

ショット・ノイズ過程の基礎特性と流量時系列への適用性

Basic Properties of Shot Noise Process and Its Application to Streamflow Sequences

神戸大学工学部 正 員 神 田 徹

1. まえがき

水工計画における利用を目的として、従来、水文資料の模擬発生に関する種々の方法が提案されている。その主たるものである降雨量時系列と流量時系列については、各現象に内在する確率的性質から確率統計的な時系列モデルが多く、それらのモデルは手法によって形式的には幾種類かに分類できる。¹⁾しかしながら、降雨量あるいは流量の時間単位（日雨量（流量）、月降水量（流量）、年降水量（流量）など）によって各時系列は相当に異なる性質をもつことは明らかであり、この時間スケールの観点から水文量時系列の特性について統一的な説明がなされ、各々に対応するモデルが確立されることが残された重要な課題であろう。この点において、時間単位と時系列特性の關係に注目した室田・江藤・田中²⁾、長尾³⁾の研究の意義は大きい。

一方、降雨量時系列と流量時系列の關係については、両者は本来密接な關係にありながら、その間に流出過程が介在するため、時系列特性としては対照的な性質が存在する。すなわち、降雨事象の間欠的生起性と流量時系列の持続性（自己相関性）である。このため、両時系列は直接的には無關係に解析され、モデル構成が行われることが多い。

本研究で対象とするショット・ノイズ・モデルは、比較的短い時間単位（1日～5日程度）の流量時系列に見られるハイドログラフのパターン、すなわち降雨に伴う急激な流量増加とピーク後の緩やかな低減を再現しうるモデルで、実河川の流量への適用性については Weiss⁴⁾の研究などがある。このモデルで仮定されている降雨の生起特性と流出量の低減特性そのものは極めて単純なものであるが、そのモデル構成が、降雨の確率的性質と流出現象という物理的過程の両者を組込もうとしている点で意味があり、従来の、より長い時間単位の流量時系列に対して用いられる純確率的といえるモデルとは基本的に相異なる。

本研究は、ショット・ノイズ過程に属する変量の分布形をしらべ、またこの変量の標本分布、標本積率と母集団積率の關係などの標本特性を求めてモデル・パラメータ推定における基礎的知見を得るとともに、実河川への適用上の問題点とこれに対するモデル修正法を検討したものである。

2. ショット・ノイズ過程の基礎特性

2.1 定義および積率

定常フィルタード・ポアソン過程 $\{x(t)\}$ は次式で定義される。⁵⁾

$$x(t) = \sum_{m=N(-\infty)}^{(+\infty)} w(t-\tau_m, y_m) \quad (1)$$

ここに、 $\{N(t)\}$ はポアソン過程に従う事象を表わし、その事象の生起時刻が $\dots, \tau_{-1}, \tau_0, \tau_1, \dots$ である。

y_m は独立な確率変数で、その時系列 $\{y_m\}$ は $\{N(t)\}$ と独立である。 $w(t-\tau_m, y_m)$ は時刻 τ_m を始点とするパルスであり、 y_m はその規模を表わす量である。したがって、 $x(t)$ は時刻 τ に発生するパルス $w(t-\tau, y)$ の、時刻 t における和である。パルスの形状が、 $w(t-\tau_m, y_m) = y_m w(t-\tau_m)$ で表わされる時、この $x(t)$ を線形フィルタード・ポアソン過程という。そのうちで、 y_m と $w(t-\tau_m)$ が次式のように与えられる場合をショット・ノイズ過程という。⁴⁾

$$x(t) = \sum_{m=N(-\infty)}^{N(t)} y_m \exp\{-b(t-\tau_m)\} \quad (2)$$

ここに、 $N(t)$ は発生率 ν のポアソン過程、 y_m は平均値 θ の指数分布に従う変量、 b は低減率である。上式の通り、ショット・ノイズ過程は3つのパラメータ ν, θ, b によって規定される。

(2)式で表わされる過程 $\{x(t)\}$ は、次のように水文現象に対応させることができる。(i) 事象(降雨)が、発生率 ν のポアソン過程として生起する。(ii) 事象発生時点 τ_m に、指数分布(平均値 θ)に従うジャンプ(降雨量に相当するもの) y_m が発生する。(iii) 発生したパルス(流出量)は、指数関数的(低減率 b)に減小する。すなわち、 $x(t)$ は時刻 t 以前に降った雨による流出量の線形和であり、よって $\{x(t)\}$ は流量時系列を表わす連続的過程と考えることができる。

次に、この連続的過程 $\{x(t)\}$ に対して、次式のように一定期間 T で平均化を行う。

$$z_t = \frac{1}{T} \int_{t-T}^t x(u) du \quad (3)$$

この平均化変量 z_t の過程 $\{z_t\}$ は離散的過程である。

(2)式の変量 $x(t)$ は、次式の 2 母数(形状母数が ν/b , 尺度母数が θ)ガンマ分布に従う。

$$f(x(t)) = (1/\theta) \{1/\Gamma(\nu/b)\} \{x(t)/\theta\}^{\nu/b-1} \exp\{-x(t)/\theta\} \quad (4)$$

また、 $\text{lag}-k$ の自己相関係数は次のように与えられる。

$$\rho\{x(t), x(t+k)\} = \exp(-bk) \quad (5)$$

一方、(3)式の変量 z_t の積率は次のように与えられる。ただし、 z_t の分布はガンマ分布ではない。

$$\text{平均値: } E\{z_t\} = \nu\theta/b \quad (6) \quad \text{分散: } \text{Var}\{z_t\} = (\nu\theta^2/b) \cdot 2(bT-1+e^{-bT})/(bT)^2 \quad (7)$$

$$\text{歪み係数: } C\{z_t\} = 3(b/\nu)^{1/2} \{bT-1+e^{-bT}-(1/2)(1-e^{-bT})^2\} / \{2(bT-1+e^{-bT})^3\}^{1/2} \quad (8)$$

$$\text{lag-1 の自己相関係数: } \rho\{z_t, z_{t+\tau}\} = (1-e^{-bT})^2 / \{2(bT-1+e^{-bT})\} \quad (9)$$

いま、(3)式において単位期間($T=1$)で平均化した変量を x_t とする。

$$x_t = z_t |_{\tau=1} = \int_{t-1}^t x(u) du \quad (10)$$

また、連続する T 個の x_t の和 $S(T)$ は

$$S(T) = x_1 + x_2 + \dots + x_T = \int_{t-T}^t x(u) du \quad (11)$$

で与えられる。上式より、 $x_t = S(1)$ である。

x_t の積率は、(6)~(9)式において、 $T=1$ とおいた値で与えられ、また $S(T)$ の積率は、平均値と分散がそれぞれ(12)、(13)式で与えられ、歪み係数と自己相関係数は z_t のそれらと同じで、(8)、(9)式で与えられる。

$$\text{平均値: } E\{S(T)\} = (\nu\theta/b)T \quad (12) \quad \text{分散: } \text{Var}\{S(T)\} = (\nu\theta^2/b) \cdot 2(bT-1+e^{-bT})/b^2 \quad (13)$$

2.2 平均化変量の分布

(1) ガンマ分布の近似度

$S(T)$ の分布を次のガンマ分布(2母数)で近似する。

$$f\{S(T)\} = (1/p) \{1/\Gamma(q)\} \{S(T)/p\}^{q-1} \exp\{-S(T)/p\} \quad (14)$$

ここに、 p は尺度母数、 q は形状母数である。このガンマ分布において、平均値と分散がそれぞれ(12)式、(13)式に等しくなるように p 、 q の値を定める。このとき、 $S(T)$ の分布形(未知)に対するこのガンマ分布の近似度を、両者の歪み係数の相対誤差で評価する。

$$e = \frac{r - C\{S(T)\}}{C\{S(T)\}} = \frac{4(bT-1+e^{-bT})^2}{3bT(bT-1+e^{-bT}-(1/2)(1-e^{-bT})^2)} - 1 \quad (15)$$

ここに、 r はガンマ分布の歪み係数、 $C\{S(T)\}$ は $S(T)$ の歪み係数で (8) 式で与えられる。 e は b のみの関数であり、図-1 のように $T=1$ 、すなわち x_t については e の値は小さいが、 T とともに増大する。しかし、図-2 のように、モンテ・カルロ法によって $S(T)$ の分布形 (図のヒストグラム) を求め、対応するガンマ分布 (実線) と比較すれば、両者の分布形は大差がない。結局、 $S(T)$ の分布は、平均値と分散が等しい 2 母数ガンマ分布によってほぼ近似できる。

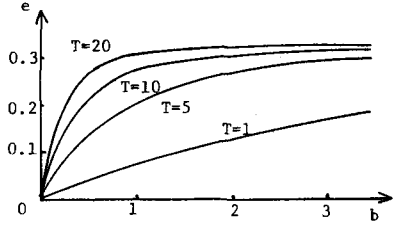


図-1 歪み係数の相対誤差

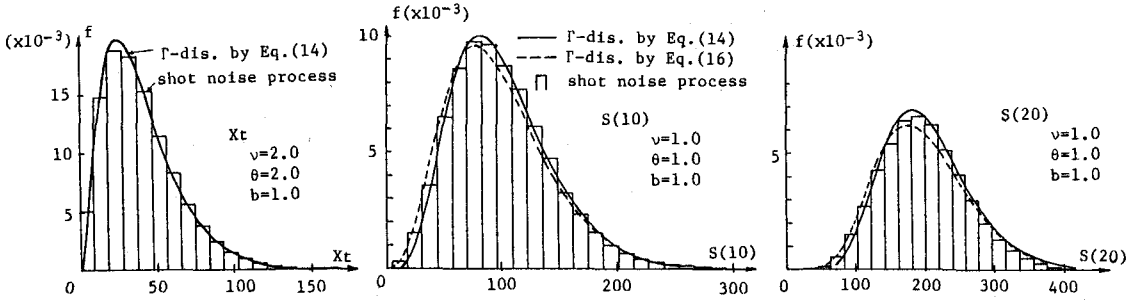


図-2 平均化変数に対するガンマ分布の近似度

(2) ガンマ分布理論による積率推定の精度

単位期間の変量がガンマ分布 (2 母数) に従うとき、その T 倍の期間の変量は十分の近似度でガンマ分布 (2 母数) に従い、両者の母数間には次式の関係があることが長尾によって示されている³⁾。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\xi(1)}{\xi(T)} &= \frac{\eta(T)}{T\eta(1)} = \frac{\rho(T)}{\rho(1)} \\ \rho(T) &= \frac{\rho(1)[T\{1-\rho(1)^2\}-2\rho(1)\{1-\rho(1)^T\}]}{T^2\{1-\rho(1)\}^2} \equiv g(\rho(1), T) \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

ここに、 ξ は形状母数、 η は尺度母数、 ρ は $\log^{-1}$ の自己相関係数で、カッコ内の 1, T はそれぞれ単位期間、その T 倍の期間を示す。上式の関係より、 $\{\xi(1), \eta(1), \rho(1)\}$ か $\{\xi(T), \eta(T), \rho(T)\}$ のいずれか一方が既知ならば、他方の母数が求まり分布形が定まる。

(i) 単位期間の分布からその T 倍の期間の分布を推定する場合

ショット・ノイズ過程の変量 x_t は上述の通り厳密にはガンマ分布に従わないが、もしこれをガンマ分布に従うと見なして $S(T)$ の積率を (16) 式を用いて推定した場合には、その推定値と真の積率との相対誤差は (17), (18) 式で与えられる。

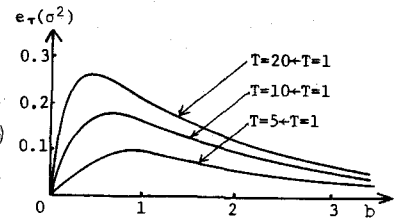


図-3 $S(T)$ の分散の相対誤差

$$e_r(\sigma^2) = \frac{\sigma^2(T) - \text{Var}\{S(T)\}}{\text{Var}\{S(T)\}} = \frac{[T\{1-\rho(1)^2\}-2\rho(1)\{1-\rho(1)^T\}](b-1+e^{-b})}{\{1-\rho(1)\}^2(bT-1+e^{-bT})} - 1 \quad (17)$$

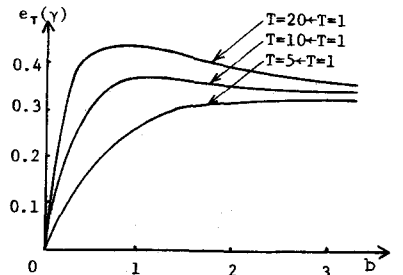


図-4 $S(T)$ の歪み係数の相対誤差

$$e_r(r) = \frac{r(T) - C\{S(T)\}}{C\{S(T)\}} = \frac{4[T\{1-\rho(1)^2\}-2\rho(1)\{1-\rho(1)^T\}]^{1/2}(b-1+e^{-b})^{1/2}(bT-1+e^{-bT})^{3/2}}{3bT\{1-\rho(1)\}\{bT-1+e^{-bT}-(1/2)(1-e^{-bT})^2\}} - 1 \quad (18)$$

ここに、 $e_r(\sigma^2)$ は分散の相対誤差、 $e_r(r)$ は歪み係数の相対誤差、 $\sigma^2(T)$ 、 $r(T)$ はそれぞれ(16)式より求まる分散、歪み係数である。図-3のように、 $e_r(\sigma^2)$ は **b** がある値をとるとき極大値になる。また、図-4のように、 $e_r(r)$ は前述のガンマ分布近似($S(T)$ の平均値、分散が一致)の誤差(15)式、図-1)に比べてそれほど大きな値をとらず、 **b** および **T** の増加とともに一定値に近づく傾向が見られる。また、(16)式を用いて推定される **$S(T)$** の分布形は図-2の破線のもようであり、 **$S(T)$** の真の分布(ヒストグラム)に対する近似度はかなり良好である。これらの結果より、ショット・ノイズ過程の変量に関しては、 **$S(T)$** 、($T>1$)の近似的な分布を **x_t** 、($T=1$)の積率のみから得ようとする場合に、上記の理論式(16)が有効である。

(ii) T 倍の期間の分布から単位期間の分布を推定する場合

(i)とは逆に、 **$S(T)$** 、($T>1$)の分布をガンマ分布とみなして単位期間の変量 **x_t** の積率を推定した場合には、その誤差は(19)、(20)式および図-5、6で与えられる。

$$e_1(\sigma^2) = \frac{\sigma^2(1) - \text{Var}\{x_t\}}{\text{Var}\{x_t\}} = \frac{(bT-1+e^{-bT})g^{-1}(\rho(T), T)}{T^2(b-1+e^{-b})\rho(T)} - 1 \quad (19)$$

$$e_1(r) = \frac{r(1) - C\{x_t\}}{C\{x_t\}} = \frac{4(bT-1+e^{-bT})^{1/2}(b-1+e^{-b})^{3/2}}{3bT\{b-1+e^{-b}-(1/2)(1-e^{-b})^2\}} \left\{ \frac{g^{-1}(\rho(T), T)}{\rho(T)} \right\}^{1/2} - 1 \quad (20)$$

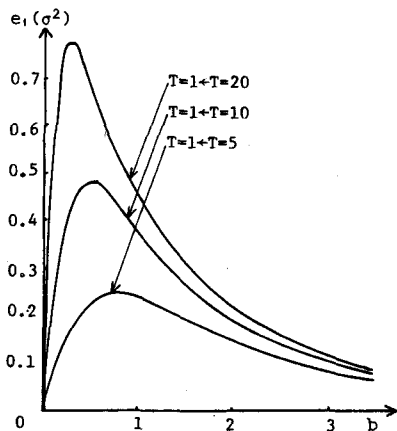


図-5 x_t の分散の相対誤差

(i)の場合に比べて、歪み係数の誤差は僅かながら減少するのに対して、分散の誤差がかなり大きい。したがって、大きい時間単位の変量の積率から小さい時間単位の変量の分布は推定しにくいといえよう。

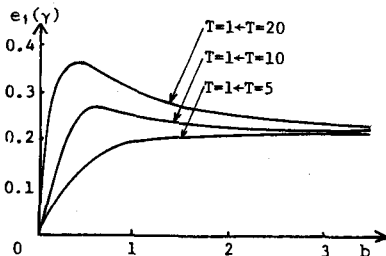


図-6 x_t の歪み係数の相対誤差

3. モデル・パラメータの推定

3.1 積率推定の誤差がパラメータの推定に及ぼす影響

ショット・ノイズ過程のパラメータ **ν** 、 **θ** 、 **b** は、 **$S(T)$** の3つの積率、平均値 $E\{S(T)\}$ 、分散 $\text{Var}\{S(T)\}$ 、lag-1の自己相関係数 $\rho_1 \equiv \rho\{S(T)\}$ 、 **$S(T)_{t+T}$** の値がわかれば、(12)、(13)、(9)式から求められる。しかし、この母集団積率は観測資料(標本)から推定するので、その積率推定誤差のために **ν** 、 **θ** 、 **b** の推定に誤差を生ずる。

積率の誤差 $\Delta E\{S(T)\}$ 、 $\Delta \text{Var}\{S(T)\}$ 、 $\Delta \rho_1$ とパラメータの誤差 $\Delta \nu$ 、 $\Delta \theta$ 、 Δb の関係は次式で与えられる。

$$\frac{\Delta b}{b} = f_b(b, T) \frac{\Delta \rho_1}{\rho_1} \quad (21) \quad \text{ここに、} \quad f_b(b, T) = \frac{(1-e^{-bT})(bT-1+e^{-bT})}{bT(e^{-2bT}+2bTe^{-bT}-1)}$$

$$\frac{\Delta \theta}{\theta} = -\frac{\Delta E\{S(T)\}}{E\{S(T)\}} + \frac{\Delta \text{Var}\{S(T)\}}{\text{Var}\{S(T)\}} + f_\theta(b, T) \frac{\Delta \rho_1}{\rho_1} \quad (22)$$

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = 2 \frac{\Delta E\{S(T)\}}{E\{S(T)\}} - \frac{\Delta \text{Var}\{S(T)\}}{\text{Var}\{S(T)\}} + f_\nu(b, T) \frac{\Delta \rho_1}{\rho_1} \quad (23)$$

ここに、

$$f_\theta(b, T) = \frac{(1-e^{-bT})(bT-2+e^{-bT}(2+bT))}{bT(e^{-2bT}+2bTe^{-bT}-1)}, \quad f_\nu(b, T) = \frac{(1-e^{-bT})(1-e^{-bT}(1+bT))}{bT(e^{-2bT}+2bTe^{-bT}-1)}$$

上式の通り、 $\Delta\rho_1/\rho_1$ の影響の度合は、 b, T の関数 $f_b(b, T), f_\theta(b, T), f_\nu(b, T)$ の値による。図-7, 8, 9に示すように、 T が大きくなるにつれて $f_b(b, T), f_\theta(b, T), f_\nu(b, T)$ はそれぞれ、 $-1, -1, 0$ に近い値をとり、また T が小さくなるにつれて $f_b(b, T), f_\nu(b, T)$ は絶対値が大きくなり、 $f_\theta(b, T)$ は -0.5 に近い値となる。つまり、 ρ_1 の誤差の影響に関しては、 b, T が変化してもパラメータ θ に及ぼす影響はそれほど変わらず、その影響度合も大きくないが、一方、パラメータ ν, b に対しては T, b が小さい場合に大きな影響を及ぼす。

一定の観測期間の資料からパラメータを推定する場合、より短い時間単位の変量を用いる方が数多くの標本を用いることができるので、積率推定の精度は高いと考えてよいだろう。しかしながら、その場合には上述の通り、自己相関係数 ρ_1 の推定に高い精度が要求されることに留意しなければならない。さらに、(21)~(23)式における積率の誤差に関して、標本からの母数推定に伴う誤差の問題について以下に検討した。

3.2 標本統計量の特性

x_t の母集団から抽出したある大きさの標本について積率を得たとき、その標本積率がいかなる分布特性をもつかを計算機数値実験により求め、特に偏り (bias) について検討した。

(1) 計算手順

ν, θ, b の値をそれぞれ次のようにとり、各組合せごとに x_t を50万個づつ発生した。

$$\nu = 0.5 \quad (0.5) \quad 3.0, \quad \theta = 1.0, \quad b = 0.1, 0.3, 0.5 \quad (0.5) \quad 3.0$$

50万個の資料から、大きさ n の標本が $(500,000/n)$ 組得られる。各組について、標本平均 m 、分散 s^2 、歪み係数 C_s 、lag-1の自己相関係数 r_1 を計算する。ここに、各統計量の定義は次の通りである。

$$m = (1/n) \sum_{i=1}^n x_i \quad (24)$$

$$s^2 = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - m)^2 \quad (25)$$

$$C_s = (1/n) \sum_{i=1}^n (x_i - m)^3 / s^3 \quad (26)$$

$$r_1 = \frac{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i) (x_{i+1} - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1})}{\left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_i)^2 \right\}^{1/2} \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n-1} x_{i+1})^2 \right\}^{1/2}} \quad (27)$$

(2) 標本統計量の分布

$\nu=1.0, b=1.0$ の場合の m', s', C_s, r_1 の分布を、 $n=10, 90$ について示せば図-10のようである。ここに、 m', s' は x_t の標準化変量 $(x_t - \mu)/\sigma$ に関するもので、 $m' = (m - \mu)/\sigma, s' = s/\sigma$ 。ここに、 $\mu = E\{x_t\}$ は x_t の母平均、 $\sigma^2 = \text{Var}\{x_t\}$ は母分散である。 m' および s' の分布は $n=90$ ではほぼ正規分布であり、平均値もそれぞれ母平均0、母標準偏差1.0に一致するが、 $n=10$ では分布は歪み、 s' の平均値は1.0より小さい。 C_s, r_1 については、 $\nu=1.0, b=1.0$ の場合の x_t の母集団歪み係数は $\beta = C\{x_t\} \div 1.6$ 、母集団自己相関係数は $\rho_1 \div 0.54$ であるから、 $n=10$ の場合はいずれの平均値もこれらの値よりかなり小さく、また C_s, r_1 が負の値をとる割合が約10%に及ぶ。この1例が示すように、標本積率の分布は標本の大きさ n およびパラメータ ν, b の値によって変化する。

(3) 偏り補正

上述の統計量は、母数の推定量としては平均値を除いて一般に偏った推定量であるため、標本から不偏推

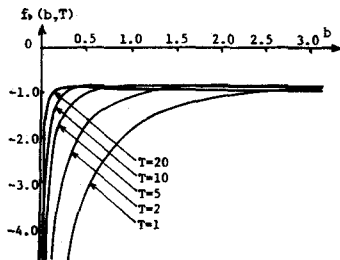


図-7 $f_b(b, T)$ の値

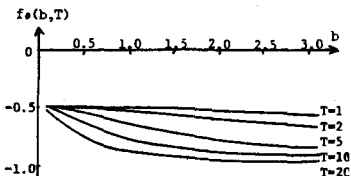


図-8 $f_\theta(b, T)$ の値

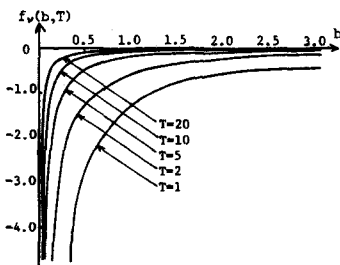


図-9 $f_\nu(b, T)$ の値

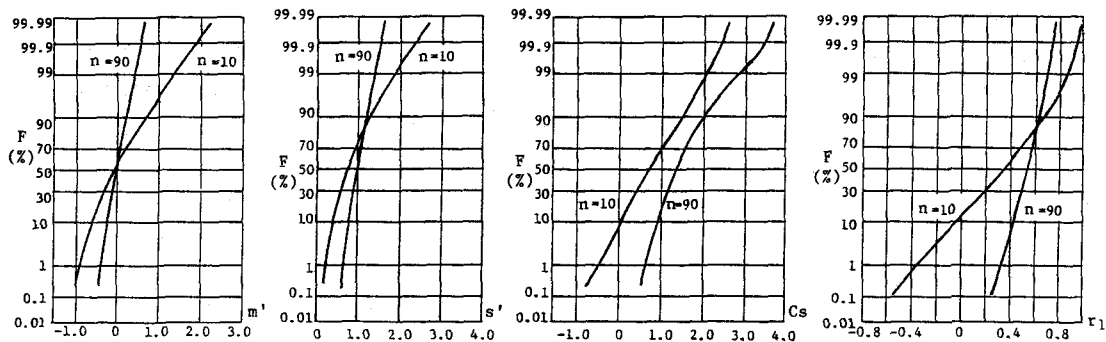


図-10 標本統計量の分布 ($\nu=1.0, b=1.0$)

定値を得るには(28)式が満足されるような α の値を求めておかねばならない。この関係が満たされるとき、(29)式の $\hat{P}$ が不偏推定量である。

$$P = E\{\alpha M\}$$

(28)

$$\hat{P} = \alpha M$$

(29)

ここに、 P は母数、 M は(24)~(27)式の統計量、 α は偏り補正係数である。

標準偏差、歪み係数、lag-1の自己相関係数に対する偏り補正係数をそれぞれ $\alpha(\sigma)$ 、 $\alpha(\beta)$ 、 $\alpha(\rho_1)$ とし、それらを図-11に示す。 $\alpha(\sigma)$ 、 $\alpha(\beta)$ は b および ν の値が大きくなれば値は減小して1に近づく。一方、 $\alpha(\rho_1)$ は b の値の増加とともに大きな値をとる。標本の大きさ n の影響については、図に示す通り、 $n=50$ 程度になれば、いずれの補正係数も1にかなり近い値となる。

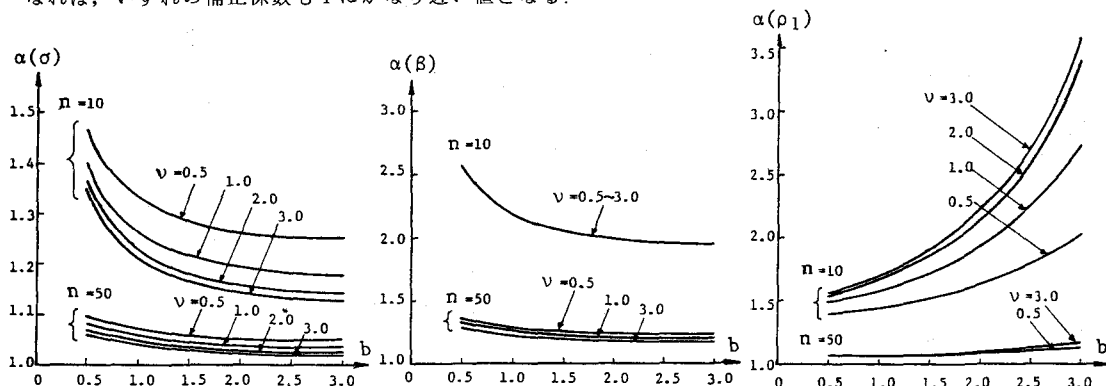


図-11 偏り補正係数

Lettenmaier・Burgess⁶⁾は、ガンマ分布の積率について偏りを検討した結果、標準偏差および歪み係数の偏り補正係数の値はその分布の歪み係数と変動係数の大きさに関係することを示している。しかし、ここで対象としている変量 x_t は、分布が歪んでいると同時に時系列的に独立ではない標本であるため、その従属性(9)式から明らかに b の関数)も偏り補正係数の値に影響していると考えられる。それゆえ、偏り補正を行うにはこのような数値実験の結果によらざるを得ないが、いま試みに従来、特定の分布や時系列特性をもつ変量に対して提案されている偏り補正式(30)、(31)、(32)式を用いてみた。

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{n/(n-1)}{1 - \frac{2\rho_1}{n(n-1)} \left\{ \frac{n(1-\rho_1) - (1-\rho_1^n)}{(1-\rho_1)^2} \right\}} s^2 \quad (30)$$

$$\hat{\beta} = \frac{\{n(n-1)\}^{1/2}}{n-2} \left(1 + \frac{8.5}{n}\right) C_s \quad (31)$$

$$\hat{\rho}_1 = \frac{r_1 + 1/(n-1)}{1 - 3/(n-1)} \quad (32)$$

(30)式による分散の推定値の、母分散に対する相対誤差は、 $n \geq 30$ 、 $\nu \geq 0.3$ 、 $b \geq 1.0$ で最大値が約3%であり、

(31)式による歪み係数の推定値の相対誤差は、 $n \geq 30$, $\nu \geq 1.0$, $b \geq 1.0$ で最大値が約5%, また(32)式によるlag-1の自己相関係数の推定値の相対誤差は、 $n \geq 30$, $\nu \geq 0.3$ で最大値が約10%である。⁹⁾ モデル・パラメータ推定における積率の偏り補正に関する限り、これらの補正式は上記の範囲では十分の適用性をもつといえる。

4 ショット・ノイズ・モデルによる流量時系列の模擬発生

4.1 基底流量を考慮したモデル

流量時系列の模擬発生モデルとして上述のショット・ノイズ過程（これをシングル・ショット・ノイズ・モデルとよぶ）を適用しようとする場合、実際の河川流量は主に次のような時系列特性においてこの過程と相異なる。(a)季節性 (b)低減特性 (c)基底流量 (d)長期的持続性。(b)と(c)に関して、シングル・ショット・ノイズ・モデルでは低減率を一定とするため、各流出成分の低減特性が再現できず、またゼロに近い流量が生ずる期間が多くなる。そこで、Weiss⁴⁾は低減率の小さい流出成分を導入したダブル・ショット・ノイズ・モデルおよびセカンドオーダー・ショット・ノイズ・モデルを提案している。

本研究では、流量は、季節ごとに一定な値をとる基底流量と一定の低減率をもつ直接流出量からなるものとする。つまり、観測流量時系列から季節（ここでは月）ごとに一定の基底流量を差し引いたものが、上述のシングル・ショット・ノイズ過程に従うと仮定する。したがって、推定すべきモデル・パラメータは季節ごとの ν , θ , b および基底流量 M である。基底流量の推定方法によって次の2つのモデルを考案した。

(a) 平均化資料に対して基底流量を推定する方法（モデル-I）

単位期間で平均化した流量資料 X_t の分布が、2.2(1)の結果より、次式のように下限値 M_1 をもつガンマ分布（3母数）で近似されるものとする。

$$f(X_t) = (1/p)\{1/\Gamma(q)\}\{(X_t - M_1)/p\}^{q-1} \exp\{-(X_t - M_1)/p\} \quad (33)$$

ここに、 X_t は平均化資料、 M_1 は位置母数（下限値）、 p は尺度母数、 q は形状母数である。

母数 M_1 , p , q を積率法により推定し、得られた M_1 を基底流量とする。 $X'_t = X_t - M_1$ がシングル・ショット・ノイズ過程に従う(30)式の x_t と考えると、(6), (7), (9)式($T=1$)から ν , θ , b を推定する。

(b) 連続的過程の資料に対して基底流量を推定する方法（モデル-II）

連続的過程の流量 $X(t)$ が、下限値 M_2 をもつ次式のガンマ分布（3母数）に従うものとする。

$$f\{X(t)\} = (1/\theta)\{1/\Gamma(\nu/b)\}\{X(t) - M_2\}/\theta\}^{\nu/b-1} \exp\{-(X(t) - M_2)/\theta\} \quad (34)$$

この場合、単位期間の平均化資料 X_t （観測資料）の平均値は

$$E\{X_t\} = M_2 + \theta\nu/b \quad (35)$$

で与えられ、分散、歪み係数、lag-1の自己相関係数はそれぞれ、(7), (8), (9)式、($T=1$)で与えられる。よって、これらの式と流量資料の積率からパラメータ M_2 , ν , θ , b を推定する。

以上のように推定した ν , θ , b を用いて、(2)式より連続的過程としての直接流出量 $x(t)$ を発生し、これにモデル-Iならば M_1 を、モデル-IIならば M_2 を加え $X(t)$ 、さらに(30)式により平均化資料 X_t とする。

4.2 シミュレーション結果

半旬流量資料（木津川、48年間）から、パラメータを月ごとに求め、500年間の半旬流量時系列を模擬発生させた。以下に、モデル-Iによる模擬発生資料の特性について記す。

模擬発生した流量時系列の1例は図-12のようであり、変動パターンは観測流量にほぼ類似している。図-13は、2月、8月の観測資料と模擬発生資料のヒストグラムを示すが、基底流量を導入した結果、シングル・ショット・ノイズ・モデルのように最小流量よりかなり小さいゼロに近い流量資料が生ずることはなく、低水流量についても分布形の再現性は良い。また、長期的時系列特性の保持について確かめるため、高水期（6～10月）、低水期（11～5月）の総流量について、観測資料と模擬発生資料の非超過確率を比較した（図-

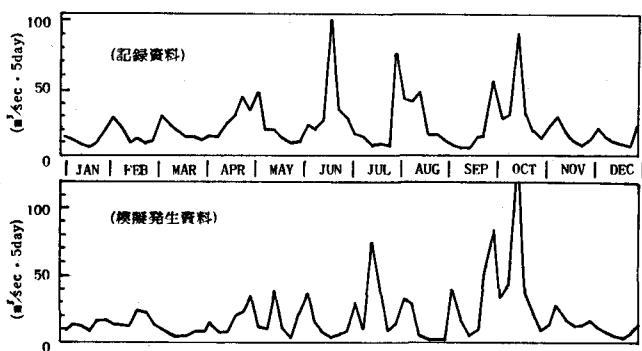


図-12 記録資料と模擬発生資料の半月流量時系列

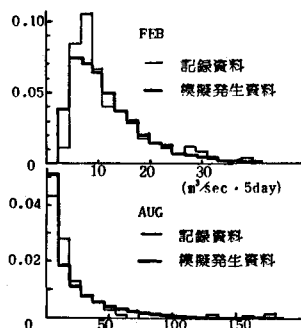


図-13 記録資料と模擬発生資料のヒストグラム

14). 高水期については両者の対応性はかなり良好であったが、低水期での再現性は不十分であった。

一方、モデルⅡによる模擬発生資料も上述の特性とはほぼ同様の結果を示したが、両者のモデルの主たる相異点をあげれば次のようである。モデルⅠは、積率の保持においてやや劣るが、パラメータ、特に基底流量の推定が容易であり、モデルⅡは、基底流量の推定が面倒であるが、積率が3次まで保持される。

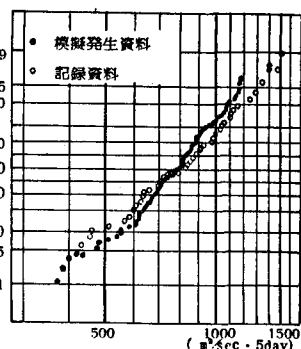


図-14 高水期終流量の非超過確率

5. 結語

ショット・ノイズ過程の平均化変量 x_t について、その分布に対するガンマ分布の近似度をしらべ、また時間単位の異なる量の分布としてガンマ分布で近似することの適否を明らかにした。次に、変量 x_t の標本特性に関して、標本積率の偏りとショット・ノイズ過程のパラメータとの関係を示した。さらに、河川流量へのこの過程の適用性に関しては、基底流量を導入したモデルを示したが、他の時系列特性についてもより高い再現性が得られるようにモデル修正を行うことが今後の課題である。

おわりに、本研究において数値計算に熱心な御助力を頂いた牧 龍一郎（現・神戸市）、山内良太（現・兵庫県）の両氏に深謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 例えば、神田 徹・藤田睦博：新体系土木工学—水文学，土木学会編，技報堂出版，1982。
- 2) 室田 明・江藤剛治・田中 剛：水文量の和に関する統計的研究，土木学会論文報告集，No 223, 1974。
- 3) 長尾正志：確率雨量配分率曲線の理論的推定，土木学会論文報告集，No 243, 1975。
- 4) Weiss, G.: Shot noise models for the generation of synthetic streamflow data, WRR, Vol. 13, No. 1, 1977。
- 5) Parzen, E.: Stochastic Processes, Holden-Day, San Francisco, 1962。
- 6) Lettenmaier, D.P. and Burges, S. J.: Correction for bias in estimation of the standard deviation and coefficient of skewness of the log Pearson 3 distribution, WRR, Vol. 16, No. 4, 1980。
- 7) Matalas, N. C.: Time series analysis, WRR, Vol. 3, No. 3, 1967。
- 8) Kendall, M. G.: Note on bias in the estimation of autocorrelation, Biometrika, Vol. 41, 1954。
- 9) 神田 徹・山内良太：ショットノイズモデルの母数推定，土木学会第37回年次学術講演会，1982。