心に面積20km²の正方形領域に分割する。観測井の位置する領域を領域1とする。全領域一定の貯留係数S、透水量係数Tを与え、各領域の $\alpha_{1,j}$ 、 $\beta_{1,j}$ を計算する。面積による重みつき平均によって、各行政区のALPHA(J)、BETA(J)を算出する。

観測井の位置する領域1の被圧水頭 h_1 を各行政区の揚水量から計算し、観測井による実測水位 h_0 と比較する。

被圧水頭の計算は、月単位とし、昭和47年3月から51年3月までとした。計算対象期間は、揚水量の推移、地下水位の変化を考慮してきめた。

揚水量のデータは、東京都公害局の報告書その他によった。^{6), 7)}

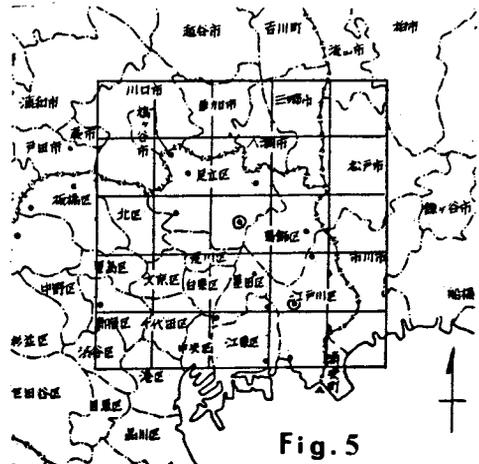
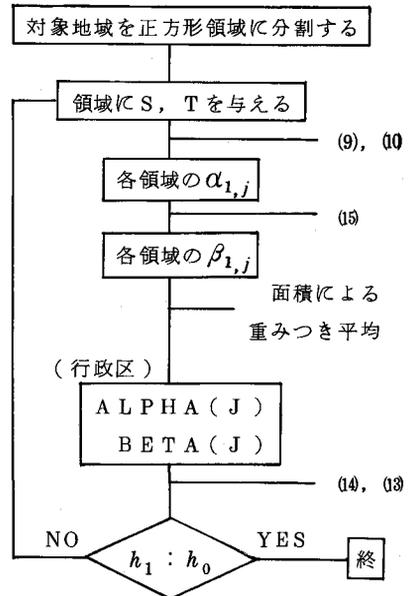


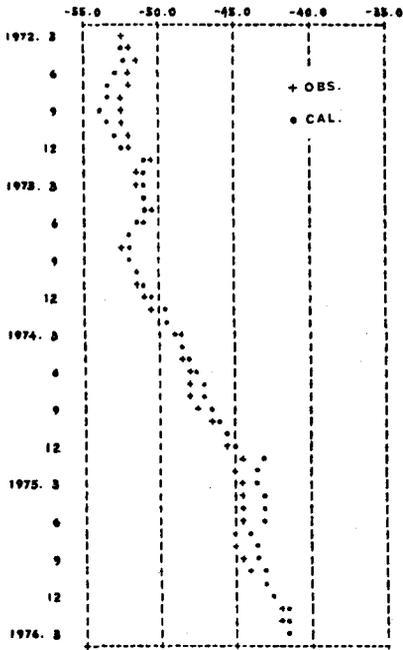
Fig. 5



()内は式の番号である。

Fig. 6 Flow Chart

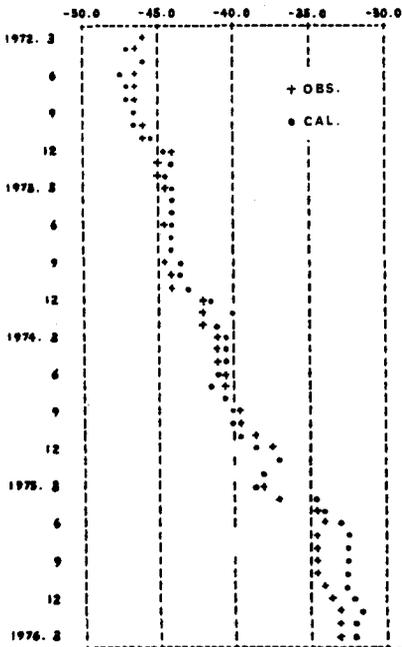
SHIN-ADACHI



CHIKU	ALPHA	BETA
1 ADACHI	-0.00032	0.109
2 KITA	-0.00002	0.008
3 ARAKAWA	-0.00005	0.021
4 BUNKYD	-0.00001	0.012
5 TAITO	-0.00002	0.014
6 SUMIDA	-0.00004	0.022
7 KATUSIKA	-0.00016	0.064
8 SOKA	-0.00001	0.006
9 YASIO	-0.00003	0.020
10 MISATO	-0.00001	0.006
S = 0.0008		T = 850.000 MM/DAY

Fig.7 a Results of Calculation

SHIN-EDO-2



CHIKU	ALPHA	BETA
1 EDOGAWA	-0.00034	0.069
2 URAYASU	-0.00002	0.009
3 ICHIKAWA	-0.00007	0.028
4 KATUSIKA	-0.00009	0.030
5 ADACHI	-0.00000	0.002
6 ARAKAWA	-0.00001	0.004
7 SUMIDA	-0.00005	0.015
8 TAITO	-0.00001	0.008
9 KOTO	-0.00012	0.033
S = 0.0007		T = 950.000 MM/DAY

Fig.7 b Results of Calculation

実測水位は、昭和47年3月末日の平均水位を初期値とし、以降も月末日平均水位をもちいた。観測井はつきに示すとおりである。

新足立観測井	足立区中央本町一丁目	昭和43年3月設置	ストレナー深度	224~234 m
新江戸第2観測井	江戸川区松島二丁目	昭和38年12月設置	ストレナー深度	129~150 m

3.3 計算結果と考察

図-7に計算結果を示した。全体的に計算水位は実測水位の変動をよく再現している。同定にあたっては、SとTを全領域一定とし、対象領域の外側、境界領域の水位を一定としている。より細かな同定も可能であるが、粘弾性モデルの妥当性の検証という見地から、充分満足できる結果と思われる。

固定した帯水層パラメータの値、各行政区の α 、 β の値を図-7の右に示した。貯留係数と透水量係数は、両観測井とも、被圧帯水層における帯水層定数の値として納得できるものである。 α の値は、各行政区の揚水量増加が観測井の水位変化に与える影響を表わしている。例えば、図-7(a)では、足立区の α の値が -3.2×10^{-4} となっているが、この値は、同区において月に $1,000 \text{ m}^3$ /日の揚水量の実質的な増加があったとき、新足立観測井の水位が 0.3 m 前後低下することを意味している。また、 1.09×10^{-1} という β の値から、揚水量増加分のうち約1割が平衡に達しない量として残ることがわかる。

4. 結 語

本研究では、被圧地下水位解析のための粘弾性モデルについて、まず定式化し、さらに被圧地下水位の計算を行ないモデルの妥当性を検証した。粘弾性モデルは、地下水位シミュレーションモデルとして適用することができる。このモデルの特長は、揚水量の変化と被圧水頭の変動を結びつけるメカニズムが明確なことである。また α と β マトリクス要素さえわかれば、揚水量の増加量から手計算で水位変化量を推算できる簡便さも備えている。モデルの明確さは、計算結果が必要な精度を満たさないとき、その原因を究明するのに有利である。粘弾性モデルは、加圧層収縮などを含めた被圧帯水層内の詳細な流動の解明には適さないが、地下水利用計画など実用的な精度のもとでは充分に有効な被圧地下水位解析モデルである。

謝 辞

本研究を進めるにあたり、東京都土木技術研究所石井求地象部長、遠藤毅副参事研究員および地盤沈下研究室の方々の多大な御援助をいただいた。記して深甚なる謝意を表します。なお、本研究は、著者が東京都の受託研究員として東京大学土木工学科高橋裕教授のもとに在籍中とりまとめたものであることを付記する。

参考文献

- 1) Tyson, H. N. & Weber, E. M. (1964): Ground water management for the nation's future, Computer Simulation of ground-water basins, Proc. ASCE., HY. 4
- 2) Bathala, C. T., A. R. Rao, and J. A. Spooner (1980): Linear system models for regional aquifer evaluation studies, Water Resou. Res., Vol 16, No. 2
- 3) Flugge, W. (1967): Viscoelasticity, Blaisdell Publishing Company, A Division of Ginn and Company. [堀 訳] 培風館
- 4) Jacob, G. E. (1950): Flow of ground water, Engineering Hydraulics, chap. 5, John Wiley & Sons
- 5) 遠藤 毅, 川島真一, 川合将文(1978): 武蔵野台地および下町低地の地下に分布する帯水層の形態について, 昭和52. 都土木技研年報, 377-391
- 6) 東京都公害局: 地下水揚水実態調査報告書, 昭47-昭51
- 7) 関東地方公害対策推進本部地盤沈下部会: 地下水揚水量調査報告書, 昭和54年3月