

2方程式乱流モデルによる噴流の数値シミュレーション

Numerical Simulation of Two-Equation Model
of Turbulence for a Vertical Jet

名古屋大学プラズマ研究所 正員 武本 行正

名古屋大学プラズマ研究所 阿部 芳彦

明石工業高等専門学校 正員 西村 益夫

Y. Takemoto and Y. Abe, Institute of Plasma Physics

M. Nishimura, Akashi Technological College

1. 緒言

重力場における、鉛直に自由表面に向かって上昇する一定密度下の温度変化のない噴流の研究は、温排水拡散・温水噴流・表面密度噴流などの予測モデルの基礎をなすものとして重要である。ここでは、3次元の乱流噴流の数値シミュレーションモデルによる解析例を述べる。

承知のように、現在提案されている乱流の計算モデルは、積分法および微分法(場の方法)での平均流速場法・平均乱流場法・平均応力場法、それに格子平均モデル(LES, SGM)などである。これらのモデルの中から普遍性・信頼性・経済性(計算量の少なさ)等の面ですぐれている平均乱流場法の中の2方程式モデルを採用した。このモデルは予測精度の良好さならびに適用範囲の広さから判断して十分実用的であると考えられており、格子平均モデル(Deardorffモデルの例が日野らによりなされている¹⁾)とともに、主に空気流の計算に適用されて良い結果が得られている。一般に2方程式モデルは乱れの速度スケール q と長さスケール l の輸送方程式をたてて、渦動粘性係数 ν_t を通して平均流の運動方程式と結びつけるものであり、 $q^2/2 = k$ (乱流エネルギー)において、 $k-l$, $k-w$ ($w \approx \rho\sqrt{k}/l$), $k-k_l$, $k-\epsilon$ ($\epsilon \approx k\sqrt{k}/l$)等のモデルが今迄に提唱されている。ここではLaunder, Spalding, McQuirk, Rodiら Imperial Collegeのグループの提唱する標準的な2方程式 $k-\epsilon$ 乱流モデル²⁾を採用し、自由表面をもつ流れ場の解析可能なMAC(Marker and Cell)法³⁾と連立させて乱流場を計算する。

2. 3次元乱流モデルの基礎方程式系

流れ場の各点における流速値・圧力値について

$$u_i = U_i + u'_i, \quad p = P + p'$$

と平均値と変動値とに分割して、平均操作を施せば($\overline{u'_i} = 0$, $\overline{p'} = 0$)つぎの平均流についての連続式と運動方程式を得る。(基礎となるNavier-Stokes運動方程式は略した。)

$$\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0 \quad \text{----- (1)}$$

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = \frac{\partial P}{\partial x_i} - \frac{\partial \overline{u'_i u'_j}}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\nu \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \nu \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) + g_i \quad \text{----- (2)}$$

ここにspace vector $x_i = \{x, y, z\}$, velocity vector $u_i = \{u, v, w\}$ 。Pは圧力密度比、 ν は動粘性係数、外力vector $g_i = \{g_x, g_y, g_z\}$ より g_z は重力加速度の鉛直方向成分である。

(1)(2)式の系は、Reynolds応力テンソンに関する別の関係を導入しないと、閉じた方程式系とはならないので、等方な渦動粘性係数 ν_t を用いて以下の近似をなす。

$$-\overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} k \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} \text{はクロネッカのデルタ}) \quad \text{----- (3)}$$

(3)式を(2)式へ代入すれば、Reynolds方程式として次の式を得る。

$$\frac{\partial U_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (U_i U_j) = - \frac{\partial \hat{P}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[(\nu + \nu_t) \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_i \quad \text{----- (4)}$$

$$\text{ここで } \hat{P} = P + \frac{2}{3} k, \quad k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} \quad (\text{乱流エネルギー})$$

一方、渦動粘性係数 ν_t については、その評価の方法はいろいろのモデルが考察されているが、十分発達した乱流場では Prandtl の混合距離方式の仮定によって

$$\nu_t \approx \sqrt{k} l$$

と表現される。これに長さスケール $l \approx k \sqrt{k} / \varepsilon$ の関係を代入すれば、 $k-\varepsilon$ モデルでは

$$\nu_t = C_\mu k^2 \varepsilon^{-1} \quad \text{----- (5)}$$

ここに C_μ は定数値、 ε はエネルギー散逸率

の定式化とすれば都合がよい。

3. 乱流量の輸送方程式

Navier-Stokes 運動方程式から (2) 式の平均流の運動方程式を辺々ひけば、 $\partial^2 / \partial x_j \partial x_j$ をラプラシアン⁴⁾として

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t} + U_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial U_i}{\partial x_j} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x_j} = - \frac{\partial p'}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x_j \partial x_j} + \overline{\frac{\partial u'_i u'_j}{\partial x_j}} \quad \text{----- (6)}$$

となる。上式に u'_i をかけ、時間平均操作を施し、 $\frac{1}{2} \partial (\overline{u'_i u'_i}) / \partial t = \overline{u'_i (\partial u'_i / \partial t)}$ の関係を用い、かつ $k = \frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i}$ とおきかえれば

$$\frac{\partial k}{\partial t} + U_j \frac{\partial k}{\partial x_j} = - \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} + p' \right) u'_j - \nu \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon - \overline{u'_i u'_j} \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \text{----- (7)}$$

ここに $\varepsilon = \nu \overline{\frac{\partial u'_i}{\partial x_j} \frac{\partial u'_i}{\partial x_j}}$: 乱流のエネルギー散逸率

を得る。つぎに Spalding ら²⁾に従って以下の近似を施す。

$$- \overline{\left(\frac{1}{2} \overline{u'_i u'_i} + p' \right) u'_j} = \frac{\nu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j}, \quad - \overline{u'_i u'_j} = \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)$$

すると (7) 式は移流項を保存形として

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (k U_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_k} + \nu \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] - \varepsilon + \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} \quad \text{----- (8)}$$

ここに σ_k : 定数値

となり、この式にて k の輸送を表現する。

同じようにして、 ε についても ε の輸送式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_j} (\varepsilon U_j) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\frac{\nu_t}{\sigma_\varepsilon} + \nu \right) \frac{\partial \varepsilon}{\partial x_j} \right] + C_1 \varepsilon k^{-1} \nu_t \left(\frac{\partial U_i}{\partial x_j} + \frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right) \frac{\partial U_i}{\partial x_j} - C_2 \varepsilon^2 K^{-1} \quad \text{----- (9)} \end{aligned}$$

ここに σ_ε : 定数値、 C_1 、 C_2 : 定数値

が得られる。²⁾⁴⁾

定数値については、自由乱流について Launder, Spalding²⁾の与えている値をそのまま用いた。すなわち、

$$C_\mu = 0.09, \quad C_1 = 1.44, \quad C_2 = 1.92, \quad \sigma_k = 1.0, \quad \sigma_\varepsilon = 1.3$$

これらの値のうち、 C_1 、 C_2 の定数値については

数%から1割程度の幅で変更しても乱流のシミュレーション上はあまり変化はない。

4. 格子網の定義と無次元化ならびに境界条件

基礎方程式を3次元の格子網上に差分展開するのに際して、図1に示すような各場変数配置の定義点を定める。乱流量 ν_t , k , ϵ , l については cell の中心で定義する。ここでは差分近似式は示さないが、Reynolds 方程式の移流項部分に2次精度の風上差分近似を、 k と ϵ の両輸送式の移流項には1次精度の風上差分近似をそれぞれ施している。格子数は3次元の計算では $50 \times 50 \times 14$, 2次元演算では 100×75 をそれぞれ標準的なものとした。

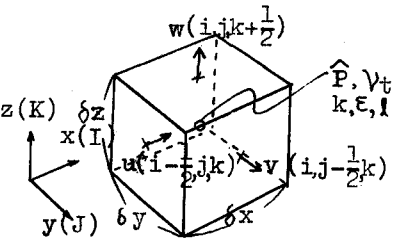


Fig.1 Location of field variables on a typical computing cell (i, j, k)

図1 格子網上の場変数配置

(1) 無次元の諸量

つぎに基準量として U_0 (流入流速), L_0 (流入口幅) にて場変数値を全て無次元化する。元の諸量を * 付で表現すれば、無次元量は以下ようになる。

$$\begin{aligned} x_i &= \frac{x_i^*}{L_0}, & U_i &= \frac{U_i^*}{U_0}, & t &= \frac{t^*}{(L_0/U_0)}, & p &= \frac{p^*}{U_0^2} \\ \hat{p} &= \frac{\hat{p}^*}{U_0^2}, & g_i &= \frac{g_i^*}{(U_0^2/L_0)}, & \nu &= \frac{\nu^*}{U_0 L_0} = R_e^{-1} \quad (R_e \text{ はレイノルズ数}) \\ \nu_t &= \frac{\nu_t^*}{U_0 L_0}, & k &= \frac{k^*}{U_0^2}, & \epsilon &= \frac{\epsilon^*}{(U_0^3/L_0)}, & l &= \frac{l^*}{L_0} \end{aligned}$$

これらの無次元量によって、連続式 (1), Reynolds 方程式 (4), k , ϵ 式 (8)(9) の各表現については、 ν が R_e^{-1} に代わる以外には式の上での変化はない。

(2) 壁面ならびに自由表面での境界条件

図2に示す領域の種々の境界について、その計算条件を以下で提示する。記号については図3のものを用いる。

側壁面 ABEF, ADEH : no-slip wall

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t &= -U_t, & U_n &= 0, & \tilde{k} &= -k \\ \tilde{\epsilon} &= -\epsilon, & \tilde{\nu}_t &= -\nu_t \end{aligned}$$

底面 ABCD : free-slip wall

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t &= U_t, & U_n &= 0, & \tilde{k} &= k \\ \tilde{\epsilon} &= \epsilon, & \tilde{\nu}_t &= \nu_t \end{aligned}$$

流入口: $U_n = 1.0$, $\tilde{k} = k_{in}$

$$\tilde{\epsilon} = \epsilon_{in}, \quad \tilde{\nu}_t = \nu_{tin}$$

自由表面 EFGH : free surface b. c.

$$\begin{aligned} \tilde{U}_t &= U_t, & \tilde{U}_n &= U_n - \delta z \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ \tilde{\epsilon} &= -\epsilon, & \tilde{k} &= -k, & \tilde{\nu}_t &= -\nu_t \\ \hat{p}_{sur} &= \frac{\delta z}{a} \hat{p}_{ns} + \left(1 - \frac{\delta z}{a} \right) \hat{p}_{sur-1} \end{aligned}$$

自由表面の変化の式

h : 底面からの自由表面形状位置関数

$$\frac{\partial h}{\partial t} = w - u \frac{\partial h}{\partial x} - v \frac{\partial h}{\partial y}$$

ただし移流項は風上差分近似式で展開

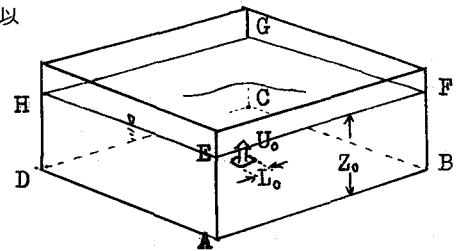


Fig.2 System Configuration

図2. 計算領域

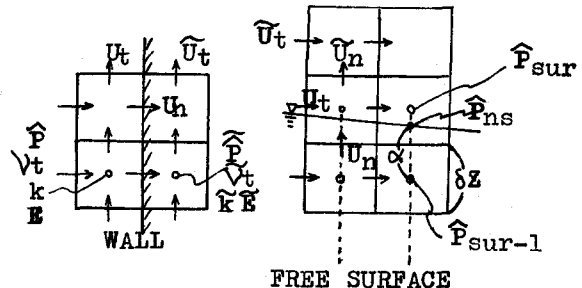


Fig.3 Boundary Conditions

図3. 境界条件

5. 解法と噴流計算例

今回開発し、ここで用いたプログラム(MAC3DTB)はつぎのようなものである。(1)式と(4)式の差分近似式による圧力 $\hat{P}$ と流速 U_i の解法はABMAC型の流速圧力同時緩和スキーム⁵⁾³⁾を用いる。そして収束した流速・圧力値から(8)(9)式の差分近似式により新時刻での k , ϵ の値を計算する。この新しい k , ϵ 値を(5)式に代入すれば v_t が計算され、再び計算サイクルはもとの流速圧力計算ルーチンへ戻る。

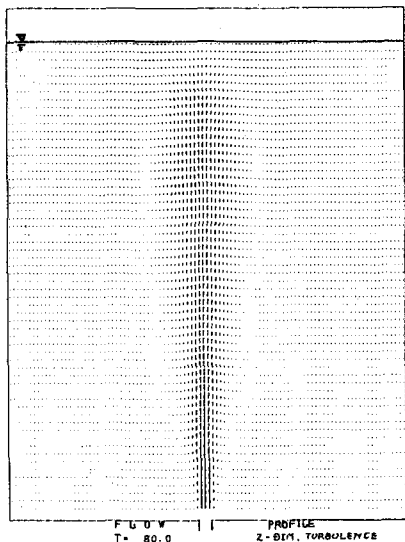


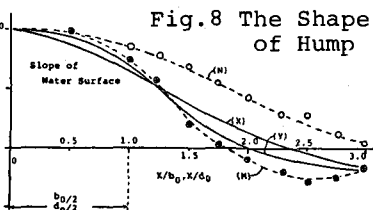
Fig.5 Velocity Distribution 2-dimensional Case(100x60)

図5. 2次元計算での流速分布

計算例1: はじめに本2方程式モデルの有効性を吟味するために、2次元モデルで噴流軸上の鉛直方向流速の低減特性を検討した。(図5) 実験値は室田・村岡による2次元測定例⁶⁾とその実験公式を用いた。(図6) 計算例Aは水深が十分でないために、流入口より10倍以上の距離の予測精度があまり良くない。Bの例ではほぼ実験値と良く一致していると言えよう。

計算例2: 2次元モデルと3次元

モデルで噴流軸中心から水平方向への鉛直流速分布特性をTollmien⁷⁾⁸⁾の解と比較した。これも良好な一致を示す。(図7)



(M) : Experiment Data (Murota & Muraoka)
y/b₀ = 5.5, 2-Dimensional
(N) : Experiment Data (Murota & Muraoka)
y/b₀ = 10.2, 2-Dimensional
(K) : present prediction Re = 2.5 × 10⁴
y/b₀ = 5.3, 2-Dimensional (100×14 mesh)
(I) : present prediction Re = 2 × 10⁴
y/b₀ = 5.0, 3-Dimensional (40×40×14 mesh)

図8. 自由表面の水位上昇

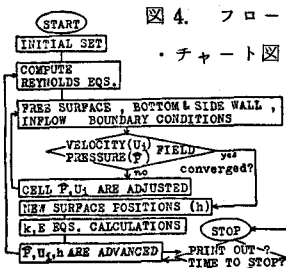


Fig.4 Flow Chart in MAC3DTB Code

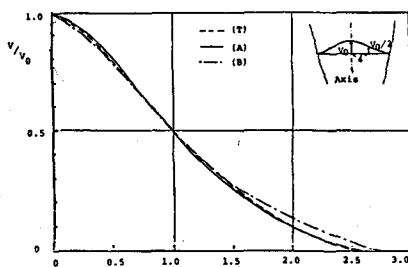
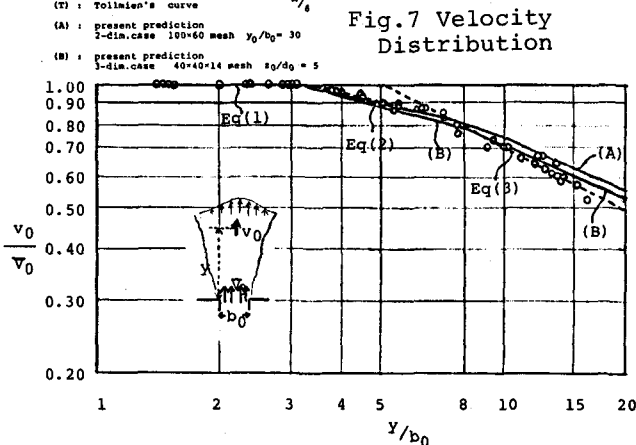


Fig.7 Velocity Distribution

本3次元計算の最大Mesh数は50×50×20であり、これ以上の高精度化は今の所困難である。

図7. 水平方向の流速分布特性



Murota and Muraoka's formula (2-dim.)
Eq(1) : $0 < y/b_0 < 3.5$ $v_0/V_0 = 1.0$
Eq(2) : $3.5 < y/b_0 < 7.1$ $v_0/V_0 = 1.37(b_0/y)^{1/2}$
Eq(3) : $7.1 < y/b_0$ $v_0/V_0 = 2.24(b_0/y)^{1/2}$
o Murota and Muraoka ; $V_0 = 41-62$ cm/s Exp.data
(A) present prediction (100×60 comput.mesh)
 $y_0/b_0 = 30$, $V_0 = 50$ cm/s(non-dim.→1.0)
Re = 2.5×10^4
(B) present prediction (100×80 comput.mesh)
 $y_0/b_0 = 38$, the same V_0 , Re etc(above)

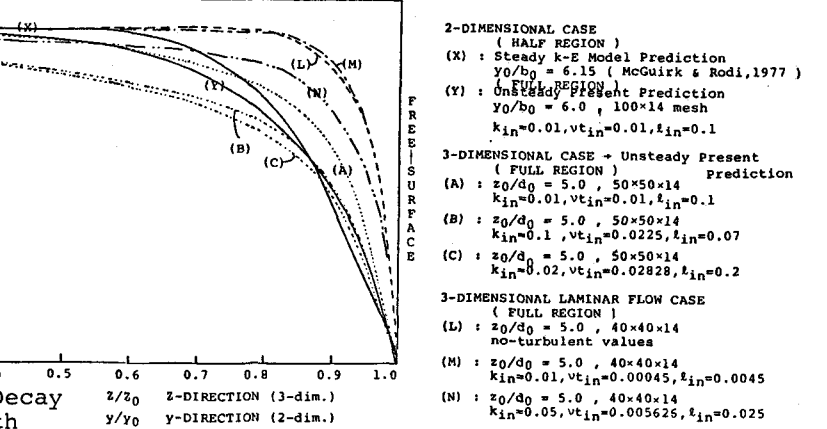
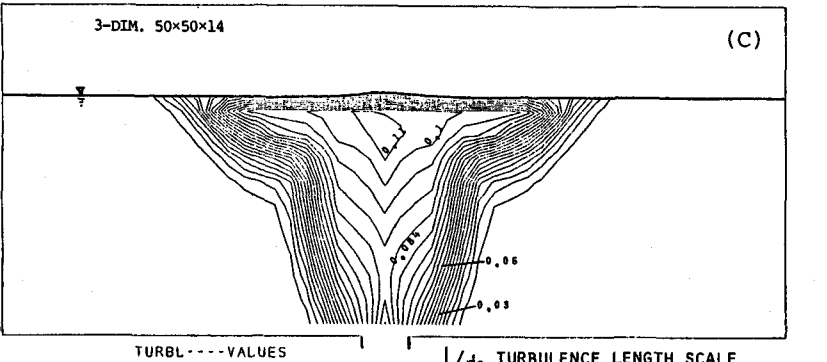
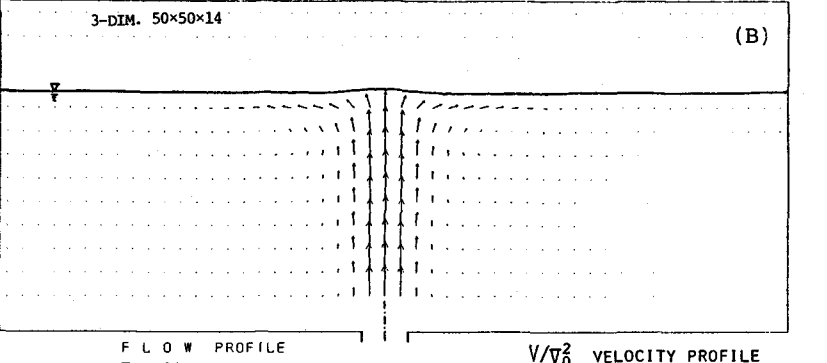
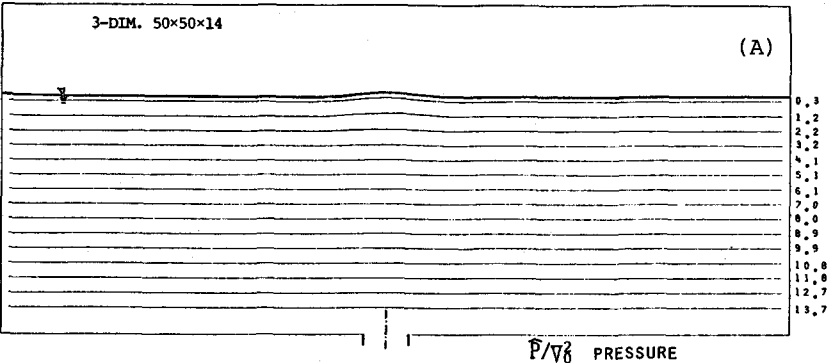
Fig.6 Distribution of Vertical Jet Axis Velocity in the Deeper Region

図6. 軸上流速低減特性(2次元噴流)

計算例 4 : 3 次元モデルを
中心に、流入口幅の 5, 6 倍
の浅い水深下で、その中心軸
上流速の減衰率を考察してみ
たところ、図 9 の結果となっ
た。図中 (X) の解は、2 次
元の定常解法⁹⁾であり、中心
軸から右半分の領域のみの計
算である。また流入乱流諸量
は文献からは不明である。

(M) (N) の計算は流入渦動
粘性係数の値が低く、その結
果、慣性力が粘性効果をしの
いで (L) の層流解と同様の結
果となる。実験値が無いので
断定は不可能だが、実際上は
2 次元は (Y), 3 次元は (A)
~ (C) の値に近いのではない
かと考察している。

計算例 5 : 3 次元モデルの
中で、流入乱流諸量 $k_{in}=$
 0.01 , $\nu_{tin}=0.01$, $l_{in}=$
 0.1 の例ではほぼ定常とみなせ
る cycle の 1000 ($\delta t=0.02$
で) まで計算した。この時の
流況と乱流量の分布を図 10
に示す。使用した格子数は
 $50 \times 50 \times 14$ であり、計算
時間はプラズマ研の FACOM
•M-200 で約 161 分である。



6. 結 語

$k-\epsilon$ 2 方程式乱流モデルを用いたMAC 3DTBコードの鉛直乱流噴流への適用は、解析結果が実験値との良好な一致を示すことから予測モデルとしてほぼ有効であると言えよう。この乱流モデルの種々の仮定や近似ならびに水理乱流量測定

の困難さ等を考慮しても本モデルはきわめて実用性に富み、計算と実験値は比較場面での計算格子網の粗さなどを考え合わせると良い一致を示していると考えている。今後は乱流実測データとの比較検討を課題とした

い。また本計算から温排水拡散¹⁰⁾ 密度噴流モデル¹¹⁾¹²⁾へ

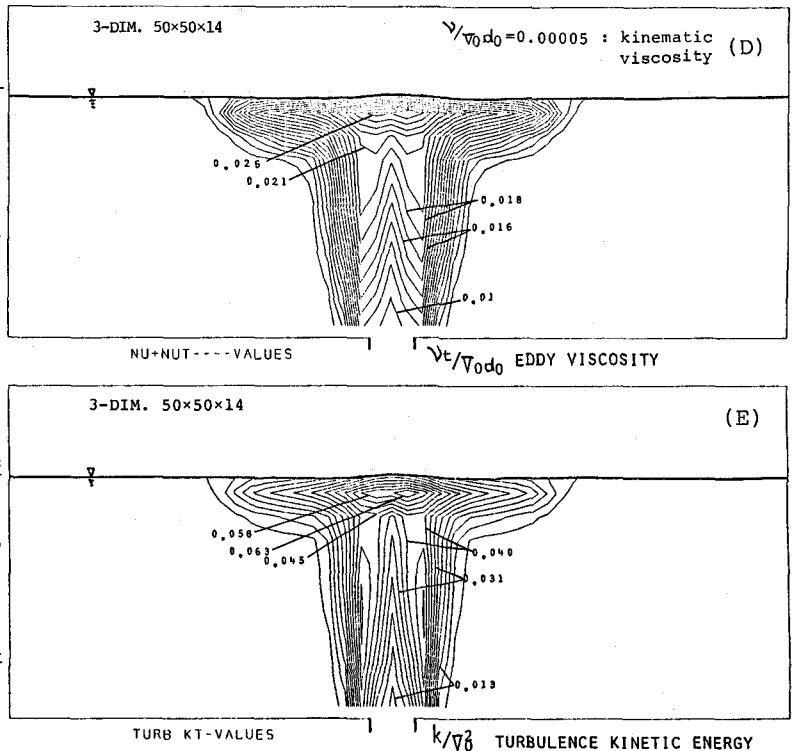


Fig.10 Results of 3-Dim.Turbulent Computation

(謝辞) 本研究を進めるにあたり、文献の収集に関して名大工・土木工学科の高木不折教授ならびに京大防災研宇治川水理実験所の今本博健所長に厚意を賜りました。また本計算の比較実験データは全て文献6)7)9)より借用させていただきました。計算には名大プラズマ研のM-200システムと京大大型計算機センターのM-382システムを用いました。

〔参考文献〕

- 1) 日野幹雄・大西外明・羽生正範：水中温排水噴流の数値シミュレーション，第22回海講論文集，pp. 179～184(1975)
- 2) B.E.Laundrer and D.B.Spalding: The Numerical Computation of Turbulent Flows, Comp.Meth.Appl.Mech. Eng., 3, pp.269-289(1974); Mathematical Models of Turbulence (1972)
- 3) 武本行正・武内智行・奥村博司・藤田広章：自由表面および内部境界面をもつ開水路非定常流の数値解析法，農士誌，vol. 50-6, pp. 487～503(1982)
- 4) J.C.Rotta: Turbulente Strömungen (1972), (1972), 大路通雄訳 岩波書店(1975)
- 5) J.A.Viecelli: A Method for Including Arbitrary External Boundaries in the MAC Technique, J. Comput. Phys., 4, pp.543-551 (1969)
- 6) A.Murota and K.Muraoka: Turbulent Diffusion of the Vertically Upward Jet, Proc. 12th Congress IAHR, Vol. 4, D7 pp. 60-70 (1967)
- 7) M.L.Albertson et al: Diffusion of Submerged Jets, Trans. ASCE, 115, pp.639-697 (1950)
- 8) 岩崎敏夫・田中博通：表層水平自由噴流における乱れ剪断応力に関する研究，第24回水講 pp. 435～440 (1980)
- 9) J.McGuirk and W.Rodi: A Mathematical Model for a Vertical Jet Discharging into a Shallow Lake, Proc. 17th Congress IAHR, Vol.1, A72, pp.579-586 (1977)
- 10) 和田明・後藤藤太郎・片野尚明：海水淡水化に伴う排出ブラインの拡散予測，第22回水講，pp. 75～80 (1978)
- 11) 椿東一郎・小松利充：3次元表面密度噴流について，第22回水講，pp. 1～6 (1978)
- 12) 有田正光：密度噴流の乱れ諸量に関する計算，土木学会第35回年講，pp. 404～405(1980)
- 13) 斉藤隆：二次元乱流壁面噴流に関する研究，土木学会論文報告集，264, pp. 41～52 (1977)