

3 層系密度界面における連行速度について
The Entrainment Velocity at the Density Interface of Three-Layered Systems

芝浦工業大学 正員 菅 和利
東京大学工学部 正員 玉井 信行

1. はじめに

我が国の感潮河川の多くは緩混合の状態にあり、明確な界面の存在しない場合もある。このような現象を連続成層として、物質の輸送を拡散係数を用いて記述し解析する場合もあるが、成層流場での拡散係数の見積りに問題を残している。他方、明確な界面を有する場合には2成層流として取り扱われてきたが¹⁾、この方法を緩混合状態にまで拡張しうべく中間層を考慮した玉井²⁾の3層流モデルがある。多層成層流としての取り扱いでは、流質の輸送を界面に集中して取り扱うことができ、実際現象のモデル化としては連続成層流としての取り扱いより有利と考えている。このような界面での流質の輸送は、いわゆる連行速度を用いて記述され多くの研究成果が得られているが、質量型の連行速度と体積型の連行速度との差異が不明確なまま使用されており、その記述には不備な点が存在すると考えられる。又従来の連行の考え方では、常に一方向への輸送のみを考えており、塩水くさびでの塩分濃度の縦断方向の変化の一因と考えられているいわゆる逆連行について考えられていないように思われる。そこで本研究では、質量、体積、運動量の界面を通しての相互の輸送を連行型によって統一的に記述し、この場合の連行係数の関数形について実験的に検討を行った。

2. 相互連行速度について

緩混合状態を3層流として考える場合には、界面は便宜的な等相対密度面と考えられる³⁾。この界面を通しての輸送は乱流現象であるので、相互に生じており、それら各々のアンサンブル平均として連行速度を定義することができる。この考え方を基礎として質量、体積、運動量の輸送を記述し、従来の記述との差異及び

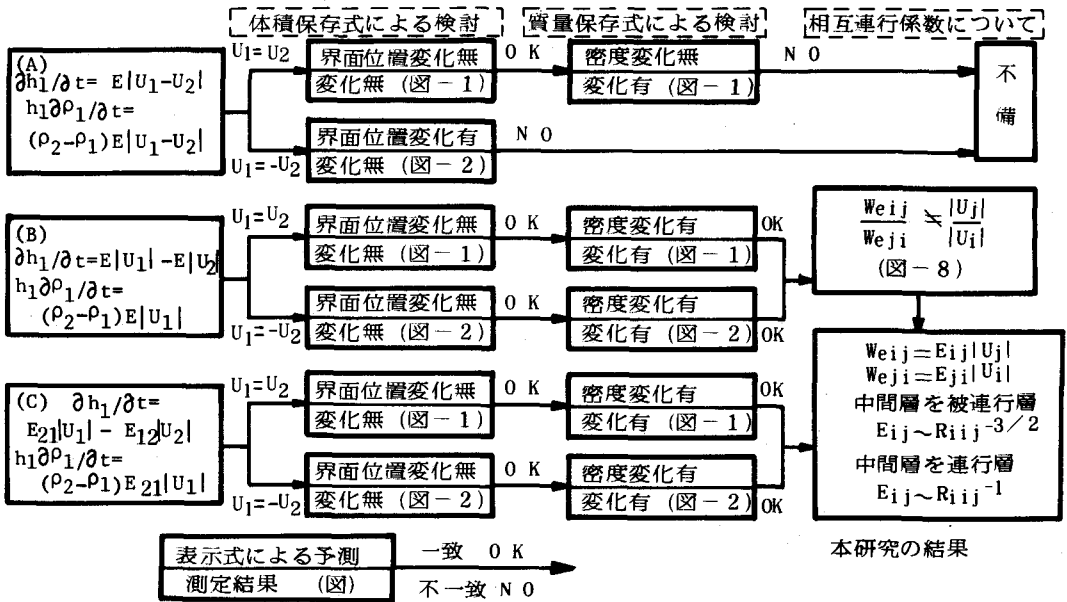


図-1 各モデルの検証に関する流れ図

実験結果との比較を行ったのが図-1の流れ図である。実験の概要については後に述べるが、ここでは比較を明確にする為に上下層の流向、流速が等しい場合及び、流速の大きさは等しいが流向が逆の場合の2ケースの結果を用いて検討を行っている。又実験は2重円筒水槽を用いたので時間変化のみを考えれば良い。

相対速度差に比例して体積は輸送され、又この輸送速度によって密度差が輸送されるとしたAタイプ(流れ図)の従来の記述では、図-2, 3の結果を説明し得ず、相互連行を考えたB, Cタイプの記述のみが、体積型、質量型の連行現象を無理なく説明しうることがわかる。このような連行速度を慣用的な連行係数を用いて記述した相互連行係数は同一の関数形でないことが、図-8より知られており、この関数形を定めることが本研究の目的である。

2-1 統一的記述

3層流について界面での鉛直方向の輸送を全て移流型で記述することにし、質量、体積、運動量保存の式を各層で積分し、その過程で出現する鉛直輸送項を相互連行速度によって記述する。例えば、体積、質量保存の式を第1層で積分すると以下のようになる。

$$\partial u / \partial x + \partial w / \partial z = 0 \quad (1)$$

$$\partial \rho / \partial t + \partial (\rho u) / \partial x + \partial (\rho w) / \partial z = 0 \quad (2)$$

式(1)の第1項の積分は

$$\int_h^s \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_h^s u dz - u_s \frac{\partial s}{\partial x} + u_h \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3)$$

となり、又水面及び界面での鉛直速度成分は次のように書くことができる。

$$w_s = \partial s / \partial t + u_s \partial s / \partial x \quad (4)$$

$$w_h = \partial h / \partial t + u_h \partial h / \partial x + w_e \quad (5)$$

式(5)の w_e は運動している界面より分離して他の層に移流する速度を表わし、以下のように書くこととする。ここに1番目の添字は流質の出発する被連行層を、又2番目の添字は連行して行く連行層を示すこととする。

$$w_e = w_{e21} - w_{e12} \quad (6)$$

式(3), (4), (5), (6)を式(1)の積分に適用し、さらに層平均量を用いて書き直すと次式が得られる。

$$\frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial (U_1 h_1)}{\partial x} = w_{e21} - w_{e12} \quad (7)$$

同様に式(2)を積分し、層平均量を用いて記述すると次式が得られる。

$$\frac{\partial (\rho_1 h_1)}{\partial t} + \frac{\partial (U_1 h_1 \rho_1)}{\partial x} + I_1 \frac{\partial (h_1 \rho_1 \Delta u_1)}{\partial x} = \rho_h w_e \quad (8)$$

式(8)の左辺第3項は流速分布、密度分布の層平均からの偏差による1次元分散項である。右辺は界面での密度を有する流質が界面から分離して他の層へ輸送されるのを表わしており、この項について次のように考える。界面では式(7)の右辺で表わされる相互の連行が生じているのでこの連行速度によって流質も同時に輸送される。この時、図-5のように界面から分離する水粒子は互いに異なった密度を有していると考えるのが自然であるので、出発前の層平均の密度をそれぞれ有して混入して行くとする。そこで $\rho_h w_e$ を次のように書くこととする。

$$\rho_h w_e = \rho_2 w_{e21} - \rho_1 w_{e12} \quad (9)$$

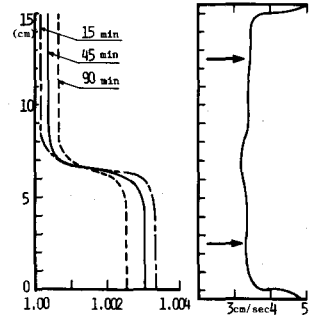


図-2 流速、密度分布

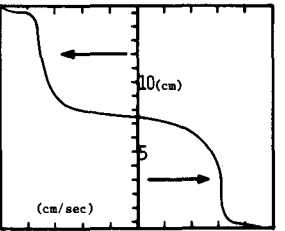
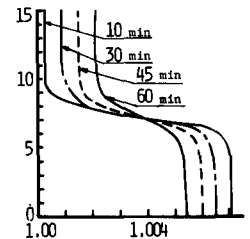


図-3 流速、密度分布

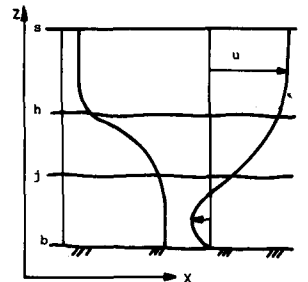


図-4 3層流モデル

式(9)を式(8)に代入し、式(7)を用いて書き直すと次式が得られる。

$$\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + U_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial x} = \frac{(\rho_2 - \rho_1) w_{e21}}{h_1} + D_1 \quad (10)$$

第2, 第3層についても同様に積分を行うとそれぞれ次式が得られる。

$$\frac{\partial \rho_2}{\partial t} + U_2 \frac{\partial \rho_2}{\partial x} = \frac{(\rho_1 - \rho_2) w_{e12}}{h_2} + \frac{(\rho_3 - \rho_2) w_{e32}}{h_2} + D_2 \quad (11)$$

$$\frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial (U_2 h_2)}{\partial x} = -w_{e21} + w_{e12} + w_{e32} - w_{e23} \quad (12)$$

$$\frac{\partial \rho_3}{\partial t} + U_3 \frac{\partial \rho_3}{\partial x} = \frac{(\rho_2 - \rho_3) w_{e23}}{h_3} + D_3 \quad (13)$$

$$\frac{\partial h_3}{\partial t} + \frac{\partial (U_3 h_3)}{\partial x} = -w_{e32} + w_{e23} \quad (14)$$

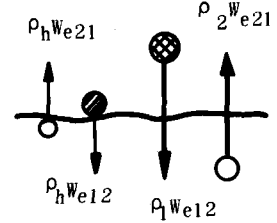


図-5 流質の相互連行

ここに D_1, D_2, D_3 は分散項を示したものである。

次に連行に伴う運動量輸送について、運動量保存の式を各層で積分することにより検討を行った。慣性項の積分過程において次のような連行に伴う見掛けの運動量の輸送を表わす項が出現する。

$$U_1 \rho_h w_e - \rho_h U_h w_e \quad (15)$$

この第1項は前述の方法により $U_1 \rho_2 w_{e21} - U_1 \rho_1 w_{e12}$ と書くことができる。式(15)は連行により他の層から受ける付加せん断応力と解釈されるので付号を変えて考えることとする。書き改めると次のようになる。

$$\text{第1層について} \quad M_1 = -(U_1 \rho_2 w_{e21} - U_1 \rho_1 w_{e12} - \rho_h U_h w_e) / (\rho_1 h_1) \quad (16)$$

$$\text{第2層について} \quad M_2 = -(U_2 \rho_1 w_{e12} - U_2 \rho_2 w_{e21} + \rho_h U_h w_e) / (\rho_2 h_2) \quad (17)$$

ここで界面での水平方向の速度 u_h として上下層の平均流速を考えると、式(16), (17)は各々次のようになる。

$$M_1 = -(U_1 - U_2)(\rho_2 w_{e21} - \rho_1 w_{e12}) / 2\rho_1 h_1, \quad M_2 = (U_1 - U_2)(\rho_1 w_{e12} - \rho_2 w_{e21}) / 2\rho_2 h_2 \quad (18)$$

今仮りに $U_1 > 0, U_2 > 0, U_1 > U_2$ の場合を考える。Boussinesq 近似を用いるとこの場合には、 $w_{e21} - w_{e12}$ は正であるので、 M_1, M_2 共に負となる。これを界面での摩擦によるせん断応力と共に示したのが図-6である。この場合には連行によって上層、下層共に減速されることを示している。上層については、速度の小さい流質を連行するので減速される結果は自然であるが、下層側の流質が上層に移行することによって減速される結果は不自然さが存在する。そこで、密度と同様に混入前の層の平均速度を保持して混入して行くと考え。このように考えると、 M_1, M_2 は各々次のように書くことができる。

$$M_1 = -\rho_2 (U_1 - U_2) w_{e21} / \rho_1 h_1, \quad M_2 = \rho_1 (U_1 - U_2) w_{e12} / \rho_2 h_2 \quad (19)$$

式(19)は、相互の連行において連行層のみ加速度が変化し、被連行層では変化しないことを示しており、この結果を種々の流速の組合せについて検討を行った結果、上記のような不自然さは生ぜず、このような考え方は妥当と思われる。

以上のように、体積、質量、運動量の界面での輸送を相互の連行速度を用いて記述することにより、従来不明確であった質量型、体積型の連行を統一的に記述することが可能となり、さらに連行に伴う付加応力の内容を明確にすることができる。後述する実験的検討では、時間変化のみが関与する2重円筒水路内の流れを取り扱っているので、この場合について、体積、質量の保存式を3層流について記述しておく。

$$\partial \rho_1 / \partial t = (\rho_2 - \rho_1) w_{e21} / h_1 \quad (20)$$

$$\partial h_1 / \partial t = w_{e21} - w_{e12} \quad (21)$$

$$\partial \rho_2 / \partial t = (\rho_1 - \rho_2) w_{e12} / h_2 + (\rho_3 - \rho_2) w_{e32} / h_2 \quad (22)$$

$$\partial h_2 / \partial t = -w_{e21} + w_{e12} + w_{e32} - w_{e23} \quad (23)$$

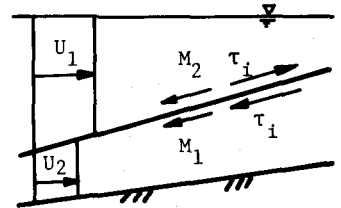


図-6 連行に伴う付加応力

$$\partial \rho_3 / \partial t = (\rho_2 - \rho_3) w_{e23} / h_3 \quad (24)$$

$$\partial h_3 / \partial t = -w_{e32} - w_{e23} \quad (25)$$

3. 相互連行係数と平均水理量との関連

本研究においては界面を通しての輸送を相互に考えているので、この移流速度を従来の取り扱いと区別する為に相互連行速度と呼び、又これらを表わす慣用的な連行係数についても相互連行係数と呼ぶことにし、添字を用いて連行層、被連行層を示すこととする。相互連行係数を用いて記述する場合にどのような代表流速を用いるのが妥当か、又相互連行係数の普遍的な関数形は何か、について検討を行った。

3-1 代表流速について

ある界面に着目したとき、その界面での相互の連行速度を規定する代表速度として相対速度差の絶対値が考えられる。例えば第1界面について考えると次のように記述し得る。

$$w_{e12} = E_{12} |U_1 - U_2|, \quad w_{e21} = E_{21} |U_1 - U_2| \quad (26)$$

ここに E_{12} , E_{21} は第1層から第2層への、又第2層から第1層への連行の相互連行係数である。式(26)の表示では $U_1 = U_2$ のときには界面の位置は変化しない結果となり、密度分布の時間変化を示した図-2(a)の結果と同一となりこの限りにおいては妥当性が示されている。又この流速の組合せの場合には相互連行速度はゼロとなり、上下層への流質の輸送が存在しないことを式(26)は示している。しかし図-2(b)の結果では、流速が等しくても流質の上下への輸送が認められ式(26)の記述方法では矛盾が生じる。又連行係数は多くの研究により、層平均のリチャードソン数の関数として表示できることが知られている。そこで式(26)~(28)を用いて実験結果より求めた相互連行速度より式(26)を用いて相互連行係数を計算し、層平均のリチャードソン数に対して整理したのが図-7である。この場合の層平均リチャードソン数では代表速度として相対速度差を用い $R_{ij} = g(\rho_i - \rho_j)h_j / (\rho_j(U_j - U_i)^2)$ である。データは太線で囲んだ枠の中に不規則にプロットされ、このような代表速度では記述し得ないことを示している。

相互の連行では被連行層の状態として次のような前提を考えている。まず第1に十分に乱流であること、次に界面は不安定で乱れ速度によって界面を通過する輸送が可能であることである。このような前提の下での一方向の連行は、界面近傍の流質を界面より分離させ浮力効果に逆って連行層に混入させる能力のみを考えればよいことになる。従って相互の連行は、連行層のみの速度の大きさによって決定されると考えてよい。したがって次のように記述することとする。

$$w_{eij} = E_{ij} |U_j| \quad (27)$$

式(27)の記述で $E_{ij} = E_{ji}$ が成立するかどうかを検討する為に、相互連行速度の比と速度の大きさの比をプロットしたのが図-8である。 $E_{ij} = E_{ji}$ ならば図中の直線の周りにプロットされるが、この図からわかるように、それぞれ異なった関数形を定める必要がある。又データは第1, 3象限に位置し、相互連行の総和は速度の大きい側へ生じることが確認された。

3-2 相互連行係数 E_{ij} について

E_{ij} は界面での安定、不安定を示す量及び混入した流質を連行層内で浮力に逆って浮遊させる能力を示す量の関数と考えられる。しかし、3-1で述べた前提の下で考える場合には E_{ij} は連行層

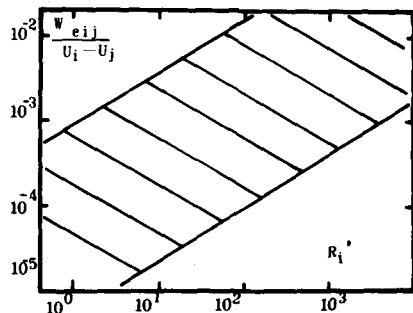


図-7 速度差を用いた相互連行係数

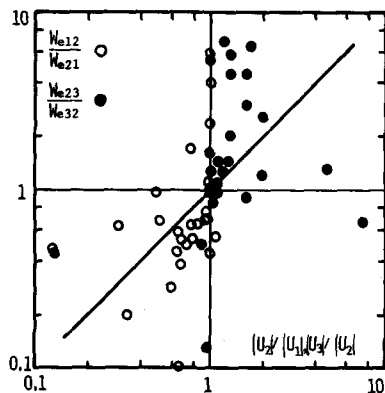


図-8 相互連行係数の同一性の検討

での流質の浮遊能力のみの関数と考えられる。このような水理量として連行層での層平均リチャードソン数を用いて、関数形を実験より定めることを行った。加藤らは下層2層流の実験により、乱れの大きい方が連行係数が大きくなることを示しており、乱れの大きさが相互連行係数にも影響を及ぼすことが予測される。3層系の中間層（第2層）では密度勾配が大きく、乱れが抑制されるので、他の層に比べて乱れが小さくなり、乱れの構造の差異が存在する。そこで上記のことを考慮して、中間層を連行層とする場合と被連行層とする場合とに分けて整理を行った。層平均リチャードソン数 R_{ij} を次のように定義する。

$$R_{ij} = \frac{g |\rho_i - \rho_j| h_j}{\rho_i U_j^2} \quad (28)$$

式(28)で定義される相互連行係数 E_{ij} を式(28)で定義した連行層での層平均リチャードソン数に対して上下層の流向が同じ場合でのデータをプロットしたのが図-9、10である。図-9は中間層を連行層とする場合であり、この場合にはデータは R_{ij} の(-1)乗の直線の周りに分布している。又図-10は中間層を被連行層とする場合で、データは R_{ij} の(-3/2)乗の直線に対応している。これら両図は、相互連行係数は連行層の層平均リチャードソン数の関数形で記述できることを示しており、又その関数形は中間層への連行、被連行のそれぞれの場合についてべき乗を異にしていることがわかる。

中間層を連行層とする場合 E_{12} , E_{32}

$$E_{ij} \sim R_{ij}^{-1} \quad (29)$$

中間層を被連行層とする場合 E_{21} , E_{23}

$$E_{ij} \sim R_{ij}^{-3/2} \quad (30)$$

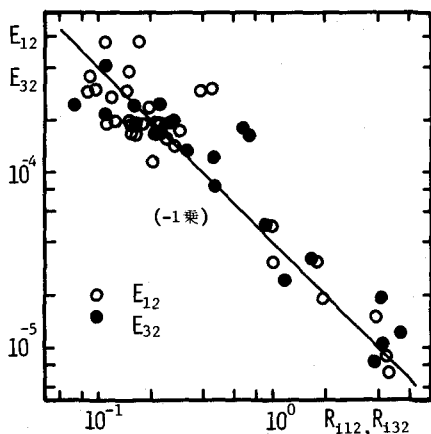


図-9 中間層を連行層とした相互連行係数

次に流向が異なる場合について検討を行う。この場合には、実験では中間層内に流向の変化する無流面が存在し、単純に層平均の流速を計算すると小さくなり過ぎ、反対にこの値を基にした層平均リチャードソン数は大きくなり過ぎる。このリチャードソン数を用いてデータを整理すると散乱が激しく、関数形を得ることができない。そこで、相互連行係数を求める場合には式(28)を用いたが、層平均リチャードソン数の計算では、代表速度として相対速度差を用いて整理したのが図-11である。 $R'_{ij} = g |\rho_i - \rho_j| h_j / \rho_i (U_i - U_j)^2$ であり、流向の異なる場合の相互連行係数は

$$E_{ij} \sim R'_{ij}^{-3/2}$$

となる。しかし基本的には、流向が同じ向きの場合と同様な層平均リチャードソン数の関数と考えているので、さらに検討を要すると思われる。

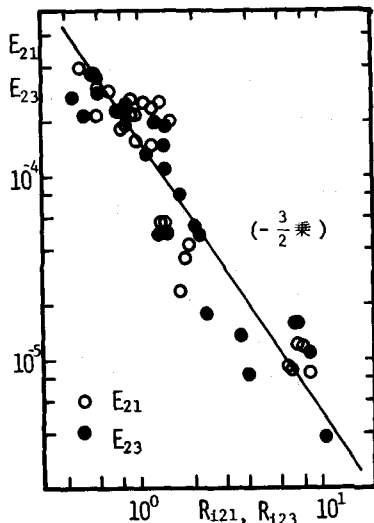


図-10 中間層を被連行層とした相互連行係数

4. 実験の概要

界面でのせん断応力による混合現象を、場所的変化としてではなく時間変化の現象として再現し、実験を行うことは精度良く測定する為の制御が容易である利点を有している。そこで本研究では図-12に示す2重円筒水槽を用いて実験を行った。この水槽は粗度を付した上板、下板が独立に速度及び向きを変えて回転でき

るように製作されており、塩水と淡水とで成層した水槽内の流体を界面を境として種々の流速の組合せで回転させることができる。初期に塩水と淡水とで成層状態を作り、上下板を所定の速度で回転させると界面には内部波が発達し、この波の砕波によって上下方向に流質の移動が生じ、この結果界面の位置及び密度分布の時間変化が出現する。この密度分布の変化の様子をある時間間隔ごとに導電率計を用いて測定し、併せてその時点での流速分布を水素気泡法を用いて測定した。界面での混合の様子を、界面を挟んで2種類の色素を流入し可視化によって観察を行った。それによると吉田ら⁵⁾によって指摘されている内部波の砕波現象が出現していることが確認された。又本装置は2次流の発生をできるだけ抑えるように作られており、可視化及び断面内での密度分布の測定により確認を行った。相互連行現象では、界面が不安定であることを前提としているので、不安定性のチェックを行った。玉井ら⁶⁾は柏村らの河口流出の結果及び限界クーリガン数の値より

$$\Gamma = R_0^{0.667} F_d^{0.196} < 2.43$$

の安定条件式を得ているので、この式によりチェックを行った。式④による判別では、実験ケースの9割近くが不安定の前提を満たしており、可視化による内部波の発生、砕波の観察結果と一致している。

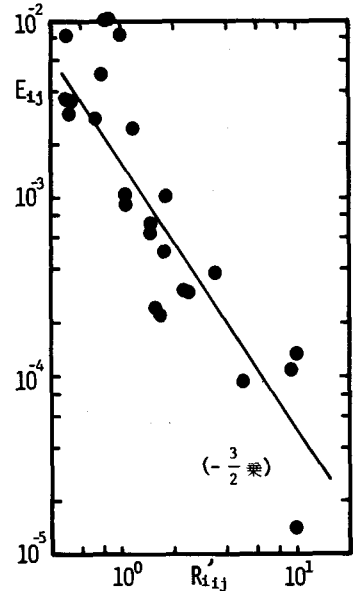


図-11 相互連行係数(流向逆)

5. まとめ

得られた結果をまとめると次のように書くことができる。

- (1) 相互の連行を考えることにより、体積、質量、運動量の界面での上下方向への輸送を混乱なく統一的に記述することができる。
- (2) 相互連行の記述によると、界面位置が変化しない場合にも界面を通しての流質の輸送の存在を示すことができ、現象を忠実に表現することができる。
- (3) 相互連行速度は連行層の流速の大きさのみに比例し、相互連行係数は連行層の層平均リチャードソン数の関数として記述される。しかし、中間層を連行層、被連行層とする場合には関数形自身は異なり、相互連行係数はそれぞれ層平均リチャードソン数の (-1) 乗、 $(-3/2)$ 乗となる。

〈参考文献〉

- 1) 須賀堯三：感潮河川における塩水くさびの水理に関する基礎的研究，土木研究所資料，1537号，1979。
- 2) 玉井信行：連行を考慮した漸変成層流の基礎方程式，土木学会論文報告集，第324号，1982。
- 3) 玉井信行・菅和利：密度、運動量の分散を考慮した塩水くさびの解析法について，第26回水理講演会論文集，1982。
- 4) 加藤始・中野晋・池田高則：下層2層流の実験(2)，第29回海岸工学講演会論文集，1982。
- 5) 吉田静男：密度界面における混合機構の研究，土木学会論文報告集，第273号，1978。
- 6) 玉井信行・浅枝隆：淡塩2層境界面における抵抗係数について，土木学会論文報告集，第271号，1978。
- 7) 菅和利・玉井信行：塩水くさび界面における連行速度について，土木学会第37回年講，1982。
- 8) Hino, M. and et al. : Second Int. Symp. on Stratified Flows, vol2, 1980。
- 9) Moore, M.J. and Long, R.R. : J. Fluid Mech. , vol 49, 1971。

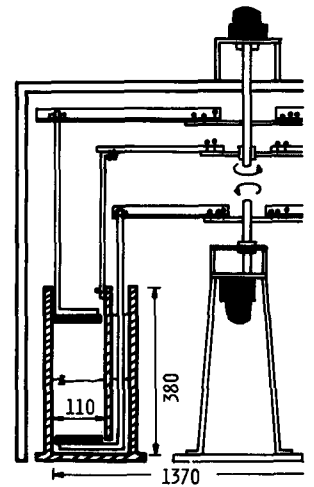


図-12 実験水槽