

二層流の安定限界

Stability Criterion for Two-Layer Shear Flow

北海道大学大学院 学生員 西 田 修 三
北海道大学工学部 正 員 吉 田 静 男

1. 緒 言
密度二成層剪断流の安定限界は、従来、水深や平均流速等の大域的な量を用いた無次元パラメータである、内部フルード数 $\overline{F}_i$ や、粘性を考慮した場合にはクーリガン数 $\overline{\theta}$ 等によって表現されてきた。しかしながら、本来、流れの安定性は速度シア等の局所的な量によって決定されるものであり、その安定限界についても、当然、局所的な量を用いた無次元パラメータで整理されるべきである。流れの規模や形式が異っているにもかかわらず、同様の大域的無次元パラメータで流れの安定性を議論してきたために、得られた安定限界等の値は、各実験においてそれぞれ異なったものとなり、統一的な議論がなし得なかった¹⁾。これは、また、今日まで二層流の安定限界についての理論的扱いが、ほとんどなされていなかったことにも起因している。

そこで本研究では、密度二成層流の安定限界を、不安定波の発生という見地から、線形安定性理論を基に理論的に求めるとともに、従来より安定性の指標とされてきたクーリガン数を用いて表現された安定限界の値と、本計算より得られた結果との比較及び検討も併せて行う。

2. 固有値方程式
流れ場を図-1のように、上・下層無限厚で密度がそれぞれ $\rho_1, \rho_2 (\rho_1 < \rho_2)$ の静的には安定な密度二成層で、流速分布が $U^* = V \tanh y^*/l$ で表わされる非圧縮二次元平行流とする。また、淡塩水密度二層流のような場合を考え、上・下層にお

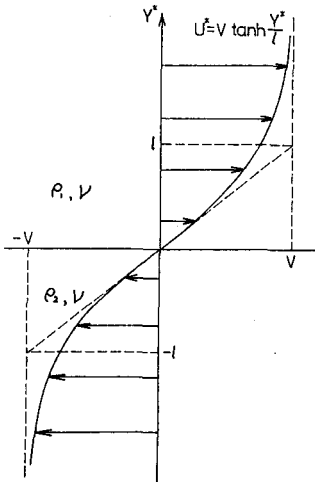


図-1 流れ場のモデル

ける動粘性係数は ν で一定、さらに界面における表面張力は実状を考慮し無視する。流れ場の諸量を l, V をもって無次元化し、添字_{1,2}はそれぞれ上層内、下層内の量を表わすこととすれば、流れの安定性に関する Orr-Sommerfeld の方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} (U-C)(\phi_1'' - \alpha^2 \phi_1) - U''\phi_1 &= \frac{1}{iaR_e}(\phi_1^{IV} - 2\alpha^2 \phi_1'' + \alpha^4 \phi_1) \\ (U-C)(\phi_2'' - \alpha^2 \phi_2) - U''\phi_2 &= \frac{1}{iaR_e}(\phi_2^{IV} - 2\alpha^2 \phi_2'' + \alpha^4 \phi_2) \dots\dots(1) \end{aligned}$$

ここに、ダッシュは y に関する微分を表わし、 $\alpha, C = C_r + iC_i, R_e = lV/\nu$ はそれぞれ波数、複素位相速度、レイノルズ数である。

また境界条件は以下のようにになる。

$$\begin{aligned} \phi_1 = \phi_1' &= 0 \quad (y = +\infty) \\ \phi_2 = \phi_2' &= 0 \quad (y = -\infty) \\ \phi_1 &= \phi_2 \\ \phi_1' - \frac{U'}{(U-C)}\phi_1 &= \phi_2' - \frac{U'}{(U-C)}\phi_2 \\ \gamma\phi_1'' - \gamma\left\{\frac{U''}{(U-C)} - \alpha^2\right\}\phi_1 &= \phi_2'' - \left\{\frac{U''}{(U-C)} - \alpha^2\right\}\phi_2 \\ i\gamma\phi_1''' + \gamma\alpha|R_e(U-C) - 3ia|\phi_1' - \gamma aR_e U'\phi_1 &= i\phi_2''' + \alpha|R_e(U-C) - 3ia|\phi_2' - aR_e U'\phi_2 \\ &\quad - \frac{R_i}{(U-C)}\phi_2 \quad (y=0) \dots\dots(2) \end{aligned}$$

ここに、 $\gamma = \rho_1/\rho_2$ は相対密度、 $R_i = (1-\gamma)gl/V^2$ はリチャードソン数、 g は重力加速度である。
淡塩水密度二層流のように密度差が小さい場合は、 γ の安定性への影響は、 g のかかる項以外はほとんど現われないため、 $\gamma = 0.99$ とした。その結果、境界条件より形成される固有値方程式は、次のようになる。

$$|\Delta(\alpha, C, R_e, R_i)| = 0 \dots\dots(3)$$

Orr-Sommerfeld の解は、Runge-Kutta-Gill 法を用い、きざみ幅 $\Delta y = 0.005 \sim 0.025$ で数値積分を行うことにより求めた。また、 R_e 及び α が、大きく

なるにつれて数値計算の誤差が増大し得られる解の独立性が損なわれるため、Betchovら²⁾の方法に従って適宜数ステップ(5~10ステップ)毎に解の修正を行い、独立な解が得られるようにした。このようにして得られた解を用いて、行列式の各要素を計算し、固有値方程式(3)を満足するような固有値 C を反復試行することによって見出した。

なお、以上の計算方法、及び非粘性の場合の計算方法については、西田・吉田³⁾に詳細に記されている。

3. 計算結果及び考察

(1) 安定限界リチャードソン数

レイノルズ数が $10 \leq R_e \leq 2000$ の範囲で計算を行った。図-2は、計算より得られた $R_e=100$ の場合の中立曲線である。中立曲線は (α, R_i) 平面で閉じたものとなり、安定限界のリチャードソン数 R_{ic} が存在することになる。つまり、 $R_i > R_{ic}$ であれば流れ場は常に安定であり、 $R_i < R_{ic}$ であれば不安定となり得ることを示している。一方、流れ場を非粘性として扱った場合には、中立曲線は開いた形となり⁴⁾、安定限界 R_{ic} はもはや存在しなくなってしまう。これは、密度の遷移層厚が流速のそれと同程度、もしくはそれ以上の漸変密度流の場合と、大きく異なる点である。このような漸変密度流においては、非粘性流として解析した場合にも、安定限界は局所リチャードソン数を用いて $R'_{ic}=0.25$ と求まっている^{5), 6)}。

図-2は (α, R_i) 平面に求まった中立曲線であるが、 R_i を固定し、 (R_e, α) 平面に中立曲線を描くこともできる⁷⁾。図-3は $R_i=1.2$ の場合のその中立曲線であり、この場合は安定限界レイノルズ数 R_{ec} が求まることになる。いずれにせよ、安定限界は、レイノルズ数とリチャードソン数の関係として求めることができる。

(2) 安定限界曲線

以上のようにして得られた安定限界を (R_e, R_{ic}) 平面に描いたのが、図-4である。図から明らかに、 $50 \leq R_e \leq 200$ では R_e の増加に伴い R_{ic} はわずかに減少し、それ以外の領域では R_e の増加に伴い R_{ic} も増加する傾向にある。しかしながら、 $20 \leq R_e \leq 1000$ の広範囲にわたって、その増減の割合は小

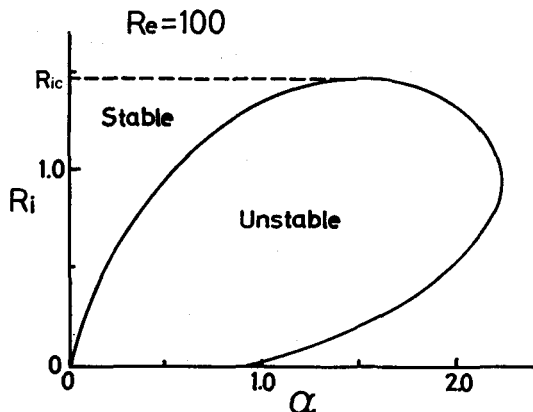


図-2 中立曲線 ($R_e=100$)

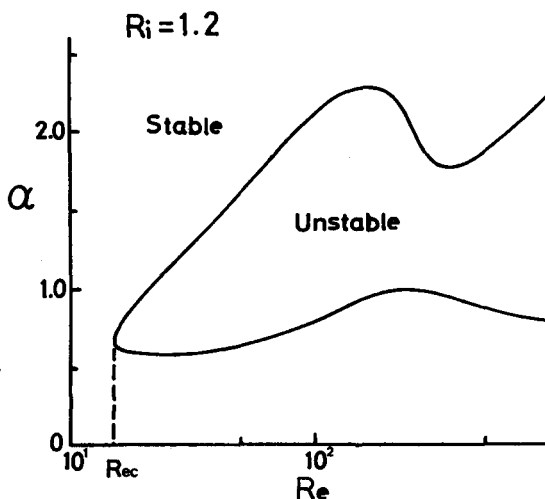


図-3 中立曲線 ($R_i=1.2$)

さく、 $1.3 \leq R_{ic} \leq 1.5$ とほとんど変化していない。このことは、通常の実験における R_e が、数十~数百であることを考えれば、二層流の安定限界はほとんどレイノルズ数によらず、ほぼリチャードソン数のみによって表現し得ることを示している。前述したように、粘性を考慮しなければ安定限界 R_{ic} は求まらないにもかかわらず、通常レイノルズ数の範囲では、レイノルズ数はほとんど安定限界に影響を与えないという非常に興味深い結果が得られた。しかし、同図が示すように、低レイノルズ数及び高レイノルズ数においては、安定限界は R_i だけでなく、 R_e にも依存する傾向にあると言える。

(3) 安定限界とクーリガン数

従来より安定限界の支配パラメーターとして採用さ

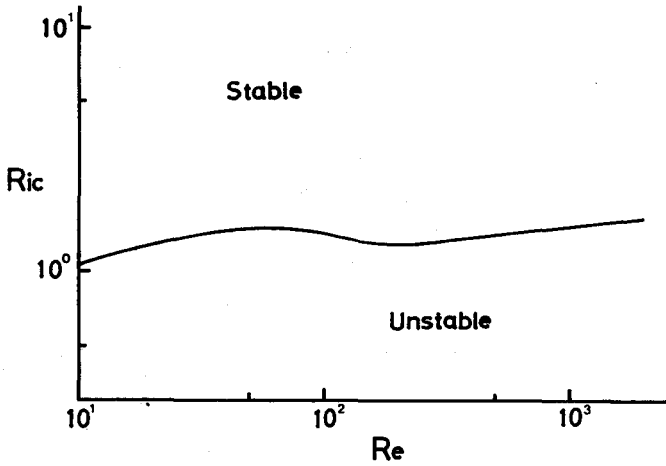


図-4 安定限界

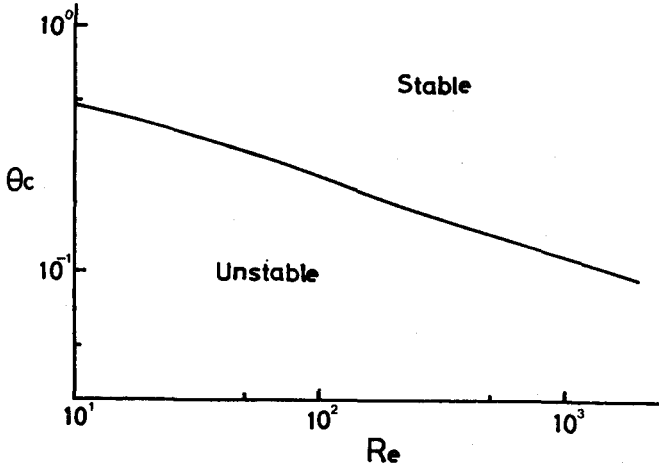


図-5 安定限界

れてきたクーリガン数 $\bar{\theta}$ に対応するものとして、 V で無次元化した θ を用いて安定限界を整理したのが図-5である。以下、barの付いた量は全域的な量を、barの付いていない量は局所的な量を表わすこととする。

$$\begin{aligned}\bar{\theta} &= \left(\frac{\varepsilon g \nu}{V^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{\bar{R}_t}{\bar{R}_e} \right)^{\frac{1}{3}} = (\bar{F}_t \cdot \bar{R}_e)^{-\frac{1}{3}} \\ \bar{R}_t &= \frac{\varepsilon g l}{V^2} (= \bar{F}_t^{-2}), \quad \bar{R}_e = \frac{\bar{V} l}{\nu} \\ \theta &= \left(\frac{\varepsilon g \nu}{V^3} \right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{R_t}{R_e} \right)^{\frac{1}{3}} \dots\dots\dots(4)\end{aligned}$$

前述したように、安定限界が広範囲にわたってほとんどレイノルズ数によらないため、ほぼ、

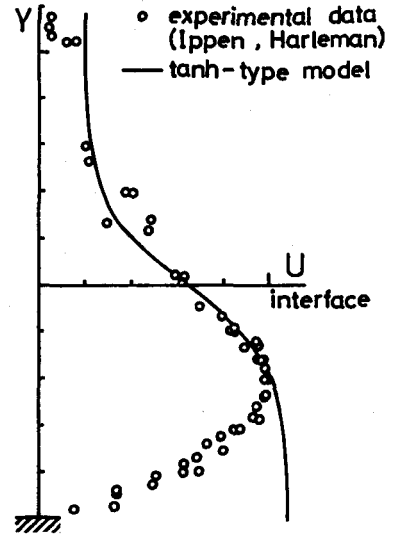


図-6 流速分布のモデル化

$$\theta_c \propto R_e^{-\frac{1}{3}} \dots\dots\dots(5)$$

なる関係となっている。室内実験においては、

$$\begin{aligned}R_t \propto \bar{R}_t, \quad R_e \propto \bar{R}_e, \\ \theta \propto \bar{\theta} \dots\dots\dots(6)\end{aligned}$$

の関係がほぼ成立すると考えられるため、これらを(5)式に代入して安定限界を $\bar{\theta}$ で表現すれば、 θ の場合と同様に、

$$\bar{\theta}_c \propto \bar{R}_e^{-\frac{1}{3}} \dots\dots\dots(7)$$

なる関係が得られる。このことから、Keulegan⁸⁾ が指摘するほどには粘性は安定限界に寄与せず、Ippen と Harleman⁹⁾ の示した次の関係に定性的に一致したものと

なることがわかる。

$$\bar{\theta}_c = \bar{R}_e^{-\frac{1}{3}} \quad (\text{Ippen and Harleman})$$

$$\bar{\theta}_c = 0.127 \quad (\text{Keulegan}) \dots\dots\dots(8)$$

しかしながら、高レイノルズ数や低レイノルズ数域においては、前述したように安定限界へのレイノルズ数の寄与が大きくなる傾向があり、もしも図-4の安定限界曲線の傾きが1になる領域が現われれば、そこでは(7)式に換って Keulegan の示したような、 $\bar{\theta} = \text{const.}$ の関係が得られることになる。

いずれにせよ、実験方法や形式の相違により、(6)及び(7)の比例定数が異なるのが普通で、 $\bar{F}_t$ や $\bar{\theta}$ で表現された安定限界は、各実験において違った値を示

すはずである。従って、Keulegan や Ippen らの示した二層流の安定限界値(8)は、普遍的なものではないと言える。事実、これらの無次元量を用いて安定限界を表現した種々の実験において、その値はそれぞれ異なったものとなっている¹⁰⁾。

(4) 実験結果との比較及び検討

従来、安定性に関する多くの実験がなされてきたが、前述したように、ほとんどが断面平均量等を用いて表現されているため、本計算結果と直接、比較することはできない。しかしながら、流速分布等の流れ場の詳細なデータがあれば、大域的な代表量と本計算に使用した V 、 l との関係が求まり、その結果(6)式のように関係づけることができる。そこで、ここでは下層流動の安定性を扱った Ippen らの実験結果を基に、 θ 、 R_e を $\bar{\theta}$ 、 $\bar{R}_e$ で表現し、彼らの示す安定限界の値と本計算結果との比較を行ってみることにする。

実験によって得られた流速分布を図-6 のようにモデル化し、Ippen らが採用した代表量(下層平均流速、下層厚)と、 l 、 V とを比較することにより、以下の関係が得られる。

$$R_e = 0.19 \bar{R}_e$$

$$\theta = 1.7 \bar{\theta} \quad \dots\dots\dots(9)$$

なお、Ippen らの論文では、 $\bar{R}_e$ を N_k 、 $\bar{\theta}$ を $\theta_c^{\frac{1}{3}}$ と記している。この関係を用い、図-5 (または図-4) のように求めた安定限界曲線を、Ippen らが示したのと同様の $(\bar{R}_e, \bar{\theta}_c)$ 平面に書き改めたのが図-7 である。図には参考までに、Keulegan の実験結果も併記した。図から明らかなように、本計算結果と Ippen らの実験結果とは定量的にもよく一致し、理論解析より得られた本結果は、実験結果を十分説明し得るものであることがわかる。一方、図-7 に併記した $\bar{R}_e \geq 1500$ の乱流域における Keulegan の実験結果については、本計算から説明することはできない。その理由は、本計算は流れの安定性という面

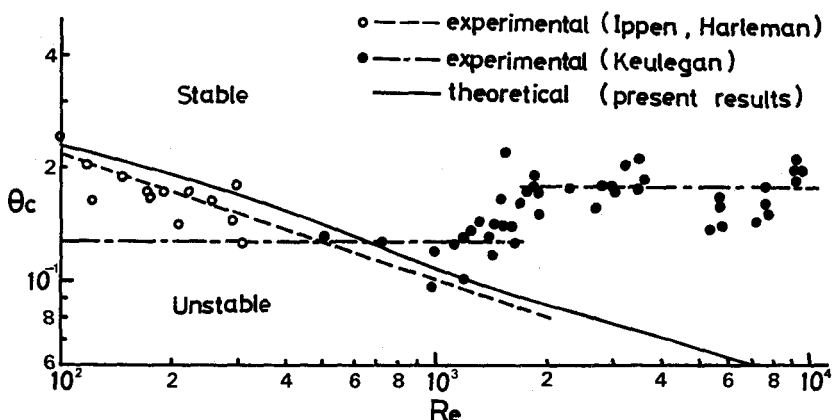


図-7 安定限界

から二層流の安定限界を求めたものであり、流動層が十分乱流化している場合の二層の混合限界については言及し得ないからである。また、ここで扱っている安定限界とは、不安定波の発生限界のことであるから、発生した界面波の碎波条件、さらには混合限界と、すぐには結びつけることはできない。しかしながら、実験で観測されるように、流れ場の不安定性によって生じた界面波は、ある程度成長した後、碎波し混合に関与するのが普通である¹¹⁾。ゆえに、ここに示した安定限界は、ほぼ混合限界に一致するとみることができよう。

4. 結 語

以上、二層流の安定限界を安定性理論を基に解析した結果、レイノルズ数の広範囲にわたって、安定限界リチャードソン数 R_{ic} はほとんど変化せず、安定限界への粘性の効果は大きくないことがわかった。もし、 $20 \leq R_e \leq 1000$ 程度の実験室規模の二層流において、本計算結果を適用するのであれば、ほぼ $R_{ic} \approx 1.4$ としてよいであろう。また、各々の実験において、 l 、 V と大域的な量 $\bar{l}$ 、 $\bar{V}$ との関係が求まれば、それらを用いて安定限界は、 $\bar{R}_{ic}$ もしくは $\bar{F}_{ic}$ をもって表現することも可能である。

今回は、Ippen らの下層流動の実験を基に、理論計算より得られた結果の妥当性を確かめた。今後、上層流動や exchange flow 型の二層流の安定限界について、精密な実験による本結果の妥当性の検証が望まれるところである。

参 考 文 献

- 1) 水理委員会密度流研究小委員会：密度成層流の界面現象(1), 土木学会論文報告集, No. 242, pp. 73~90, 1975.
- 2) Betchov, R., W. O. Criminale, Jr.: *Stability of Parallel Flows*, Academic Press, New York, 330p., 1967.
- 3) 西田修三・吉田静男：二層流の安定性解析, 第29回海岸工学講演会論文集, pp. 550~554, 1982.
- 4) 前出3).
- 5) Drazin, P. G., L. N. Howard: *Advances in Applied Mechanics*, Vol. 9, Academic Press, New York, pp. 1~89, 1966.
- 6) Hazel, P.: Numerical studies of the stability of inviscid stratified shear flows, *J. Fluid Mech.*, Vol. 51, pp. 39~61, 1972.
- 7) 西田修三・吉田静男：密度二成層 tanh 型剪断流の安定性, 第32回応用力学連合講演会論文抄録集, pp. 303~304, 1982.
- 8) Keulegan, G. H.: Interfacial instability and mixing in stratified flows, *J. Research, Nat. Bureau Stands.*, Vol. 43, pp. 487~500, 1949.
- 9) Ippen, A. T. and D. R. F. Harleman: Steady-state characteristics of subsurface flow, *Gravity Wave Symposium, Nat. Bureau Stands., Circulation* 521, pp. 79~93, 1951.
- 10) 前出1).
- 11) 吉田静男・西田修三・田城徹雄：定常二層流の三次元混合過程, 第28回海岸工学講演会論文集, pp. 525~529, 1981.