第27回水理講演会論文集　1983年２月

粘性および拡散の効果を考慮した二層密度流の固有値および固有関数

The Eigen-value and Eigen-function of Viscous − Diffusive Stratified Two Layered Flows

東京工業大学　正会員　日　野　幹　雄
建 設 技 研　正会員　Nguyen Son Hung
東京工業大学　正会員　長谷部　正　彦

要　旨

昨年の水理講演会で著者らは，塩水楔型の粘性・拡散性をもつ二層密度流の固有値には３つのグループが存在し，流速と密度分布の遷移層厚さの比が流れの存在界面波の種類と密接な関係があることを指摘した。

本研究では，塩水楔型とともに剪断流型についていくつかの水理条件（Prandtl数，Richardson 数）での安定性を調べ，さらに求めた３つのグループの固有値に対する固有関数を求め流れの状態を調べる。

1. 基礎方程式

本研究では粘性，拡散性，非圧縮性流体の平行流の安定問題を取り扱い，さらに粘性係数および拡散係数は鉛直方向の座標の関数であると考える。この時，運動方程式，拡散方程式および連続方程式は，下記のようになる。

$$\rho\frac{Du}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\nabla^2u+\frac{d\mu}{dz}\left(\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

$$\rho\frac{Dv}{Dt}=-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\nabla^2v+\frac{d\mu}{dz}\left(\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{1}$$

$$\rho\frac{Dw}{Dt}=-\rho g-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\nabla^2w+2\frac{d\mu}{dz}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)$$

$$\frac{D\rho}{Dt}=\nabla\left(K\nabla\rho\right) \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=0 \tag{3}$$

流速，圧力，密度を次のようにおく。

$$\begin{aligned}
&u=(U(z)+u',\ v',\ w')\\
&p=p_0+p'\\
&\rho=\sigma(z)+\rho'\\
&W=W(z)\,e^{i(kx+nt)}\\
&\rho=\rho(z)\,e^{i(kx+nt)}
\end{aligned} \tag{4}$$

(4)式を運動方程式，拡散方程式および連続方程式に代入し擾乱が存在しないそれぞれの方程式を考慮し，２次以上のオーダーの項を省略して線型化し，さらに(1)，(2)，(3)式を無次元化し，Boussinesq　近似を行なうと，wに関しての６階常微分方程式が得られる。（詳細は，文献(1)を参照されたし）

$$\begin{aligned}
&w^{(6)}-\alpha\left[3\alpha+i(U-C)Re(1+Pr)\right]w^{(4)}-2i\alpha ReU^{(1)}w^{(3)}+\left[3\alpha^4+2iRe\alpha^3(1+Pr)\right.\\
&(U-C)-\alpha^2PrRe(U-C)^2\left.\right]w^{(2)}+2i\alpha Re(\alpha^2U^{(1)}+U^{(3)})w^{(1)}-\left[\alpha^6+i\alpha^5Re(U-C)\right.\\
&(1+Pr)-\alpha^4PrRe^2(U-C)^2-\alpha^2PrRe^2U^{(2)}(U-C)-i\alpha ReU^{(4)}+PrRe^2Ri\alpha^2\left.\right]w=0
\end{aligned} \tag{5}$$

ここに，

$z=z/h_r$, $U=U/Ur$, $C=C/Ur$, $\alpha=khr$, $Pr=\nu_r/Kr$, $Re=Urhr/\nu_r$, $Ri=-ghr\sigma_0^{(1)}/Ur^2$ である。

hr，Ur，σ_r，μ_r，Kr はそれぞれの代表長さ，流速，密度，粘性係数および拡散係数である。

境界条件として，下層の固定した底面における擾乱に対する条件は

$$w = w^{(1)} = \rho = 0 \quad (z = z_0) \tag{6}$$

となり，上層の自由表面における境界条件は，次のようにした。

$$w = w^{(1)} = \rho = 0 \quad (z = z_f) \tag{7}$$

2. 計算方法

安定性問題の数値解法には，差分法，直交関数法，直接積分と直交化法などがあるが，本研究では，直接積分と直交化法を採用し，固有値および固有関数を求める。(Roberts & Shipman　1972)。

2.1 固有値

(5)式の6階の常敏分方程式は，下記のようにして6個の1階常微分方程式系に変換しうる。

$$Y_1 = w,\ Y_2 = w^{(1)},\ Y_3 = \rho,\ Y_4 = \rho^{(1)},\ Y_5 = w^{(2)},\ Y_6 = w^{(3)} \tag{8}$$

$$\frac{d}{dz}\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, \\ f_{41}, & 0, & f_{43}, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 1, \\ f_{61}, & f_{62}, & f_{63}, & 0, & f_{65}, & 0, \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \\ Y_4 \\ Y_5 \\ Y_6 \end{pmatrix} \tag{9}$$

ここに

$$f_{41} = \frac{PrPe}{k}\sigma^{(1)}\ ,\quad f_{43} = \alpha\left\{\alpha + i\,(U-C)\frac{PrRe}{k}\right\}$$

$$f_{61} = -\alpha\left[\,iRe\frac{\sigma}{\mu}\left\{(U-C)\,\alpha^2 + U^{(2)}\right\} + iRe\frac{U^{(1)},\ \sigma^{(1)}}{\mu} + \alpha^3 + \frac{\mu^{(2)}}{\mu}\right] \tag{10}$$

$$f_{62} = \alpha\left\{2\frac{\mu^{(1)}}{\mu}\alpha + iRe\frac{\sigma^{(1)}}{\mu}(U-C)\right\},\quad f_{63} = \alpha^2\ ReRi\frac{\sigma}{\mu\,\sigma^{(1)}}$$

$$f_{65} = i\,\alpha Re\frac{\sigma}{\mu}\left[\,(U-C) + 2\alpha^2 - \frac{\mu^{(2)}}{\mu}\right],\quad f_{66} = -2\frac{\mu^{(1)}}{\mu}$$

である。

$x_k(z)$ ($k = 1, 2, \cdots\cdots 6$) は，$z = z_0$における初期値が次のように指定された1階の常微分方程式系の特解とする。

$$x_k(z_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \\ k \\ \\ \\ m \end{matrix} \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots\cdots, m) \tag{11}$$

(11) 式から初まる斉次方程式の解を求める。初期値の作る行列がY 1 (k，m) とする。

$$Y1\,(k, m) = [\,x_1,\ x_2 \cdots\cdots\cdots x_m\,] \tag{12}$$

本計算の場合には，行列Y 1の半分，$k = 1, \cdots\cdots k_0 - 1$ の部分は不要であり，初期値の設定する必要はない。一般解Y(z)は，これらの線型和で求まる。

Y 1 (k，m) を求めるには，Runge − Kutta − Gill法で，Δt間隔で，あるステップ Jm ステップの小区間ごとに数値積分を続行する。小区間の最終点で2つの解ベクトルY 1 (k．m) の独立性を確かめ，必要なら

ば，Gram − Schmidt 法により直交化を行う。ただし，全区間の積分の最終点（Jmax）では，必ずGram − Schmidt の直交化を行ない，この解を全体の解行列Y（m，k，jmax）に移す。

$$Y(m,\ k,\ jmax) \longleftarrow Y1(k \cdot m)$$

このY（m，k，jmax）から固有関数を求める。

第Ng番目区間でのGram − Schmidt直交化前の粗解Y（m，k，j）より順次G − S直交化の効果を最終点より逆に及ぼして全区間を通じての直交化解を導く。

まず，ある区間でR. K. G. による数値積分を行い，その区間の最終端でG − S直交化を行う。これにより，この区間の解および逆に遡ぼった初期値も修正変換しなければならない。一つ一つこの修正を行うのが正攻法であるが，後でまとめのこの演算操作と同一の修正をするConte方法（1966）がRobert & Shipman（1972）により紹介されている。

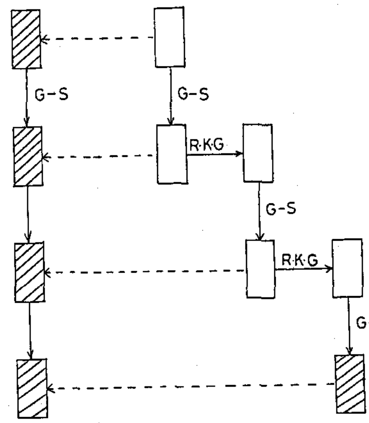


Fig.1

2.2 固有関数

独立なm個の斉次解Y（m，k，j）から固有関数を求める。いま，各々の独立な斉次解を

$$Y^{(k)}(z) = \begin{pmatrix} Y_1^{(k)}(z) \\ Y_2^{(k)}(z) \\ \vdots \\ \vdots \\ Y_m^{(k)}(z) \end{pmatrix} \quad (k = 1,\ 2,\ \cdots\cdots\cdots m) \tag{13}$$

とすると，一般解は特解が0であることから，次式で表わさる。

$$Y(z) = \beta Y^{(1)}(z) + \beta_2 Y^{(2)}(z) + \cdots\cdots\cdots\cdots + \beta m Y^{(m)}(z) \tag{14}$$

ところで，$z = z_0 = 0$で始めの（k − 1）番目までの成分が零であるので,(15)式となり，この連立方程式を

$$\begin{aligned} 0 &= Y_{k_0}^{(k_0)}(t_f)\,\beta_{k_0} + Y_{k_0}^{(k_0+1)}(t_f)\beta_{k_0+1} \cdots\cdots\cdots + Y_{k_0}^{(m)}(t_f)\beta_m \\ 0 &= Y_{k_0+1}^{(k_0)}(t_f)\,\beta_{k_0} + Y_{k_0}^{(k_0+1)}(t_f)\,\beta_{k_0+1} \cdots\cdots\cdots \\ &\vdots \\ 0 &= Y_m^{(k_0)}(t_f)\,\beta_{k_0} + Y_m^{(k_0+1)}(t_f)\,\beta_{k_0+1} \cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{15}$$

解けば良い。ここに，$Y_m^{(k)}(t_f)$で，添字kは，初期値設定による独立性の番号，mは，解ベクトル$Y^{(k)}$のm成分である。

3. 流速，密度分布および局所的Richardson数の分布

流速分布は，塩水楔型二層密度流の流速分布を考えて，次のように与える。

$$\begin{aligned} U(z) &= A + B\ \tanh(z / Lu) \quad &(z > zu) \\ U(z) &= az^2 + bz + c \quad &(z \leqq zu) \end{aligned} \tag{16}$$

密度分布は，成層した二層密度流の多くの実験結果から判断して，次の近似式を与える。

$$\sigma(z) = exp\left[-\frac{\gamma}{R}\tanh(Rz)\right] \tag{17}$$

ここに，Rは流速と密度分布の遷移層厚さの比である。

局所的Richardsonの分布は，次のように定義され，(18)式となる。

$$\begin{aligned} Ri(z) &= J_0 \frac{(1-\tanh^2 Rz)}{[2B\tanh z(1-\tanh^2 z)]^2} \quad (z > zu) \\ &= J_0 \frac{(1-\tanh^2 Rz)}{[2az+b]^2} \quad (z \leqq zu) \end{aligned} \tag{18}$$

ここに，J_0は，大域的Richardson数で，次式で定義される。

$$J_0 = ghr \cdot \gamma / Ur^2 \tag{19}$$

次に，shear flow型の流速分布，局所的Richardson数分布は，次式で示される。

$$\begin{aligned} U(z) &= 1 + \tanh z \\ Ri(z) &= J_0 \{1 - \tan^2(Rz)\} / \{1 - \tanh^2 z\}^2 \end{aligned} \tag{20}$$

4. 計算の結果と検討

塩水楔型および剪断流型の場合について，表－1に示す条件で，計算を行った。固有値は塩水楔型の場合についてはほゞ中立状態であり，剪断流型では不安定領域にある。

擾乱波の固有関数は，固有値の実数部（すなわち，擾乱波の波速）が零に近い場合には界面付近に中心をもつ渦であり，固有値の実数部Crが平均流速より大きい場合には，流速の大きい上層に中心をもつ渦であることが示された。（図－2）したがって，第3の固有値（$0 < Cr < 1$）に対しては流速の小さい下層に中心をもつ渦である。これらの渦ないしは界面波のうち上下層のものは，前報（1982）でも指摘したように実験的に見出された界面波に対応している。

参考文献

(1) 日野幹雄・Nauyen Son Hung；粘性および拡散の効果を考慮した成層二層密度流の安定性と界面波について，第26回水理講演会論文集，2月，（1982）

(2) 日野幹雄；成層流の乱流，谷一郎（編），流体力学の進歩一乱流，丸善（1980）

(3) Roberts，S. M. and J. S. Shipman；Two-Point Boundary Value Problem；Shooting Methods,American Elsegier Publ. Comp.，New York，（1972）

Shear Flow		Saline Wedge	
Z_0 = -3.0	-	-	-
Z_f = 3.0	-	-	-
ΔZ = 0.01	-	-	-
Pr = 0.72	-	-	-
Re = 50	-	-	-
Ri = 0.15	-	-	-
α = 0.70	-	-	-
Cr =1.975	Cr = 1.0	Cr = 0.02	Cr =1.143
Ci =-0.070	Ci =-0.036	Ci =-0.083	Ci =-0.138

Table 1

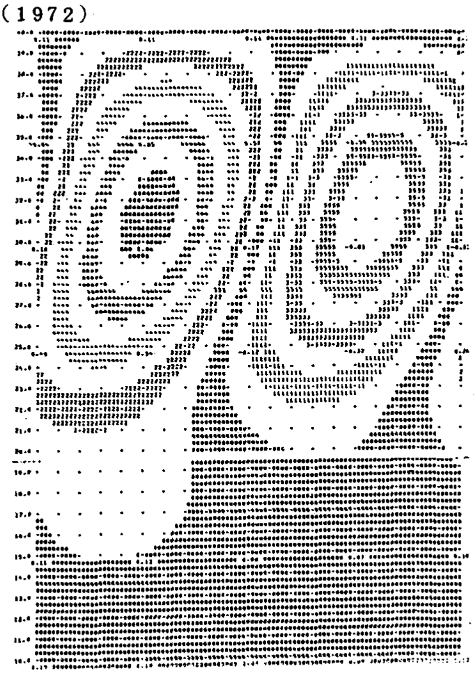
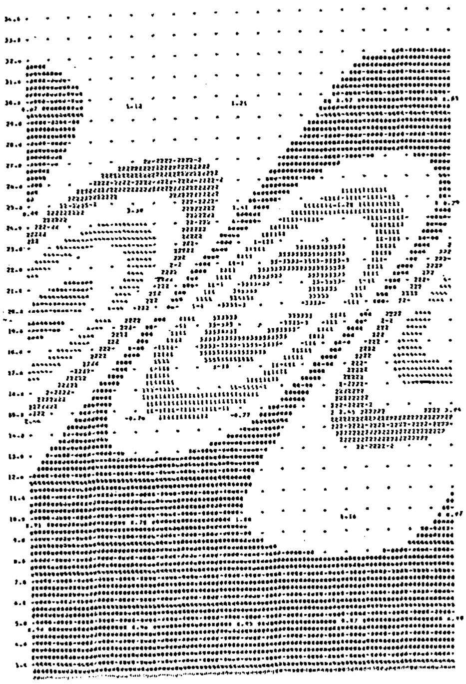
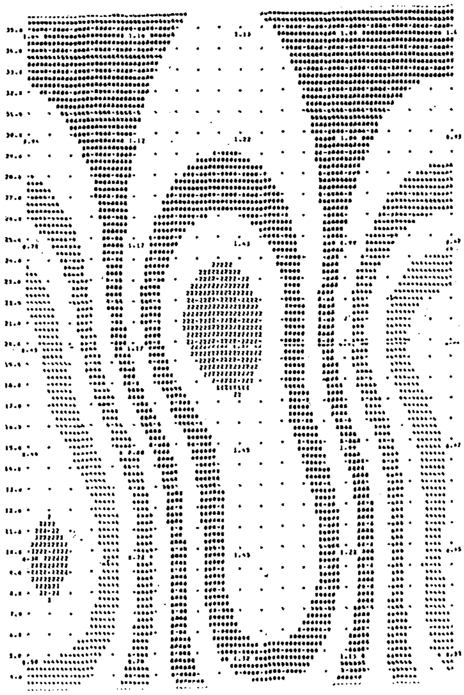


Fig.2(a)　Cr = 1.975



Cr = 1.0

Fig.2(b)



Cr = 0.02

Fig.2(c)