

面積平均雨量の確率密度分布 The Probability Density Function of Areal Average Rainfall

名古屋大学 正員 松 林 宇一郎
名古屋大学 正員 高 木 不 折
電源開発 正員 殿 村 敦 典

1. ま え が き

流出系への入力としての降雨の特性は、流出現象の解析、予測あるいは河道計画などにとっては1つの基本量でもある。降雨の特性についての研究は数多く、いわゆるDDA解析などがなされてきたが、多くの努力がDD解析に払われてきたのに対し、面積に対する検討は、地点雨量を面積雨量に変換する手法に主眼が置かれ、面積雨量のもつ特性についての検討は、わが国では、中島ら、友杉、池淵ら、後町の研究など比較的少ない。Horton, Fletcherらの研究もよく知られてはいるが、特定の地域について経験的に導入されたものであって、流域面積が小さく地形が複雑なので、わが国の流域にそのままの形式で適用するのには問題があると言われている。

降雨のもつ面積的、継続時間的、すなわち時空間特性は、大気の大擾乱、雨域のスケールなどとの関係で表に現われてくるものであって、比較的単純な流域ででも降雨強度が場所的に相当偏った分布をすることはよく観測されてきた。流出現象という立場に立てば、体積として降雨が与えられてはじめて体積として流出が予測されるわけで上記の分布の場所的スケールを流域のスケールとの係わりで考察することは重要であろう。

以上の観点に立って、本研究は降雨が面積とどのような関係にあるか、とくにその確率構造について考察したものである。

2. 対象領域と降雨資料

本研究で対象としたのは、名古屋市およびその近郊地域である。降雨の場所的分布特性には、地形の状態が大きな影響を及ぼすが、ここでは第1段階として、そのような地形の影響を少しでも除外して考えるために、平坦で単純な領域として名古屋市区を選んだ。また、本研究を行なうためには相当数の場所で雨量が観測されていることが必須条件となる。そのような条件をある程度満していることもこの地域を選んだ理由の1つである。

この地域では、名古屋市、気象庁、各小中学校など数多くの地点で時間雨量が測定されている。本研究では、それらのうち、欠測がなく、過去10年間にわたって豪雨時の時間雨量が整備

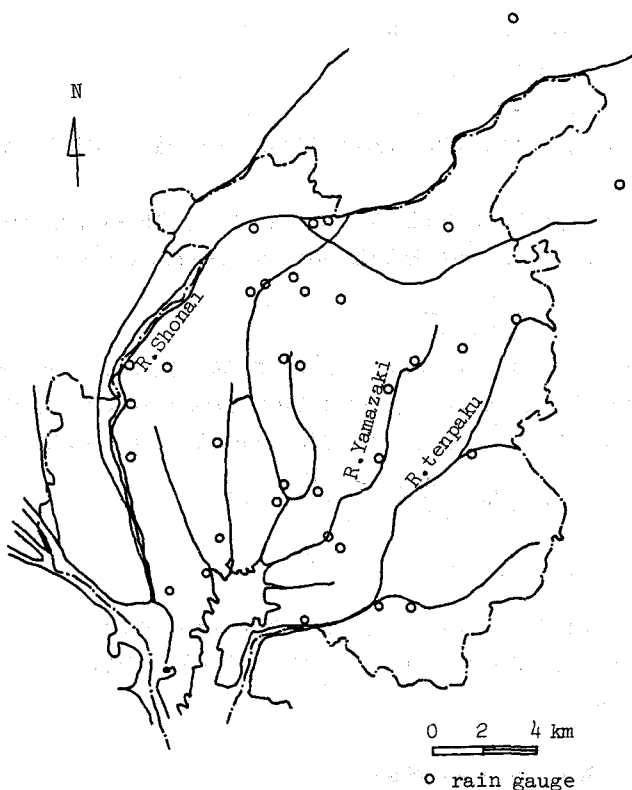


Fig. 1 Site of rain gauge stations

されている35地点を選定した。

対象とした降雨は、昭和46年より昭和55年までの10年間の降雨のうち、名古屋地方気象台において年最大60分雨量を記録した一連の降雨時の、上記35地点での降雨資料である。

ここで対象としているのは都市域であり、流出現象との関連という意味では、降雨の特性は短い、たとえば10分、20分30分間の雨量を考えるべきではあるが、そのような資料はほとんど整っていないので、ここでは正時より正時までの1時間雨量を対象として解析している。対象とした領域、雨量観測点は、図-1に一括示したとおりである。

3. 単位細胞領域における降雨の確率分布

いま、ある定められた時間内に、図-2に記すような領域 g 全体に体積 R_T の降雨があったものとしよう。この領域の全面積を A とすれば、この領域での平均面積雨量 $\bar{r}$ は言うまでもなく

$$\bar{r} = R_T / A \quad (1)$$

である。そこで、まず、この降雨がこの領域内で確率的にはどのように分布するかを考えるわけである。

いま、この領域 g を、等しい面積 a の N 個の細胞領域に分割しよう。この N 個の細胞領域のうち $(n)R_i = (n)r_i \cdot a$ の降雨のある細胞領域が n_i あると考えると、

$$R_T = r \cdot A = \sum (n)R_i \cdot n_i \quad (2)$$

となり、また、

$$N = \sum n_i \quad (3)$$

である。ただし、 $(n)R_i$ 、 $(n)r_i$ の添字 (i) は1個の細胞領域に降る量を示し、 R は体積、 r は面積平均雨量を示している。

ある定められた時間帯の降雨 $R_T = \bar{r} \cdot A$ を全体 N 個の細胞領域に配分するに際して、 n_i 個の細胞領域は $(n)R_i (= a(n)r_i)$ 、 n_2 個の細胞領域は $(n)R_2 (= (n)r_2 \cdot n_2)$ 、……と配分させる方法は

$$P = \frac{N!}{n_1! n_2! \dots} \quad (4)$$

通りとなるが、これら個々の起こり方に同等の確率を与えると、 N が $(n_1, n_2, \dots)$ と配分される確率は P に比例する。したがって、実際には P が最大値となるような配分になっていると考えるのが自然であろう。このように考えると、式(2)、式(3)の条件下で P を最大とする確率は、よく知られているように、

$$(n)p \cdot (n)R_i = \frac{n_i}{N} = \frac{e^{-\alpha(n)R_i}}{f} \quad (5)$$

$$f = \sum e^{-\alpha(n)R_i} \quad (6)$$

と書かれる。この式は、全体に R_T の降雨があった場合、全体 N 個の細胞のうちで、雨量が $(n)R_i$ となる細胞領域の数 n_i を与えるものであるが、同時に、「ある1つの細胞領域で体積雨量が $(n)R_i$ となる確率 $(n)p_i$ を与えるものである。

4. 領域の大きさと雨量

個々の細胞領域での降雨の確率分布は前項で示した。ここでは2つの細胞領域、3つの細胞領域と、 $2a$ 、 $3a$ 、 $4a$ 、……と面積を広げていった場合に、雨量の確率構造はどのようになるかを考えよう。本来、このような構造は雨域内部における大気擾乱の規模に応じて定まるものではあろうが、ここでは、個々の細胞での雨量が互に

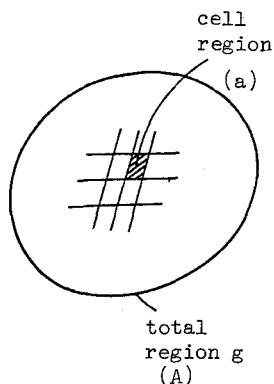


Fig. 2 Conceptual figure of total region g and cell region

独立であると仮定して考えることにする。なお、前節で誘導した確率密度は離散分布であるが、計算の便宜上本節に限り連続分布におきかえて議論するが、これによって理論の本質が損なわれることのないことを付記しておく。

まず、隣り合った2つの領域、2aの面積に合計 $_{(2)}R$ の雨の降る確率を考える。このときは、1つの細胞領域に $_{(1)}R$ の雨が降り、もう1つの領域に $_{(2)}R - _{(1)}R$ の雨が降って、合計

$$_{(1)}R + (_{(2)}R - _{(1)}R) = _{(2)}R$$

となればよい。いま、Rとして連続量を許すと、このような確率 $_{(2)}p$ は、式(5)の積分によって、

$$\begin{aligned} _{(2)}p &= \int_0^{_{(2)}R} _{(1)}p(_{(1)}R) _{(1)}p(_{(2)}R - _{(1)}R) d_{(1)}R \\ &= \left(\frac{1}{f}\right)^2 _{(2)}R \cdot e^{-\alpha _{(2)}R} \end{aligned}$$

となる。3aの面積に $_{(3)}R$ の降雨のある確率は、

$$\begin{aligned} _{(3)}p &= \int_0^{_{(3)}R} \int_0^{_{(2)}R} _{(1)}p(_{(1)}R) _{(2)}p(_{(2)}R - _{(1)}R) _{(1)}p(_{(3)}R - _{(2)}R) d_{(1)}R \cdot d_{(2)}R \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{f}\right)^3 (_{(3)}R)^2 \cdot e^{-\alpha _{(3)}R} \end{aligned}$$

同様にして、naの面積に $_{(n)}R$ の降雨のある確率は、

$$_{(n)}p = \frac{1}{(n-1)!} \left(\frac{1}{f}\right)^n (_{(n)}R)^{n-1} \cdot e^{-\alpha _{(n)}R} \quad (7)$$

と求められる。

ところで、式(5)において

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{f} \cdot e^{-\alpha _{(1)}R} d_{(1)}R = \frac{1}{\alpha f} = 1$$

であるから、 $\alpha = \frac{1}{f}$

すなわち、

$$_{(n)}p = \frac{1}{(n-1)!} \cdot \alpha^n (_{(n)}R)^{n-1} \cdot e^{-\alpha _{(n)}R} \quad (8)$$

と書くことができる。^{*}これはガンマ分布である。この分布には、 $n > 0$ 、 $\alpha > 0$ の2つのパラメータが含まれているが、nは形のパラメータ、 $1/\alpha$ は尺度のパラメータと呼ばれるものである。

以上、面積と雨量との関係を調べてきたが、(8)式をそれぞれの平均面積雨量 $_{(n)}r$ に変換すると、この $_{(n)}r$ の分布はガンマ分布

$$_{(n)}p(_{(n)}r) = \frac{\beta^n (_{(n)}r)^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\beta _{(n)}r} \quad (9)$$

ただし、

$$\beta = n \cdot \alpha \cdot a \quad (10)$$

に従うことが知られる。

以上のようにして、全体領域にある一定量の降雨 R_T があった場合、その内部のnaの面積に降る平均面積雨量 $_{(n)}r$ はガンマ分布にしたがうことが示された。この場合、 α の値は R_T の値、すなわち、(2)式の条件によって定められる定数である。

^{*} 式(5)よりこのガンマ分布は積率母関数を用いても導くことができる。

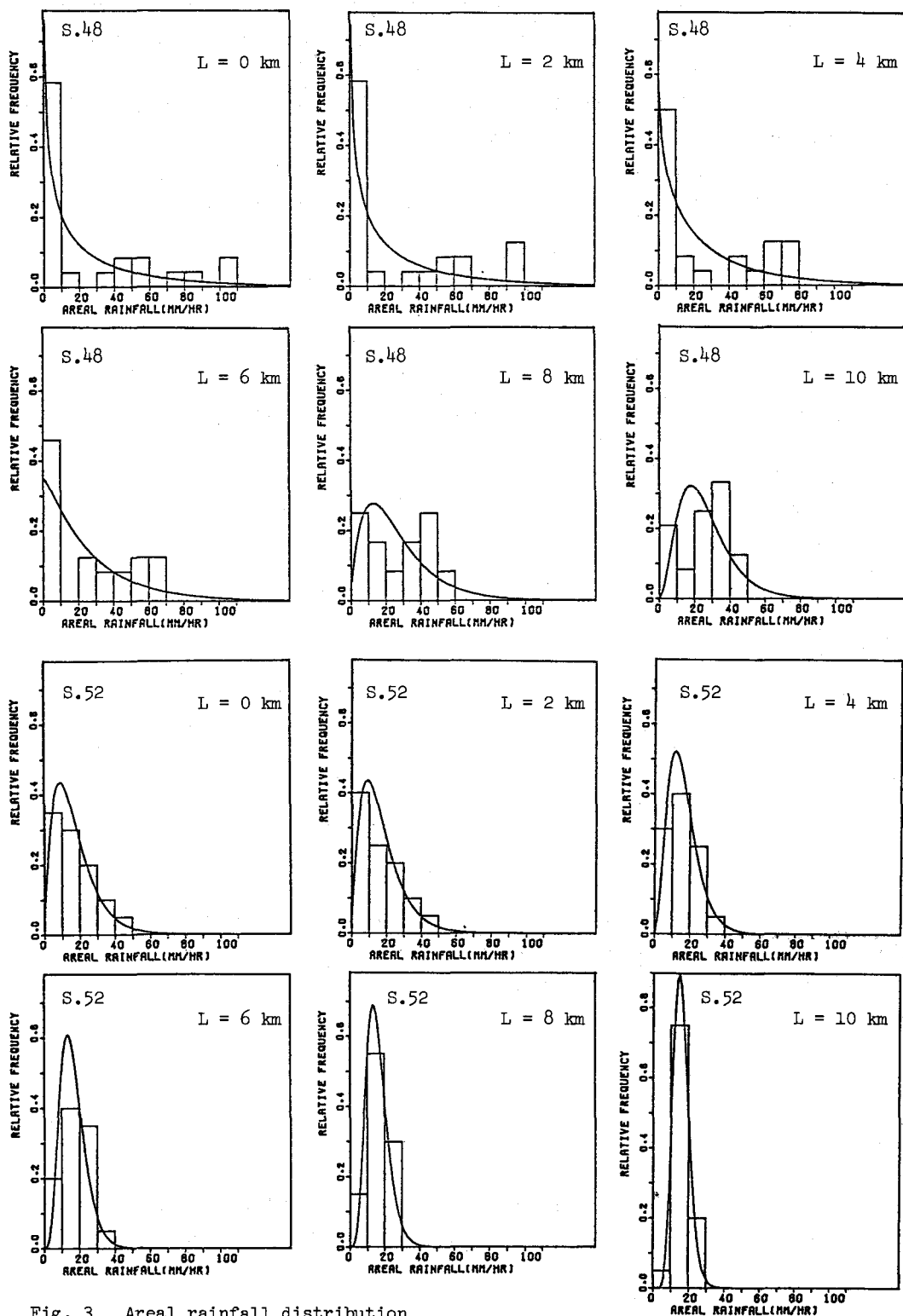


Fig. 3 Areal rainfall distribution

5. 名古屋市域における降雨の場所的分布

対象とした降雨時に、降雨が面積とどのような関係にあったか、先に示した降雨について、かつ多くの正時～正時の時間のものについて検討したが、それらのうちの2例を示したのが図-3の棒グラフである。この図は、各観測点を中心とし半径 L km (したがって面積 πL^2 km²) の円を描き、この円内に含まれる観測点の降雨資料より算術平均的に平均面積雨量を算定し、度数分布をその円の面積と、対応させて示した図である。すなわち、領域内で、平均面積雨量 r が何個の円(面積 na) に発生したかを相対的に表わしたものである。ここで用いた観測点の数が十分に大きいとは言えない点、さらには、いくつかの円が互に若干重なり合っている、すなわちいくつかの資料が互に独立でない形で入り込んでいる点に若干の問題はあるが、面積の広がりに応じて平均面積雨量の分布が変化しているようすを見ることが出きよう。そのようすは、面積が小さい場合には指数分布に近い形状をしているが、面積が大きくなるとともにガンマ分布的になり、さらに面積が大きくなると正規分布に近い形をとっている。

これらの分布に、式(9)で与えられるガンマ分布を fitting させるに際しては、パラメータを推定する必要があるが、これには積率法を用いた。分布(9)の平均値 $E(r)$ 、分散 $Var.(r)$ はそれぞれ、

$$E(r) = n/\beta, \quad Var.(r) = n/\beta^2 \quad (1)$$

となるから、平均値と分散が与えられれば、パラメータ、 n, β したがって、 n, α の値が求められる。標本平均値 μ 、標本分散 σ^2 はそれぞれ

$$\mu = \frac{1}{n} \sum r_i \quad (2)$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-1} \sum (r_i - \mu)^2$$

で算定した。

このような積率法を用いて分布モデルの fitting を行なったものを図-3に重ねて示した。

このパラメータは、各面積ごとに、つまり半径 L が変化することと独立に評価したものである。

6. 平均降雨強度の場特性

a) $\beta - n$ 関係

式(10)よりわかるように、 β と n とは比例関係にあり、その比例係数が $a\alpha$ となっている。ここで a, α について考えて見ると、まず α は、式(2)の条件から求められ、全降雨量と細胞領域の大きさ a 、すなわち N の値によって変化するが式(9)の誘導よりわかるように、降雨ごとにある一定値をとるべきものである。

一方、細胞領域の大きさ a がいくらであるかということも、本来は物理事象としての大気擾乱の規模などが関与するであろう。しかし、分布モデル(9)式を導く過程からも明らかとなり、理論的にはこの細胞の大きさ a はある一定値としてきた。そして、少なくとも個々の降雨機会ごとにはある一定値をとるべきものである。

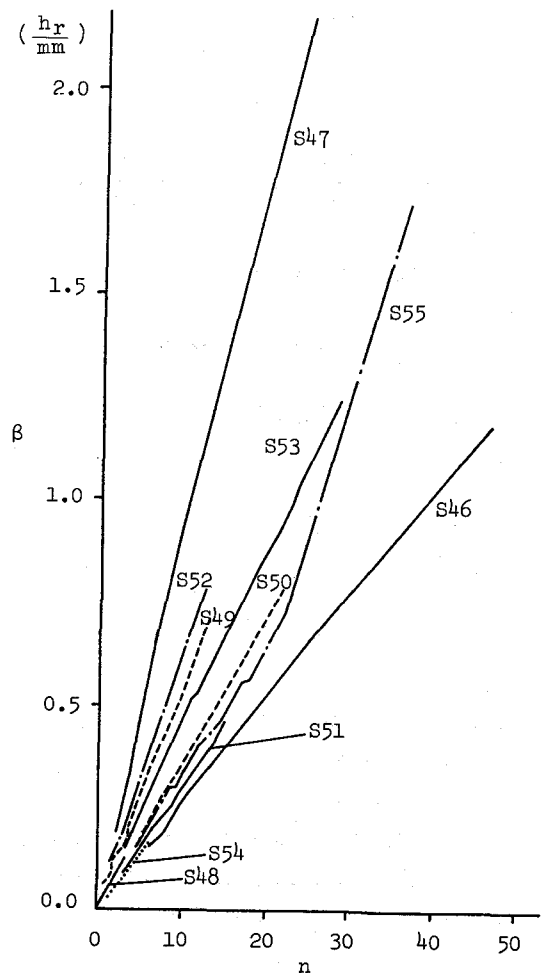


Fig. 4 Relationships between β and n

以上より、 $\beta \sim n$ の比例定数 $a\alpha$ は降雨ごとに一定となるべきことがわかる。そこで、図-4 では本研究で対象とした降雨事象について、それぞれ最大地点雨量を生じた1時間の降雨量について β と n の値をプロットした。この図よりわかるようにどの例をとってもほぼ一直線となりしかも原点を通り上記の理論的考察の直線性を示している。各事例について、パラメータの値は地域面積が変わるごとに全く独立に求めており、実測データに基づくこれだけの直線性は非常に興味深い。

b) パラメータ $a\alpha$ について

図-4 の各直線の傾きは前述したように $a\alpha$ であり、降雨毎に変化する量である。

そこで、 $a\alpha$ の値の特性について考えよう。先の(2)式を変形すると、

$$\bar{r} = \frac{\sum r_i n_i}{N} \quad (13)$$

$$a\bar{r} = \frac{\sum a r_i e^{-a\alpha r_i}}{\sum e^{-a\alpha r_i}}$$

であるが、式(6)より

$$f(\alpha) = \sum e^{-a\alpha r_i} \quad (14)$$

であるから、

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} &= -\sum a r_i e^{-a\alpha r_i} \\ \therefore a\bar{r} &= -\frac{\partial f(\alpha)}{\partial \alpha} / f(\alpha) = -\frac{\partial}{\partial \alpha} [\log f(\alpha)] \end{aligned} \quad (15)$$

と書かれる。

そこで、降雨を測定する最小単位を r_0 とすると、 r_i は、 $0, r_0, 2r_0, 3r_0, \dots$ の値しかとりえない。このように考えれば、

$$\begin{aligned} f(\alpha) &= 1 + e^{-a\alpha r_0} + e^{-2a\alpha r_0} + \dots \\ &= \frac{1}{1 - e^{-a\alpha r_0}} \end{aligned} \quad (16)$$

この式を、式(15)に用いると

$$a\bar{r} = \frac{a r_0 e^{-a\alpha r_0}}{1 - e^{-a\alpha r_0}}$$

したがって、

$$a\alpha = \frac{1}{r_0} \log_e \left(1 + \frac{r_0}{\bar{r}} \right) \quad (17)$$

がえられる。

この式は、 $a\alpha$ の値を、降雨を測定する最小単位 r_0 と、全領域についての平均面積雨量 $\bar{r}$ とで与えるものである。今回分布形状を考えるに際しては 10 mm/hr を単位として採用してきたので

$$r_0 = 10 \text{ mm/hr}$$

であり、各降雨の r とこの r_0 を用いれば上式にしたがって $a\alpha$ の値が算定される。こうして求めた $a\alpha$ の理論値を図-5 に実線で示したが、これは同図に○印で示した実測データより得られた値とよく対応しており、このことから式(17)が $a\alpha$ の値をかなり精度よく与えることがわかった。

7. まとめ

以上、本研究で得られた結果をまとめれば以下のとおりである。

- i) ある領域に全体としてある量の降雨がある時、等面積の N 個の細胞領域の1つに R_i なる雨量の生ずる確率

は指数分布にしたがう。

ii) そうした細胞領域が複数個集まった領域に R_i なる雨量が降る確率はガンマ分布となる。これは面積平均雨量についても同様である。

iii) 分布のパラメータ β と集合した細胞領域の個数 n との間には比例関係が期待され、これは実測データにより示された。

iv) $\beta \sim n$ の比例定数 $a\alpha$ の特性について、 $a\alpha$ が降雨測定の最小単位 r_0 と平均面積雨量 $\bar{r}$ とにより与えられることが示され、その関係は実測データをよく説明した。

まえがきでも述べたとおり、流域平均降雨強度の合理的な算定には降雨の空間的分布への考慮が不可欠である。こうした研究は従来経験的手法が中心であり、そうした中にあって本研究の理論的アプローチは有意義なものであると思われる。ただ、理論的であるがゆえにその前提とする仮定の検討が重要であり、この点に関して降雨の生起の独立性などは今後の検討課題としたい。

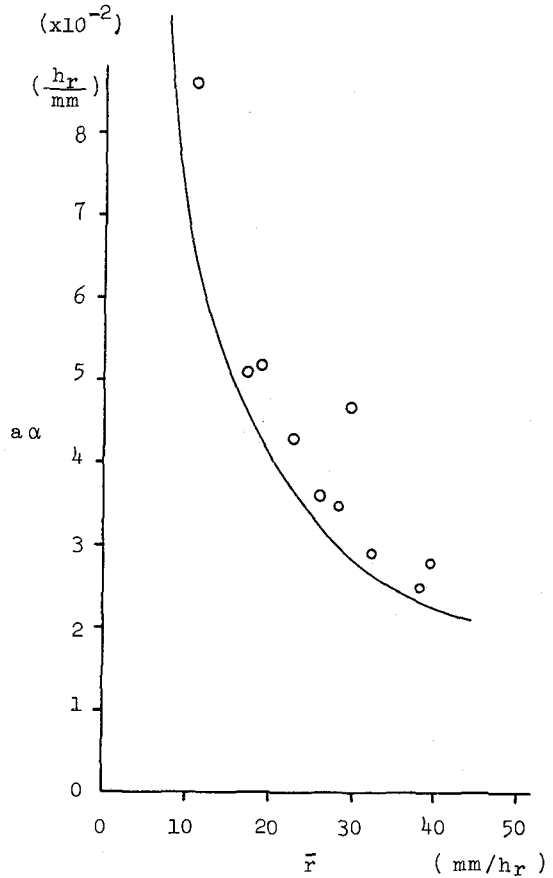


Fig. 5 Relationship between $\bar{r}$ and $a\alpha$