

移流分散における粘性底層の効果に関する数値計算による検討
Effects of Viscous Sublayer on Convective Dispersion by Numerical Study

九州大学工学部 正員○舂井 和 朗
九州大学工学部 正員 神野 健 二
九州大学工学部 正員 上田 年比古

1. はじめに

河川や沿岸海域における放流物質の移流分散過程は、水域の保全対策上重要な問題として数多く研究されている。しかし、たとえば底面からの溶解物質の拡散等において重要と考えられる粘性底層内の乱れの特徴を考慮した移流分散過程の解析はあまり行われていないようである。本報ではまず、上下2層で拡散係数を変えた2層モデルについての移流分散現象を解析解と粒子移動法による数値解とにより求めてその現象を検討するとともに、粒子移動法の有用性をのべ、次にせん断乱流場について、①上流から全水深にわたり拡散物質が瞬間的に流入した場合および、②底面に一様濃度の拡散物質が存在し、これが溶出する場合の移流分散現象を粒子移動法により求め、この現象に及ぼす粘性底層の効果を検討したものである。

2. 2層モデルにおける移流分散

移流分散における粘性底層の効果を検討するために、P.C.Chatwin¹⁾の2層モデルを用い、粒子移動法による数値解の精度および移流分散過程の特性について検討を加える。

2.1 2層モデルの解析解¹⁾

直線流速分布をもつせん断流を上下2層に分け、下層の水深および拡散係数が上層のそれらより小さいとした P.C.Chatwinの2層モデルを図-1に示す。hを全水深、 K_1, K_2 を拡散係数(各層一定、 $K_1 < K_2$)、添字1, 2をそれぞれ下層および上層を示すものとする。流速分布を断面平均流速 $\bar{u}$ で移動する座標系における直線分布式

$$u(y) = \bar{u}(2y/h - 1) \tag{1}$$

とし、移流分散方程式を

$$\frac{\partial C}{\partial t} + u(y) \frac{\partial C}{\partial x} = K_i \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \quad \begin{cases} i=1; 0 < y < h_1 \\ i=2; h_1 < y < h \end{cases} \tag{2}$$

とする。ここに $C=C(x, y, t)$;濃度分布、 x ;流れ方向、 y ;壁から鉛直上向き方向、 t ;時間である。流れの場の最終的な移流分散係数 D_0 は、次の式(3)に式(1)を代入し積分を行えば式(4)をうる。

$$D_0 = (1/h) \int_0^{h_1} dy/K_1 \{ \int_0^y u(y') dy' \}^2 + (1/h) \int_{h_1}^h dy/K_2 \{ \int_0^y u(y') dy' \}^2 \tag{3}$$

$$D_0 = (\bar{u}^2 h^2 / 30 K_1) \{ 10(h_1/h)^3 - 15(h_1/h)^4 + 6(h_1/h)^5 \} + (\bar{u}^2 h^2 / 30 K_2) \{ 10(h_2/h)^3 - 15(h_2/h)^4 + 6(h_2/h)^5 \} \tag{4}$$

式(4)の右辺の第1項は最終的な移流分散係数に及ぼす下層の寄与であり、第2項は上層の寄与である。移流分散方程式(2)より解析的に求められる移流分散係数 $D(t)$ は、初期濃度分布を $C(x, y, 0) = \delta(x)/h$

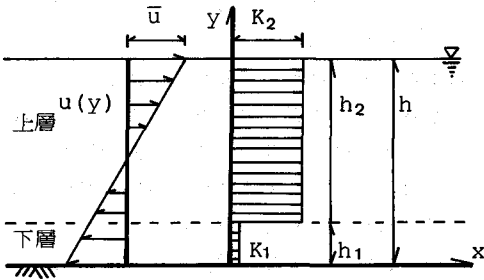


図-1 2層モデル

とすれば

$$D(t) = D_0 - (8\bar{u}^2 h_1^6 / K_1^3 h^3) \sum_{m=1}^{\infty} \{K_2 (\sec \epsilon \alpha_m - 1) - K_1 (\sec \alpha_m - 1)\}^2 \times \exp(-\alpha_m^2 K_1 t / h_1^2) / \alpha_m^6 (h_2 \sec^2 \epsilon \alpha_m + h_1 \sec^2 \alpha_m) \quad (5)$$

ここに、 $\delta(x)$;デルタ関数、 $\epsilon = \sqrt{T_2/T_1}$ 、 $T_1 = h_1^2/K_1$;下層混合時間、 $T_2 = h_2^2/K_2$;上層混合時間であり、 α_m は次の式(6)の第m番目の根である。

$$\sqrt{K_2} \sin \epsilon \alpha \cos \alpha + \sqrt{K_1} \cos \epsilon \alpha \sin \alpha = 0 \quad (6)$$

ここでは α_m の値は、Newton-Raphson法を用いて求めた。

次に、下層を考慮しない単層の場合、 $h_1 = h$, $K_1 = K$ とおけば、式(6)より $\alpha_m = m\pi$ となり、 D_0 と $D(t)$ は次式ようになる

$$D_0 = \bar{u}^2 h^2 / 30K \quad (7)$$

$$D(t) = D_0 - (32\bar{u}^2 h^2 / K \pi^6) \sum_{m=1}^{\infty} \exp\{-(2m-1)^2 \pi^2 K t / h^2\} / (2m-1)^6 \quad (8)$$

2. 2 層モデルの数値計算

流速が水深方向に変化している流れの場の2次元移流分散方程式の差分近似計算では、移流項で発生する離散化誤差が差分解の精度上重要な問題である。またN. Yotsukura²⁾が指摘しているように、移流分散係数は流速分布に強く依存するので、数値計算においても流速分布を正確にとらえることが必要である。そこで、移流分散方程式(2)を速度 $u(y)$ の特性曲線上での濃度変化を示す次式

$$dC/dt = K_i \partial^2 C / \partial y^2 \quad (i=1, 2) \quad (9)$$

に変形して、移流項をみかけ上消去した式(9)について数値計算を行う粒子移動法³⁾、計算で利用する濃度を与えた流体粒子を水深方向に密に配置することにより、仮定した流速分布をかなり正確に再現できるので、せん断乱流中での拡散過程を精度よく数値計算する上で有効であると考えられる。

数値計算では、まず予め全領域に配置されたある濃度をもつ流体粒子をその位置の流速 $u(y)$ で移動させ、次に、これらの粒子濃度より算定される格子点濃度を用いて式(9)の右辺の拡散項の差分計算を行い、これによる濃度増分を2次補間により、その格子点の近傍の各粒子に与えていき、この計算手順をくり返していくものである。(粒子移動法の詳細な数値計算アルゴリズムについては、文献3)を参照。)数値計算は、表-1に示すRun1~3の条件のもとで行った。また断面平均流速 $\bar{u} = 3.0$ cm/sec, 差分格子間隔 $\Delta x = \Delta y = 1.0$ cm, 差分時間間隔 $\Delta t = 0.12$ secである。境界条件として $y=0$ および $y=h$ において

$$K_i \partial C / \partial y = 0 \quad (i=1, 2) \quad (10)$$

を用いた。尚、移流分散係数 $D(t)$ の計算は、まず数値計算の結果求まる濃度 $C(x, y, t)$ の各時刻における断面平均濃度 $\bar{C}(x, t)$ の分散を次のように求め、

$$\sigma_x^2(t) = \sum \bar{C}(x, t) (x - \bar{x})^2 \Delta x / \sum \bar{C}(x, t) \Delta x \quad (11)$$

これより、

$$D(t) = \Delta \sigma_x^2 / 2 \Delta t \quad (12)$$

ここに、 $\bar{x}$ は断面平均濃度の重心の位置である。

2. 3 結果

図-2に、表-1の条件下での2層モデルの移流分散係数 $D(t)$ に対する解析解と数値解を示す。まず、解析

表-1 計算条件

Run	水深(cm)		拡散係数(cm ² /sec)		混合時間(sec)	
	h_1	h_2	K_1	K_2	T_1	T_2
1	3.0	7.0	0.1	2.0	90.0	24.5
2	2.0	8.0	0.1	2.0	40.0	32.0
3	$h = 10.0$		$K = 2.0$		$T = 50.0$	

解と数値解とを比較するとほぼよい一致を示しており、粒子移動法が移流分散係数の推定に有効であることがわかる。尚、他にexplicit差分スキームとの比較を行ったが、解が発散してえられなかった⁴⁾。

式(4),(7)よりRun 1, 2および3に対する最終的な移流分散係数値 D_0 は、 cm^2/sec 単位で、それぞれ64.48(下層の寄与48.92), 31.51(下層の寄与17.38) および15.00であり、下層厚の増加にともない D_0 は増加している。また式(5),(8)よりえられる $D(t)$ に対しても図-2のように同様の結果がえられている。このことは次のように説明される。

小さい拡散係数をもつ下層の厚さの増加にともなって、下層内の拡散物質は拡散するのにより多くの時間を必要とする。たとえば、表-1に示すように、下層および上層の混合時間 T_1 および T_2 は、 $T_1 > T_2$ の関係にある。ところで、図-3に示される最終状態になる以前の途中の分散過程の濃度分布および断面平均濃度分布によれば、下層の存在しない単層モデルのRun 3では、拡散物質は一様に分散されるのに対して、小さい拡散係数をもつ下層の存在するRun 1では、上流部に小さな濃度塊をもつ分布となっている。この濃度塊の存在のため式(11)により計算される断面平均濃度の分散が増加し、移流分散係数が増加するものと考えられる。

3. せん断乱流場における移流分散

3.1 上流端から拡散物質が瞬間流入する場合

2層モデルの移流分散係数の解析により、小さい拡散係数の下層が存在すると移流分散係数が増加することが明らかになった。一般のせん断乱流場の移流分散係数の推定にあたっては、流速が遅く拡散係数の小さい粘性底層の存在を考慮する必要があると考えられ、以下これについて検討しよう。

(a) 数値計算

ここでは、断面2次元せん断乱流場において、上流端から全水深にわたり一様濃度の拡散物質が瞬間的に流入した場合の非定常状態の移流分散現象を算定する。用いたせん断乱流場を表-2に示す。すなわち、Run 4, 5は粘性底層(厚さ θ)を考え、その内部の拡散係数をそれぞれ分子拡散および y^* 型としたもので、Run 6はとくに粘性底層を考慮しない場合をとった。表-2の各モデルに対して次の移流分散方程式

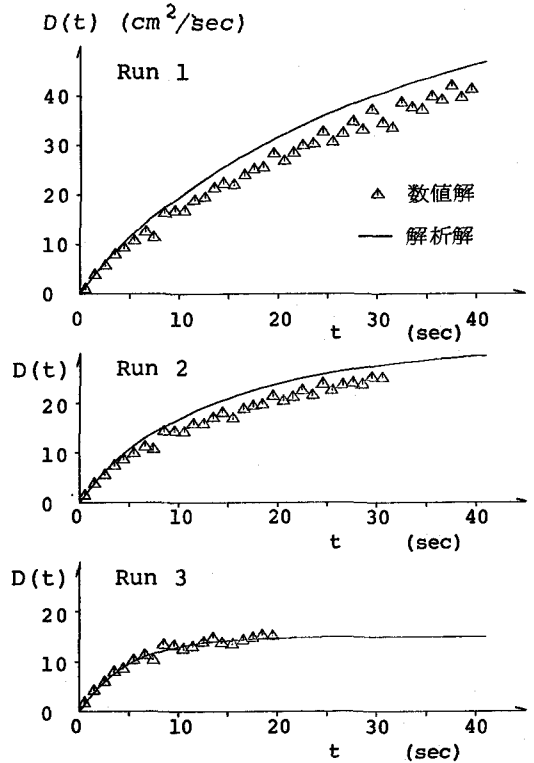


図-2 移流分散係数

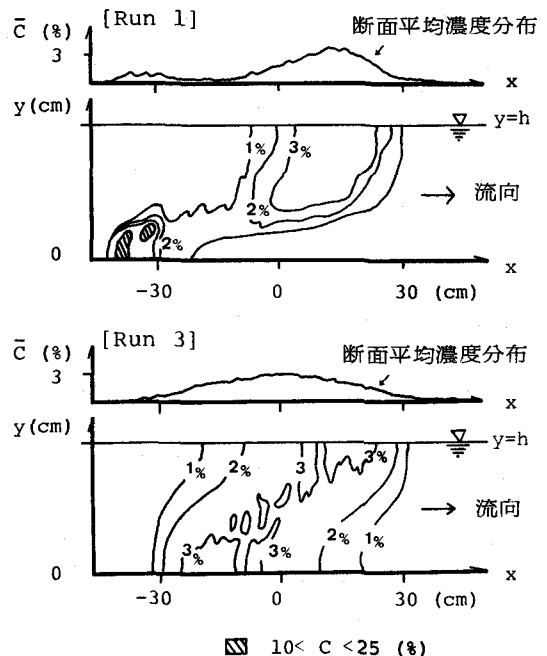


図-3 濃度分布図

表-2 計算に用いた拡散係数と流速分布

Run	拡散係数		流速分布	
	$0 < y < \theta$	$\theta < y < h$	$0 < y < \theta$	$\theta < y < h$
4	分子拡散 (式14)	放物型 (式16)	直線型 (式17)	対数型 (式18)
5	y^* 型 (式15)	放物型 (式16)	直線型 (式17)	対数型 (式18)
6	放物型 (式16)		対数型 (式18)	

$$dC/dt = \partial C / \partial t + u \partial C / \partial x = K_x \partial^2 C / \partial x^2 + \partial / \partial y (K_y \partial C / \partial y) \quad (13)$$

を粒子移動法により数値計算し、各モデルにおける拡散係数および流速分布の相違が、断面平均濃度の分散に及ぼす効果について検討した。なお、表-2で用いた拡散係数および流速分布の諸式は次のようである。

$$\text{拡散係数} \quad \left[\begin{array}{l} \text{分子拡散} \\ y^* \text{型} \\ \text{放物型} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} K_\theta = 1.0 \times 10^{-5} \\ K_\theta = r u_* y^* / \theta^3 \\ K_x = K_y = \alpha u_* (h - y) y / h \end{array} \right. \quad (14) \quad (15) \quad (16)$$

$$\text{流速分布} \quad \left[\begin{array}{l} \text{直線型} \\ \text{対数型} \end{array} \right. \quad \left[\begin{array}{l} u(y) / u_* = y / \nu \\ \{u(y) - \bar{u}\} / u_* = 1/\alpha + 1/\alpha \ln(y/h) \end{array} \right. \quad (17) \quad (18)$$

ここに、 u_* ；摩擦速度、 α ；カルマン定数 (0.41)、 h ；全水深、 ν ；動粘性係数、および $r = \alpha (1 - \theta/h)$ の定数である。

数値計算では、鉛直方向の差分間隔 Δy を、 $0 < y < 1.0$ において 0.2cm、 $1.0 < y < h$ において 1.0cm、全水深 $h = 10.0$ cm、 $\bar{u} = 5.0$ cm/sec、 $\theta = 0.62$ cm、 $\Delta t = 0.1$ sec とし、初期濃度にはパルス型分布を与え、境界条件は式(10)とした。

(b) 結果

図-4に、各モデルに対する式(11)による分散 $\sigma_x^2(t)$ を示している。Run6の分散は、Run4、5の分散に比べ小さい値を示し、またRun4はRun5よりわずかに大きい値を示している。また、式(12)より図-4の分散の時間変化の割合は、移流分散係数に対応するもので、図-4から移流分散係数は、Run6が最も小さく、Run4はRun5よりわずかに大きいといえる。いまこの相違を考えると、まず、粘性底層内に直線流速分布を用いた場合 (Run4, 5) では、粘性底層内において上層の対数流速分布を延長した流速 (Run6) よりも遅いので、Run6と比較して、流れ方向への濃度雲のひきのばしがより大きくなり、さらに小さい拡散係数のため図-3で示すような上流部の濃度塊の存在のため、分散および移流分散係数が大きくなったものと考えられる。またRun4とRun5との相違は、粘性底層内の拡散係数がRun4では分子拡散係数を考え、Run5では乱れが徐々に壁に向かって減衰するという仮定にもとづくV.G. Levich⁵¹の y^* 型の拡散係数を与えていて、この残存する乱れのためRun4よりやや拡散しやすくなっているためと考えられる。

すなわち、せん断乱流場において、流速が遅く拡散係数の小さい粘性底層の存在は、拡散物質を保有する効果を持ち、この粘性底層を考慮しないと移流分散係数は小さく算

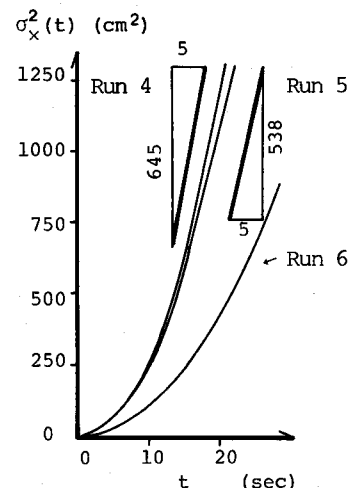


図-4 濃度の分散

定され、また粘性底層を考慮した場合でも、その底層の拡散係数を小さくすると移流分散係数は大きくなるといえる。

3. 2 底面の一様濃度の拡散物質が溶出する場合

図-5のように底面に、 $x < 0$ で $C = 0$ 、 $x \geq 0$ で $C = C_0$ (一定) の濃度をもつ拡散物質があり、これがせん断乱流場で溶出する場合の定常に達した後の濃度分布を粘性底層の有無にたいして、算定しよう。図-5で、 d は底面からの拡散物質の移流分散

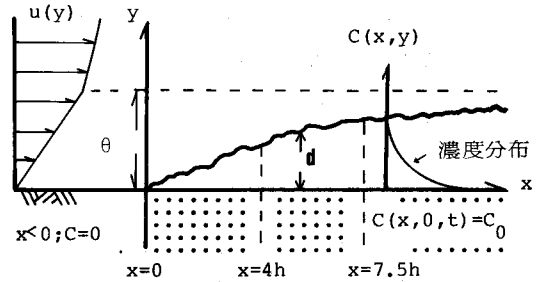


図-5 底面からの溶出移流分散図

の範囲 (濃度境界層の厚さ) を示し、 θ は粘性底層の厚さである。いま移流分散方程式 (13) を粒子移動法により数値計算し、底面からの溶解物質拡散に対する濃度分布の数値解を求める。

数値計算は、表-2のRun5およびRun6の拡散係数および流速分布の仮定のもとで行う。計算は、 $x = 1.5h$, $y = 0.37h$ (h : 水深) の長方形領域について行い、境界条件は、 $C(x, 0, t) = C_0$, $C(0, y, t) = 0$, $C(x, 0.37h, t) = 0$, および下流端で $\left[\frac{\partial C}{\partial x} \right]_{x=15h} = 0$ を与えた。粘性底層内の差分格子の間隔は、底面に近接する第一番目の格子点での拡散係数の値が式 (15) で計算して分子拡散係数である 10^{-5} 程度になる高さを選び、ここでは $\Delta y = h/100$ とした。なお、式 (15) より、その点で $K_\theta = 0.00005$ (cm/sec) となった。粘性底層外の上層では $\Delta y = h/20$, 差分時間間隔 $\Delta t = 0.09$ sec とした。

図-6に鉛直方向の濃度分布に時間的変化のみられなくなった475 time step後の $x = 4h$ および $x = 7.5h$ の濃度分布を示す。Run8 (Run6の拡散係数、流速分布を与えた場合) の粘性底層をとくに考慮しなかった場合は、濃度境界層の厚さ d は、Run7 (Run5の拡散係数、流速分布を与えた場合) と比較して約10倍程度にも増加している。このように粘性底層の存在を考慮しないと濃度境界層の厚さ d を過大に算定する結果となるといえる。

4. おわりに

本報で得た結果を要約すると、数値計算手法である粒子移動法に関しては、粒子移動法で用いる移流分散方程式では、みかけ上移流項がなく、このため移流項の離散化誤差が防げること、および計算に利用する、濃度を与えた流体粒子を水深方向に密に配置すれば、仮定した流速分布をかなり正確に再現することから、流速分布に強く依存する移流分散過程および移流分散係数を精度よく推定できると考えられる。次に、せん断乱流場の移流分散における粘性底層の効果に関しては、①流速が遅く拡散係数の小さい粘性底層は、拡散物質の保有効果を持ち、粘性底層のこの特性を考慮すれば、断面平均濃度分布の分散が増加し、結果的に移流分散係数を増加させる。②底面からの溶解物質拡散における定常濃度分布は、粘性底層を考慮しない場合には、濃度境界層の厚さが過大に算定される。

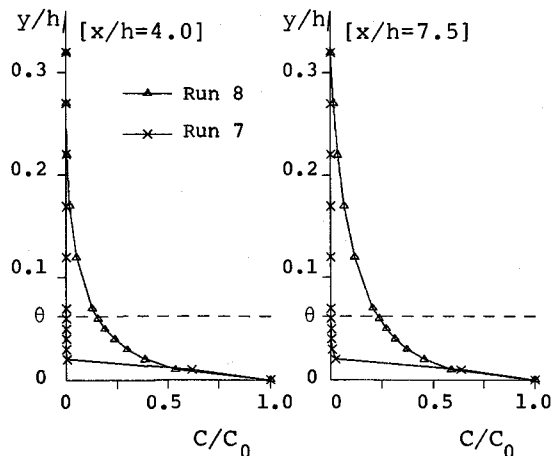


図-6 垂直濃度分布

本研究の一部は、文部省科学研究費〔試験研究(2)課題番号585155;研究代表者 椿 東一郎〕の援助を受けたことを記し、謝意を表する。

参考文献

- 1) Chatwin,P.C. : a Calculation Illustrating Effects of the Viscous Sublayer on Longitudinal Dispersion,Q.J.Appl.Math.,Vol.26,Pt.4,1973,pp.427~439.
- 2) Yotsukura,N. & Fiering,M.B. : Numerical Solution to a Dispersion Equation,ASCE,Vol.90,HY.5, 1964,pp.4046~4054.
- 3) 神野健二・上田年比古 : 粒子の移動による移流分散方程式の数値解法の検討,土木学会論文集, 第271号,1978,pp.45~53.
- 4) Momii,K. & Jinno,K. : Numerical Calculation of a Convective-Dispersion Equation in Shear Flow by Method of Shifting Particles,Memoirs of the Faculty of Engineering,Kyushu Univ., Vol.43,No.1,1983 (to be published)
- 5) Levich,V.G. : Physicochemical Hydrodynamics,Prentice-Hall,1962,pp.144~145.