

非定常確率過程における地下水頭の予測と透水(量)係数の空間分布の推定

Estimation of Groundwater Head and Transmissivity
under Unsteady Stochastic Process

九州大学工学部 正 員 上 田 年比古
九州大学大学院 学生員 平 野 文 昭
九州大学工学部 正 員 神 野 健 二

1. まえがき

透水係数あるいは透水量係数は広域地下水の流動解析の精度を左右する重要な要素である。従来この係数は揚水試験や室内試験などの実測から求めているが、これらは試験方法や適用する式によってかなり相違し、誤差を含んだ値と考えねばならない。また透水係数は地下水流の基礎方程式(ラプラス式)を用いて、地下水頭からも求められるが、これも地下水頭の観測誤差および上下から領域への流出入量と境界条件の不明確さなど、基礎式に正確に導入しえない事項のため、算定される透水係数にも誤差が含まれると考えられる。したがって透水係数および地下水頭の観測値が地下水領域内の数箇所にある場合、これから領域内の透水係数の最適な空間分布を求める手法として、まず最小2乗法的な考えがある。すなわち、水頭の観測値 h^* と、定常地下水の運動方程式に透水係数の最適値 $\hat{k}$ を入れてえられる水頭 $\hat{h} = f(\hat{k})$ との残差の2乗和と透水係数の観測値 k^* とその最適値 $\hat{k}$ との残差の2乗和に重み λ をかけた値との和すなわち次式に示す J を最小にする k を求めることが考えられる。

$$J = \sum (h^* - f(\hat{k}))^2 + \lambda \sum (k^* - \hat{k})^2 \quad (1)$$

この考えに基づいて透水(量)係数の最適値を求めているのがNeumanら¹⁾²⁾である。しかしこの手法の適用は、地下水頭が定常の場合であって非定常状態で水頭の観測値が次々に変化しながら追加集積されてゆく場合の適用は無理であろう。

さて、カルマンフィルター理論は、測定値群に最もよく合う値(残差の2乗和を最小にする値)を求めるいわゆる最小2乗法と原理は同じである。ただ、順次新しい情報(観測値)が追加されるに依じて、その新しい情報を加えながらオンラインで、その時点までの全情報に対し最適な値を算出してゆくことに最大の長所がある。したがって本報のように、非定常現象で水頭の観測値が集積されてゆく状況下で、水頭および透水係数の推定値を順次修正しながら最終の最適推定値を求める計算には、現在のところ、カルマンフィルターの理論による外はないと考える。周知のようにカルマンフィルター理論では、水頭 h と透水係数 k に関する状態方程式と観測方程式が必要である。さきに、Wilsonら³⁾は、この地下水の非定常状態について、カルマンフィルター理論を適用して透水係数の同定を行っているが、このとき、透水係数の状態方程式として

$$k_{ij}^{v+1} = k_{ij}^v \quad (v: \text{時点}, i, j: \text{地点の座標番号}) \quad (2)$$

を用いている。

本報では、式(2)の代りに新たに透水係数に関する状態方程式を提案し、これと水頭に関する状態方程式として、Wilsonらも用いている地下水流の基礎式(ラプラス式)を用い、これに慣用の観測方程式を加えて、カルマンフィルター理論による計算を行った。すなわち本報は、帯水層パラメータのうち貯留係数、有効空隙率は一応与えられている場合について、広域の地下水領域内の透水(量)係数の観測値および非定常状態の地下水頭の観測値を最大限に用いて、カルマンフィルター理論により、領域内の最適な透水(量)係数の空間分布および地下水頭の予測値を算定する手法をのべ、次いでこれを、平面2次元非定常被圧地下水に適用し、その結果を検討したものである。

2. カルマンフィルター理論による定式化と算定過程

2.1 システム状態方程式

(1) 地下水頭に関する運動方程式

準一様流を仮定できる平面2次元の被圧または不圧浸透領域の非定常地下水流の基礎方程式は、

$$S \partial h / \partial t = \partial / \partial x (k_x \cdot b \cdot \partial h / \partial x) + \partial / \partial y (k_y \cdot b \cdot \partial h / \partial y) - \sum_m Q_m \delta(x - x_m) \delta(y - y_m) - R(x, y) \quad (3)$$

ここに S は被圧地下水では貯留係数、不圧地下水では有効空隙率、 k_x 、 k_y はそれぞれ x 、 y 方向の透水係数、 h は被圧では地下水頭、不圧では水深(ここでは不透水層は水平としておく)、 b は被圧では帯水層厚さ、不圧では水深 h 、 x_m 、 y_m は井戸 m の x 、 y 座標、 Q_m はその揚水量、 δ はデルタ関数、 $R(x, y)$ は帯水層の単位面積、単位時間あたりの流出入量で流出を+とする。式(3)は被圧の場合、 h に関して線形の微分方程式となるが、不圧の場合は、 h に関し非線形の微分方程式となり、カルマンフィルターの適用がかなり複雑となる。本報では、一般に使われている線形のカルマンフィルターを使用する場合を対象にすることにして、不圧の場合、式(3)の b (ここでは h) には、各時間ステップ毎の算定過程で、1ステップ前の h を近似的に用いるか、あるいは地下水面の時間変動が少ないときは時間的平均値を用いることによって、式(3)を h について線形化して考えることにする。こうすれば、以下のことは不圧の場合にも近似的に適用できると考える。また以下の説明では透水係数を取扱っているが、透水量係数 $T_x = k_x \cdot b$ 、 $T_y = k_y \cdot b$ についても同様である。

いま、流れの解析にあたって領域を三角形要素に区分し、式(3)に重み付残差法を適用すれば、各節点の地下水頭 h_i を未知数とする連立方程式がえられ、これをマトリックス表示すれば、

$$A_h \dot{h} + B_h h + Q + R = 0 \quad (\cdot \text{印は時間微分を示す}) \quad (4)$$

ここに A_h は貯留係数と節点座標を含む係数行列、 B_h は透水係数、帯水層厚さ b 、節点座標を含む係数行列、 h は節点の地下水頭ベクトル、 Q は井戸の揚水量ベクトル、 R は漏水量ベクトルである。地下水頭 h を分割して、 h_1 を領域内任意節点の地下水頭、 h_2 を境界条件を設定する境界の節点の地下水頭とし、式(4)を小行列に分割すれば、

$$\begin{bmatrix} A_{h11} & A_{h12} \\ A_{h21} & A_{h22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{h}_1 \\ \dot{h}_2 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} B_{h11} & B_{h12} \\ B_{h21} & B_{h22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{すなわち、} A_{h11} \dot{h}_1 + A_{h12} \dot{h}_2 &= -(B_{h11} h_1 + B_{h12} h_2) - Q_1 - R_1 \\ A_{h21} \dot{h}_1 + A_{h22} \dot{h}_2 &= -(B_{h21} h_1 + B_{h22} h_2) - Q_2 - R_2 \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

地下水流動の方程式は、式(6)の第一式で表わされ、これをimplicit法で差分化すれば、

$$h_1^{v+1} = \phi_h h_1^v + \psi_h + F \quad (7)$$

ここに、 $\phi_h = [A_{h11} + \Delta t B_{h11}]^{-1} A_{h11}$ 、 $\psi_h = -[A_{h11} + \Delta t B_{h11}]^{-1} \{ \Delta t B_{h12} h_2^{v+1} + A_{h12} (h_2^{v+1} - h_2^v) \}$ 、 $F = -[A_{h11} + \Delta t B_{h11}]^{-1} \Delta t \cdot (Q_1 + R_1)$ 、

v は時間ステップ数、 Δt は時間きざみ。式(7)にシステム雑音を加えて水頭の状態方程式をうる。

(2) 透水係数に関する空間分布式

沖積作用など透水性地盤の形成過程から考えて、広域の浸透領域における透水係数は大局的にみてゆるやかな変化を示し、場所的に近接する隣り同士が全く関連なく、個々独立に変化はしないと考えてよからう。したがって透水係数の空間分布を示す式として、一般的には次の n 次の回帰モデルを考えることができよう。

$$\alpha_n \partial^n k / \partial x^n + \alpha_{n-1} \partial^{n-1} k / \partial x^{n-1} + \cdots + \alpha_1 \partial k / \partial x + \beta_n \partial^n k / \partial y^n + \beta_{n-1} \partial^{n-1} k / \partial y^{n-1} + \cdots + \beta_1 \partial k / \partial y + \gamma_0 k = 0 \quad (8)$$

ここに、 α 、 β 、 γ_0 は係数である。この式で $n=2$ とすれば、

$$\alpha_2 \partial^2 k / \partial x^2 + \beta_2 \partial^2 k / \partial y^2 = 0 \quad (9)$$

をうる。さて k に関する空間分布式として、どのような式が適当であるかは未だ不明であるが、Freezeら⁴⁾⁻⁶⁾ は、1次元および平面2次元の浸透領域について、領域をメッシュで分割し、各ブロックの透水係数の間の関係を統計的に検討した結果、透水係数 $k_{i,j}$ (i, j : 座標番号) の対数変換値 $Y_{i,j} (= \log k_{i,j})$ は隣接ブロックの透水係数(対数変換値)に依存するとした自己回帰式とそのまわり

にランダムに正規分布する確率変動分 $\varepsilon_{i,j}$ とからなるものとす。

$$Y_{i,j} = \{\alpha_x (Y_{i-1,j} + Y_{i+1,j}) + \alpha_y (Y_{i,j-1} + Y_{i,j+1})\} + \varepsilon_{i,j} \quad (10)$$

の関係式を提案している。いま式(9)を差分化すると、

$$k_{i,j} = \alpha_x (k_{i-1,j} + k_{i+1,j}) + \alpha_y (k_{i,j-1} + k_{i,j+1}) \quad (11)$$

ここに、 $\alpha_x = (2\alpha_2/\Delta x^2 + 2\beta_2/\Delta y^2) \cdot \alpha_2/\Delta x^2$ 、 $\alpha_y = (2\alpha_2/\Delta x^2 + 2\beta_2/\Delta y^2) \cdot \beta_2/\Delta y^2$ 。

となり、これは k の代りに k の対数変換値をとれば、Freezeの提案した式(10)の右辺第一項と同様の式となる。さらにまた Jain⁷⁾は確率場を因果的モデル、半因果的モデル、非因果的モデルに分類し、これらのモデルがそれぞれ2階の偏微分方程式のうち双曲型、放物型、楕円型に相当することをのべている。これに従えば式(9)はJainのいう非因果的モデルとなっていて、式(9)は一応一つの確率変動場を表わす式形であるといえる。以上の考察から、ここでは k に関する空間分布式を式(9)とし、これを水頭の関係式(3)に対応する透水係数の関係式とする。なお本報では式(9)において透水係数 k の代りに、Freezeらの研究に従って、 k の対数変換値 $Y (= \log k)$ を用いることにする。すなわち、

$$\alpha \partial^2 Y / \partial x^2 + \beta \partial^2 Y / \partial y^2 = 0 \quad (12)$$

さてここで、カルマンフィルター理論の計算で、この透水係数の空間分布式を水頭の状態方程式と結びつけて、各時間ステップ毎に、水頭と共に透水係数の推定値を算定して、漸次その最適値に収束する計算が行えるように、便宜上式(12)の右辺の0を $\partial Y / \partial t$ におきかえた次式を用いることにする。

$$\partial Y / \partial t = \alpha \partial^2 Y / \partial x^2 + \beta \partial^2 Y / \partial y^2 \quad (13)$$

なお後の例(図-3)でもわかるように、本計算で算定されていく透水係数の推定値は数ステップ後にはほぼ一定値に収束する。さて、式(13)について、式(3)の誘導と同様の操作を行えば、

$$A_k \dot{Y} + B_k Y = 0 \quad (\cdot \text{印は時間微分を示す}) \quad (14)$$

ここに、 A_k は節点座標からなる係数行列、 B_k は α 、 β と節点座標からなる係数行列、 Y は節点の透水係数の対数変換値のベクトルである。式(14)をimplicit法を用いて差分化すれば、

$$Y^{v+1} = \Phi_k Y^v \quad (15)$$

ここに、 $\Phi_k = [A_k + \Delta t B_k]^{-1} A_k$ 。式(15)にシステム雑音を加えて、透水係数の状態方程式をうる。

さて前述の式(2)はWilsonらが用いた透水係数の状態方程式であるが、この式だけから考える場合、各ブロックの透水係数は隣り同志関連がないことを表わしていると考えられ、透水係数の状態方程式としては式(2)より式(9)を用いる方が妥当であると考え。

(3) システム状態方程式と観測方程式

いま、地下水頭の状態量を $h^v(x_1(v) \sim x_N(v))$ 、透水係数(対数変換値)の状態量を $Y^v(x_{N+1}(v) \sim x_{N+M}(v))$ で示すと、システム系を表わす地下水頭と透水係数に関する状態方程式は、式(7)、(15)にシステム雑音として正規性白色雑音を加えて次式のように示される。

$$x(v+1) = \begin{bmatrix} h(v+1) \\ Y(v+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Phi_h(v) h(v) + \Psi_h(v) + F(v) \\ \Phi_k(v) Y(v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w_h(v) \\ w_k(v) \end{bmatrix} \quad (16)$$

ここに、左辺および右辺の h 、 Y は真の状態量、システム雑音 w_h および w_k はそれぞれ平均値0、分散 σ_{sh}^2 および σ_{sk}^2 の正規性白色雑音である。

次に、観測量を地下水頭に対し $y_1(v) \sim y_n(v)$ 、透水係数に対し $y_{n+1}(v) \sim y_{n+m}(v)$ とすると、観測方程式は、状態量に平均値0、分散 σ_{oy}^2 の正規性白色雑音 v を加えて、

$$y(v+1) = M(v+1) x(v+1) + v(v+1) \quad (17)$$

ここに、 $y(v+1)$ は $(v+1)$ ステップでの観測量、 $M(v+1)$ は観測行列、 $x(v+1)$ は $(v+1)$ ステップでのシステムの真の状態量、 $v(v+1)$ は雑音ベクトルである。

2.2 算定過程⁸⁾

カルマンフィルター理論による算定過程を要約する。用いる記号は、 $x(v+1)$: $(v+1)$ ステップでの x の真の状態量、 $\hat{x}(v+1|v)$: v ステップまでの情報からの、 $(v+1)$ ステップでの x の最

適推定値で、 $\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu) [= \mathbf{x}(\nu+1) - \hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu)]$ はその推定誤差。 $\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu+1) : (\nu+1)$ ステップまでの情報からの、 $(\nu+1)$ ステップでの $\mathbf{x}$ の最適推定値で、 $\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu+1) [= \mathbf{x}(\nu+1) - \hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu+1)]$ はその推定誤差。 $\mathbf{y}(\nu)$: ν ステップの観測量。 $\mathbf{K}$: カルマンゲイン行列。 $\mathbf{M}$: 観測行列。 $\mathbf{W}$: システム雑音行列。 $\mathbf{V}$: 観測雑音行列。 $\mathbf{I}$: 単位行列。

カルマンフィルタ理論によると、地下水頭に関して、

$$\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu) = \Phi_h(\nu) \hat{\mathbf{x}}(\nu|\nu) + \Psi_h(\nu) + \mathbf{F}(\nu) \quad (18)$$

透水係数(対数変換値)に関して、

$$\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu) = \Phi_k(\nu) \hat{\mathbf{x}}(\nu|\nu) \quad (19)$$

これらの推定誤差 $\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu)$ の共分散行列は、

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}(\nu+1|\nu) &= \mathbf{E} [\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu) \hat{\mathbf{x}}^T(\nu+1|\nu)] \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{P}_h(\nu+1|\nu) & \mathbf{P}_{hk}(\nu+1|\nu) \\ \mathbf{P}_{hk}^T(\nu+1|\nu) & \mathbf{P}_k(\nu+1|\nu) \end{bmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (20)$$

ここに、 $\mathbf{P}_h(\nu+1|\nu) = \Phi_h \mathbf{P}_h(\nu|\nu) \Phi_h^T + \mathbf{W}_h$

$$\mathbf{P}_{hk}(\nu+1|\nu) = \Phi_h \mathbf{P}_{hk}(\nu|\nu) \Phi_k^T$$

$$\mathbf{P}_k(\nu+1|\nu) = \Phi_k \mathbf{P}_k(\nu|\nu) \Phi_k^T + \mathbf{W}_k$$

上付き τ は転置、 $\mathbf{W}_h$ 、 $\mathbf{W}_k$ はそれぞれ地下水頭、透水係数のシステム雑音行列である。また、

$$\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu+1) = \hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu) + \mathbf{K}(\nu+1) [\mathbf{y}(\nu+1) - \mathbf{M}(\nu+1) \hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu)] \quad (21)$$

$$\text{ここに、} \mathbf{K}(\nu+1) = \mathbf{P}(\nu+1|\nu) \mathbf{M}^T(\nu+1) [\mathbf{M}(\nu+1) \mathbf{P}(\nu+1|\nu) \mathbf{M}^T(\nu+1) + \mathbf{V}(\nu+1)]^{-1} \quad (22)$$

$\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu+1)$ の推定誤差 $\hat{\mathbf{x}}(\nu+1|\nu+1)$ の共分散行列は、

$$\mathbf{P}(\nu+1|\nu+1) = [\mathbf{I} - \mathbf{K}(\nu+1) \mathbf{M}(\nu+1)] \mathbf{P}(\nu+1|\nu) \quad (23)$$

計算の出発点として、式(21)よりえられる

$$\hat{\mathbf{x}}(0|0) = \hat{\mathbf{x}}(0|-1) + \mathbf{K}(0) [\mathbf{y}(0) - \mathbf{M}(0) \hat{\mathbf{x}}(0|-1)] \quad (24)$$

に対して、先験情報として、平均値 $\hat{\mathbf{x}}(0|-1)$ 、分散 $\mathbf{P}(0|-1)$ の正規分布を与えて $\hat{\mathbf{x}}(0|0)$ を求め、その後は式(18)、(19)→式(20)→式(22)→式(21)→式(23)の順に $\nu=0$ から計算する。なお、式(18)、(19)は連立にとくもので、 Φ_h 中の透水係数 k には、各時間ステップでえられる式(19)の $\mathbf{x}$ (透水係数の対数変換値) を透水係数にもどして代入してゆく。

3. 計算例

3.1 計算の領域と現象

計算モデルとして図-1の一辺 1.2 km、帯水層厚さ 10 m の正方形被圧浸透領域をとり、その境界 B_1 、 B_2 は地下水頭を与え、 B_3 、 B_4 は不透水壁とする。この領域を 72 個の 3 角形要素に分割し、図の黒丸点を地下水頭と透水係数の観測点(ここでは水頭と透水係数の観測点は一致した場合を考えた)とし、この節点に節点番号の 1~9、その他の領域内節点に 10~25、境界節点に 26~49 の通し番号をつける。計算は B_1 、 B_2 の地下水頭を、始めに、それぞれ平均値 $\bar{H}_{B1} = \bar{H}_{B2} = 20.0$ m に保ち、次に B_1 の水頭だけ平均値 15.0 m に急激に下げた場合に発生する非定常流を対象にする。上述の、境界値に平均値と記した意味は、後述のように境界上の各節点の水頭は、雑音分だけ変化しているためである。

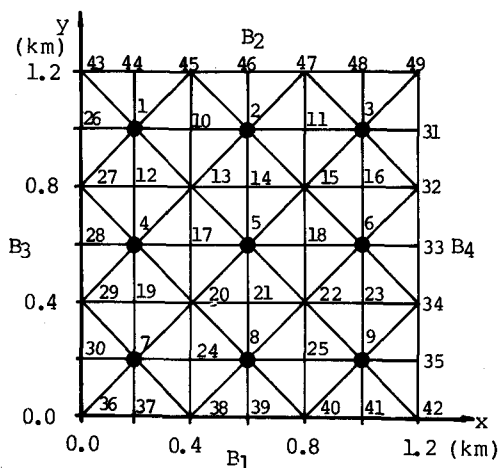


図-1 数学モデル

3.2 真値、観測値、境界値および計算上の諸数値の設定

本報では、予め透水係数と非定常状態の地下水頭に対して、それらの真値を領域内全節点に、またそれらの観測値を図-1の黒丸点(No.1~9)の節点に設定しておき、カルマンフィルターの計算では、このうち観測値のみを用いて、全節点の透水係数と水頭の推定値を算定し、これらと上述の真値および観測値と比較することにした。さて、水頭、透水係数などの変数の真値の発生は状態方程式(16)で表わされるように右辺第一項のようなある関係を示す式に従う値(解析解)に、右辺第二項のシステム雑音を加えた値として、水頭については空間的、時間的に変動しながらまた透水係数については空間的に変動して発生する。またわれわれが入手できる観測値は、観測方程式(17)のように、真値に観測誤差を加えた値としてえられる。いまこの考えのもとに、予め与える透水係数と地下水頭の各節点における真値と観測値を次のように設定した。

まず透水係数については、その対数変換値を用いることにして、一応線形回帰式

$$Y = \log k = -9 + 0.2 \times 10^{-2} x + 0.1 \times 10^{-2} y \quad (x, y : \text{m}) \quad (25)$$

よりえられる各節点の値に標準偏差 σ_{sk} ($=0.3 \text{ m/s}$ とした)で発生させた正規乱数をシステム雑音として加えて各節点の真値とする。また各観測節点(No.1~9)の観測値は、この真値に標準偏差 σ_{ok} ($=0.15 \text{ m/s}$)で発生させた正規乱数を観測雑音として加えたものとした。

次に地下水頭については、まず境界上の節点の真値として、初期値は B_1 、 B_2 共に標準偏差 σ_{sh} ($=0.1 \text{ m}$)で発生させた乱数をシステム雑音として水頭20mに加え、各時間ステップ毎の真値は同様にして各時間ステップ毎に σ_{sh} ($=0.1 \text{ m}$)で発生させた乱数を B_1 は水頭15m、 B_2 は水頭20mに加え、これを各時間ステップの水頭の境界条件とした。次に各時間ステップの B_1 、 B_2 および領域内の節点の水頭の真値は前述の透水係数の真値と境界 B_1 、 B_2 上の水頭の真値と1ステップ前の領域内の水頭の真値とを用いてえられる式(16)の右辺第一項の解(解析解)に σ_{sh} ($=0.1 \text{ m}$)で発生させた乱数を加え、No.1~9の水頭の観測値は水頭の真値に σ_{oh} ($=0.2 \text{ m}$)で発生させた乱数を加えたものとした。

次に計算にあたっては、前述のNo.1~9の9個の観測値については、その平均値を差し引いた値の対数値を透水係数に関する状態方程式と観測方程式に用いた。また式(3)の貯留係数 $S=0.03$ 、 $Q_m=R=0$ 、式(13)の $\alpha=\beta=10$ 、式(20)、(22)の W 、 V にはその対角要素は同じ値を与え、その値は W_h は σ_{sh}^2 、 W_k は σ_{sk}^2 、 V_h は σ_{oh}^2 、 V_k は σ_{ok}^2 を与え、非対角要素は0とし、式(22)の M には単位行列を与え、初期条件は式(24)の $x(0|-1)$ として、 B_1 、 B_2 および領域内のすべての節点について水頭 $h=17.5 \text{ m}$ 、領域内のすべての節点について一応 $\log k = 0$ を与え、 $P(0|-1)$ については、対角要素を水頭については100.0、透水係数については10.0とし、非対角要素を1.0とした。

なお計算に先き立って式(7)の ϕ_h と式(15)の ϕ_k の固有値を算定し、これがすべて0.0~1.0の間に存在していて、したがって方程式の解が発散せず差分計算が安定であることを確認した。

3.3 計算結果と考察

(1) 計算結果

図-2は透水係数と水頭の推定誤差共分散行列のトレース(各節点の推定誤差の2乗和)の各時間ステップの推移である。図-3は透水係数の観

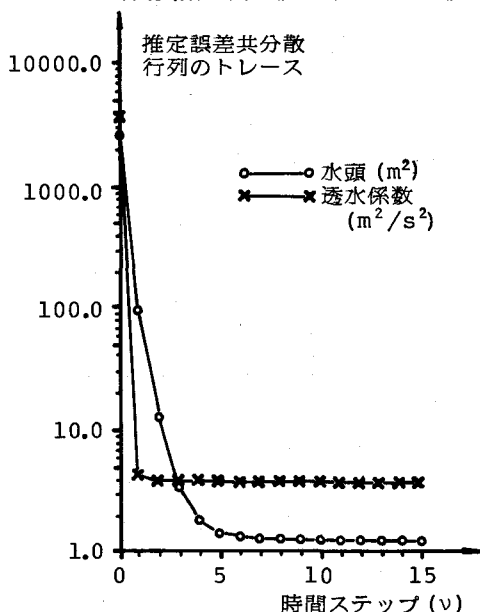


図-2 推定誤差共分散行列のトレース

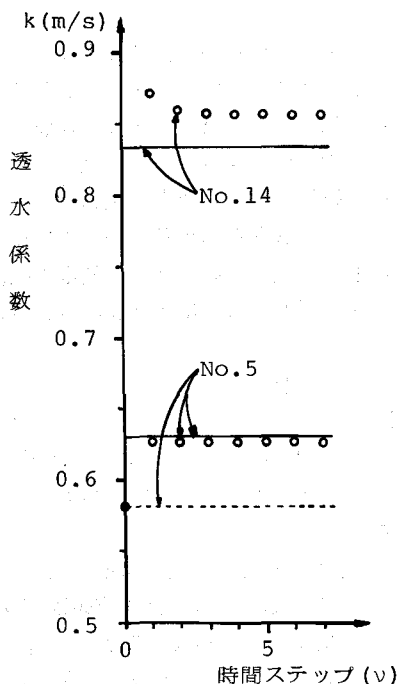


図-3 透水係数の推定値 $[\hat{k}(v|v)]$

○ : $\hat{k}(v|v)$
 — : 真値, - - - : 観測値
 (No. 5は観測点, No. 14は非観測点)

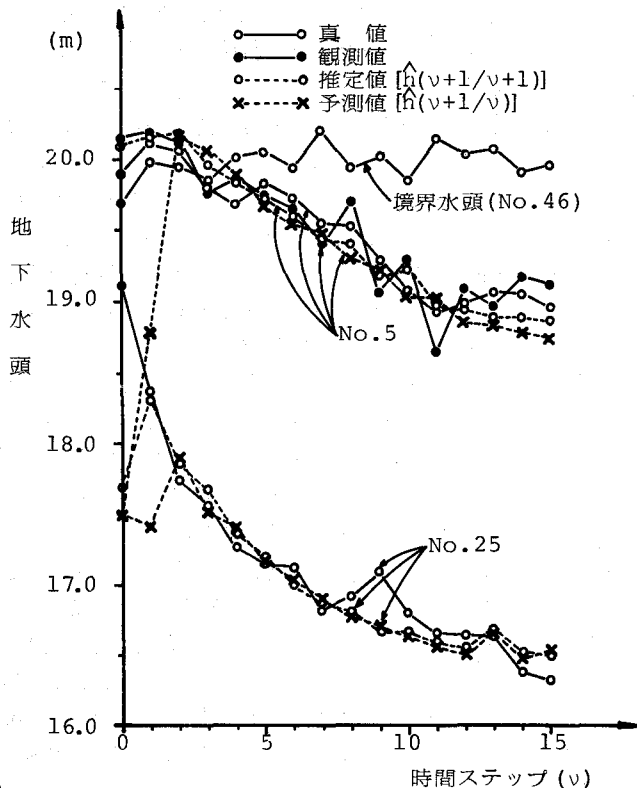


図-4 地下水頭の推定値

(No. 5は観測点, No. 25は非観測点)

測点No. 5と非観測点No. 14の結果で、図-4は地下水頭の観測点No. 5と非観測点No. 25の結果である。図-4にはNo. 46の設定した各時間ステップの境界水頭例を示している。

(2) 考察

図-2によると、共分散行列のトレースは時間ステップが進むにつれて漸次小さくなり、一定値に収束している。したがって、カルマンフィルターの理論からみて、本計算により最適な推定が行われていること⁹⁾およびトレース値がほぼ一定に達して後の透水係数と水頭の推定値は、与えられた観測値と与えられたシステム誤差、観測誤差のもとでの最適値になっていると考えられる。次に図-3、4で、推定値が真値に近いある値(最終推定値)に収束する速さをみると、透水係数については、観測の有無によって相違があるが、図-2とも考え合わせて、5ステップ程度までにはほぼ収束しているようである。また水頭では、非定常現象による真値の時間変動のため、収束の時点は明確ではないが、図-2とも考え合わせて判断するとほぼ7ステップ程度で収束していると考えられる。次に推定値は観測値よりも真値に近い、これは本計算法が真値の推定に十分有効であることを示すものといえる。なお確率的現象であることから観測値が偶然真値にきわめて接近することもあるが、この場合は推定値より観測値の方が真値に近い場合もありうるが、あくまで確率的な意味で真値の推定に有効であるとのべたものである。

4. 観測点の配置と推定精度との関係

表-1は節点の透水係数の推定誤差の2乗値を示し、この値が小さいと推定精度がよいことを示し

ている。Case 1 [(1)欄]は図-1についての前述の計算による値で、Case 2は図-1において、観測点の入れかえを行い、No.5を非観測点、No.15を観測点にした場合である。また表-1の推定誤差の2乗値の等値線図を図-5、6に示している。これらの結果から、①表-1で、観測点と非観測点との値の比較および(1)欄と(2)欄のNo.5、No.15の値の変化をみて、観測精度がある程度よければ(ここでは $\sigma_{ok}=0.15\text{m/s}$ としている)、推定精度は観測点が非観測点より非常によいといえる。

②非観測点の推定精度は観測点から離れるにつれ低下すると考えられ、表-1の(2)欄のNo.5の値は(1)欄のNo.15の値よりやや大きくなっている。これは、図-5、6からみて、図-6のNo.5は図-5のNo.15より、周囲の観測点からの隔たりが、総合的にみてやや大きいためと考えられる。(1)欄のNo.15は、観測点からの隔たりからみて、Case 1における精度の最悪の点と考えられるので、これよりCase 2のNo.5の精度がおちているということは、Case 2はCase 1より全体的にみて精度が低下しているとみてよい。したがって、観測点の配置は全体の推定精度に影響し、観測精度を同じとした場合領域全体の推定精度を上げるには、観測点の配置は均衡のとれた状態がよいといえる。なお、領域の透水係数が非常に不均一の場合は、透水係数の不均一も考慮に入れた観測点の均衡な配置を考える必要があると考えられる。

③非観測点で新たに観測を行えば、その点の精度は非常に向上し、またその周辺の非観測点の精度にも好影響を与えると考えられるので、既に観測点が配置されていて、これに新たに観測点を追加する場合は、推定誤差の最大の方非観測点に設定すればよいといえる。このように推定誤差最大の方非観測点に順次観測点を設定してゆけば、効率的な観測点の設定が行われると考えられる。

なお以上は透水係数についてのべたが、水頭の推定精度についても同様と考える。

表-1 透水係数の各節点の推定誤差の2乗値($\nu=15$)
[$\times 10^{-3}$]

		Case 1		Case 2	
		(1)		(2)	
観測点	No. 2	18.09	No. 2	18.09	
	5*	18.09	15*	18.09	
	8	18.09	8	18.09	
非観測点	11	92.17	11	92.16	
	14	92.17	14	92.17	
	15*	92.18	5*	92.19	
	18	92.17	18	92.17	
	23	92.17	23	92.17	

注) Case 1は図-1の場合、Case 2は図-1のNo.5を非観測点、No.15を観測点にした場合

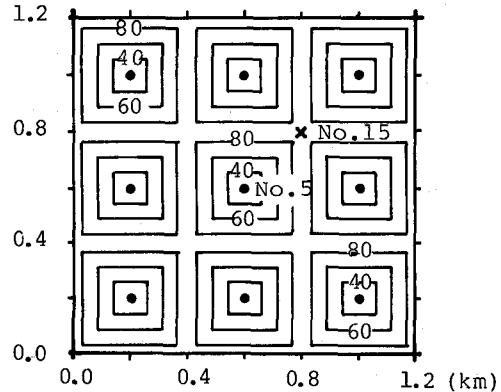


図-5 透水係数の推定誤差の2乗値(Case 1)
(図中数字は $\times 10^{-3}\text{m}^2/\text{s}^2$)

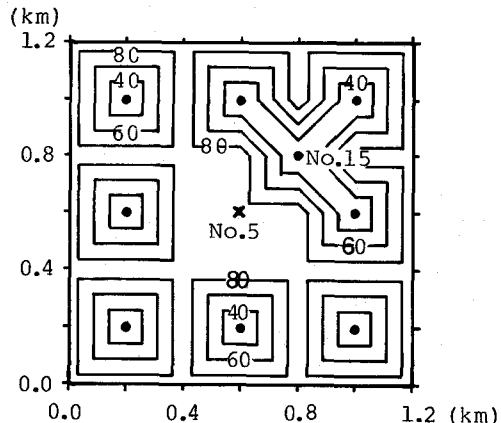


図-6 透水係数の推定誤差の2乗値(Case 2)
(図中数字は $\times 10^{-3}\text{m}^2/\text{s}^2$)

5. むすび

本報は広域2次元浸透領域内の透水(量)係数と非定常状態の地下水頭の観測値からシステム誤差と観測誤差を考慮して、カルマンフィルター理論を用いて透水(量)係数と地下水頭を推定する手法をのべ、次いで、その計算例として正方形の被圧浸透領域で一辺の水頭が急に下ったときの非定常状態について、領域内の限られた節点の透水係数と水頭の観測値およびそれらのシステム誤差と観測誤差を与えて計算を行い、結果の検討を行ったものである。えられた結果を要約すると次のようである。

(1) 本報により透水係数と非定常の水頭の観測値を最大限に利用して、最適の透水(量)係数および地下水頭の推定を行うことができる。なおカルマンフィルター理論で計算するにあたり、新たに透水(量)係数の空間分布を規制する透水係数に関する状態方程式を導入したが、これによって透水(量)係数の推定を従来よりさらに最適に行うことができると考える。

(2) 適用結果から次のことがいえる。①観測精度がある程度よければ、観測点の推定精度は非観測点のそれより非常によい。②領域全体の推定精度は、観測点の配置に影響され、その配置は全体的に均衡のとれたのがよい。③既に観測点が配置されているとき、新たに観測点を追加するときは、推定誤差最大の節点に順次追加配置してゆけば効率的な設定が行われる。

なお透水係数の空間分布式およびシステム雑音、観測雑音については、今後研究が必要と考えられる。

(参考文献)

- 1) Neuman, S.P. and S. Yakowitz: A Statistical Approach to the Inverse Problem of Aquifer Hydrology, 1. Theory, Water Resour. Res., 15(4), pp. 845~860, 1979.
- 2) Neuman, S.P., G.E. Fogg and E.A. Jacobson: A Statistical Approach to the Inverse Problem of Aquifer Hydrology, 2. Case Study, Water Resour. Res., 16(1), pp. 33~58, 1980.
- 3) Wilson, J., P. Kitanidis and M. Dettinger: State and parameter estimation in groundwater models. in Applications of Kalman Filter to Hydrology, Hydraulics, and Water Resources, edited by C. Chiu, University of Pittsburgh, pp. 657~679, 1978.
- 4) Freeze, R.A.: A Stochastic-Conceptual Analysis of One-Dimensional Groundwater Flow in Nonuniform Homogeneous Media, Water Resour. Res., 11(5), pp. 725~741, 1975.
- 5) Smith, L. and R.A. Freeze: Stochastic Analysis of Steady State Groundwater Flow in a Bounded Domain, 1. One-Dimensional Simulations, Water Resour. Res., 15(3), pp. 521~528, 1979.
- 6) Smith, L. and R.A. Freeze: Stochastic Analysis of Steady State Groundwater Flow in a Bounded Domain, 2. Two-Dimensional Simulations, Water Resour. Res., 15(6), pp. 1543~1559, 1979.
- 7) Jain, A.K.: Partial Differential Equations and Finite-Difference Methods in Image Processing, Part 1: Image Representation, JOTA, 23(1), pp. 65~91, 1977.
- 8) 日野幹雄: Kalmanの予測推定理論の平易な誘導について、東工大土木工学科研究報告、15、pp. 91~99、1973.
- 9) Sen, Z.: Adaptive Fourier Analysis of Periodic-Stochastic Hydrologic Sequences. J. Hydrol. 46, pp. 239~249, 1980.