

土砂の掃流機構に関する基礎的研究

Fundamental Study of Mechanism on Bed Load Movement

早稲田大学大学院 学生員 藤 堂 正 樹
早稲田大学理工学部 学生員 関 根 正 人
早稲田大学理工学部 正 員 吉 川 秀 夫

1. はじめに

土砂の掃流機構は、土砂粒子の河床上濃度及び速度という2つの要因から成り立つ。しかしこの2つの要因を決定論的解釈により説明することは、現象の複雑さから極めて困難である。そこで本研究は、確率論的手法を取り入れ、電算機によるシミュレーションにより、濃度及び速度の z 方向分布を求めたものである。

2. シミュレーションによる存在確率 $f(z)$ と移動速度 $\overline{v(z)}$

2-1. シミュレーションの概要

流水中を転動・跳躍する粒子の軌跡を二次元的に追跡し、その移動機構に関する物理的考察を加えることが本シミュレーションの主たる目的である。粒子の形状としては、簡単のために球を用いることにした。河床は、移動する球と同一の球が平坦かつ密に敷き並べられているものとする。さらに、跳躍している球どうしの衝突はないものとする。移動距離については、原則として、Einstein による粒径の100倍程度とし、これだけ移動したときにシミュレーションを終えるものとする。

・基礎方程式

流れ方向を x 、鉛直方向を z とする。流水中におかれた球が流れ方向に受ける力は、主として水による抗力で、これは、流速 $u(z)$ と球の移動速度 $v(z)$ との相対速度の二乗に比例するものと考えられる。なお、これ以外に球と河床材料との接触抵抗も働くわけであるが、これは前者に比べて無視してもさしつかえないと考えた。一方、鉛直方向には、重力および水による抗力が働くと考ええる。以上のことを考慮して運動方程式を立てると、

$$M \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{1}{2} \rho C_{DH} A \left(u - \frac{dx}{dt} \right) \left| u - \frac{dx}{dt} \right| \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$M \frac{d^2z}{dt^2} = -Mg - \frac{1}{2} \rho C_{DV} A \frac{dz}{dt} \left| \frac{dz}{dt} \right| \quad \dots\dots\dots (2)$$

のようになる。ここに、 C_{DH} 、 C_{DV} は x および z 方向の抗力係数であり、 A は投影面積である。球の質量である M としては、非定常運動であるために、仮想質量(virtual mass)を含めたものを考える。さらに、流速 u は、対数分布則に従うものとして、

$$u(z) = u_* \cdot [8.5 + 5.75 \log(z/k)] \quad \dots\dots\dots (3)$$

を用いる。ここに、 k は粒径の0.6倍とする。

さて、(1)および(2)式を掃流砂の境界条件の下で解析的に解くことは不可能に近い。そこで、これを差分方程式の形に直して、数値解析をすることにした。差分方程式を以下のようになる。

$$x(t+2\Delta t) = 2 \cdot x(t+\Delta t) - x(t) + \alpha [u(t)\Delta t - x(t+\Delta t) + x(t)] \left| u(t)\Delta t - x(t+\Delta t) + x(t) \right| \quad \dots\dots (4)$$

$$z(t+2\Delta t) = 2 \cdot z(t+\Delta t) - z(t) - \beta [z(t+\Delta t) - z(t)] \left| z(t+\Delta t) - z(t) \right| - g(\Delta t)^2 \quad \dots\dots (5)$$

$$\text{ここに、} \alpha = \rho C_{DH} A / 2M, \quad \beta = \rho C_{DV} A / 2M \quad \dots\dots\dots (6)$$

である。なお、抗力係数 C_D は、 Re との関係を表わす曲線を、

$$C_D = 24 / Re + 3 / Re^{0.5} + 0.34 \quad \dots\dots\dots (7)$$

のように近似し、各時間での Re に対して(7)式によって求めることにする。

・球と河床との衝突機構

本シミュレーションは、河床上に置かれて静止している球が、流水による抗力を受けて移動を開始することにより始まるわけであるが、ひとたび移動を始めた球は、やがて河床材料との衝突により上向きの力を受けて、転動から跳躍へと移行する。跳躍を始めた球は、一跳躍が終る毎に河床と衝突をし、その跳躍高さ・距離の増幅あるいは減衰を繰り返して、やがて静止の状態に戻っていく。このように、(4)および(5)式を用いてシミュレーションを行なうに当っては、球と河床との衝突の問題が極めて重大である。この衝突を左右する要因としては、主として、(イ)衝突の際の反発係数 e 、(ロ)衝突直前の最終落下角度 θ 、(ハ)河床球上の衝突位置 ϕ の3点が考えられる。

まず、(イ)の反発係数 e の値については、我々のガラスビーズによる実験結果としては0.5という値が得られたのに対し、矢野・土屋・青山らの報告²⁾によれば0.4～0.6程度の値であるとされる。反発係数は、河床粒子の詰まり具合により変わるものと考えられるので、河床を密とした本シミュレーションでは、 $e = 0.6$ を基本とすることにした。なお、この値を変えた場合の影響もあわせて考察することにする。

次に、(ロ)の最終落下角度 θ と(ハ)の衝突位置 ϕ についてであるが、両者の間には密接な関係がある。 θ と ϕ の取り方については、図1に示したが、任意の θ に対してとりうる ϕ の範囲には限りがあり、この範囲内のいかなる値をとるかは任意である。そこで、乱数を利用することにする。そのため、図2のように、河床の球に $\phi = \text{一定}$ 、 $\psi = \text{一定}$ の線を引き、これらにより、球を ϕ 、 ψ とも 10° 刻みに分割して考えることにした。このとき、衝突前後の球の移動速度 v および v' には、

$$v' = ev \cos \phi \quad \dots\dots\dots (8)$$

なる関係がある。ここで、球の軌跡を二次元的に処理するという立場から、任意の ϕ の位置での v' の値として、各 ϕ の位置での v の値にその区画の面積を乗じて求めた重みつき平均値をとることとし、衝突が $\phi = 0$ の位置で起こるものとする。以上のような方法により、 v' およびその x 、 z 方向成分 v'_x 、 v'_z は、

$$v' = j e v \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$v'_x = j e v \cos (2\phi + \theta) \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$v'_z = j e v \sin (2\phi + \theta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。ここに、 j は定数で、計算の結果0.849になる。さて、衝突後の x および z 方向の速度成分を(10)、(11)式のようにする関係上、任意の θ に対する ϕ の出現率は、図2に示した $\phi = \text{一定}$ の区間群の面積比率と一致すると考えた。これに基づき、任意の θ に対して乱数を発生させて、一跳躍が終る毎に衝突位置 ϕ を決めることにした。

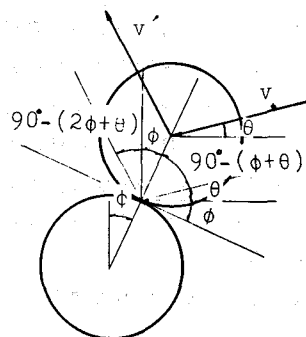


図1 衝突機構説明図(θ , ϕ , v , v')

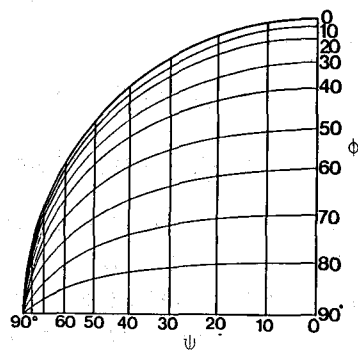


図2 河床球面の分割方法

2-2. z方向の球の存在確率 $f(z)$

移動状態にある球が、河床から z の位置にどの程度の割合で存在しているかを表わすのが存在確率 $f(z)$ である。この $f(z)$ は、掃流砂の濃度 $c(z)$ と線形関係にあるため、 $f(z)$ を知るとは濃度分布を知ることにつながるという意味で意義があると考えられる。シミュレーションにより求めた存在確率 $f(z)$ の分布図を図3の(a)～(h)に示す。(a)～(e)では、無次元せん断力 τ^* のみを変えたときの $f(z)$ の分布の比較を、また、(c)と(f)では、粒径のみを変えたときの比較を行った。(c)と(g)では、球の比重 σ のみを変えたときの比較を、(e)と(h)では、反発係数のみを変えたときの比較をそれぞれ行った。

図3の(a)～(e)より、 τ^* が大きいほど z 方向に広範囲に分布し、 τ^* が小さいほど河床付近に存在する確率が

高いことがわかる。これは、同一球の場合には τ^* が大きいほど摩擦速度 u_* が大きく、それゆえ流速も大きくなることと密接な関係がある。すなわち、流速が大きい流れほど球が受ける力の x 方向成分は大きく、それだけ加速されやすく、 x 方向の移動速度成分が大きくなる。これが衝突の際の θ および ϕ の値によって、 z 方向の初速度 v_z が大きくなったときに、 z 方向のかなり上方まで上昇することができるわけである。同様のことが(c)と(f)、(c)と(g)についても言える。すなわち、 τ^* ＝一定の下で粒径あるいは比重の小さい球を跳躍させるということは、 u_* が小さく、流速の小さい流れを表わすわけであるから、同様のことが言えるのである。また、(c)と(h)から反発係数が大きいほど z 方向に広範囲に存在するという結果が得られた。

なお、粒子の跳躍高さおよび距離の分布を、矢野・土屋・青山²⁾らの実測結果と比較したのが図4及び図5であり、両者は比較的良好に一致していることがわかる。

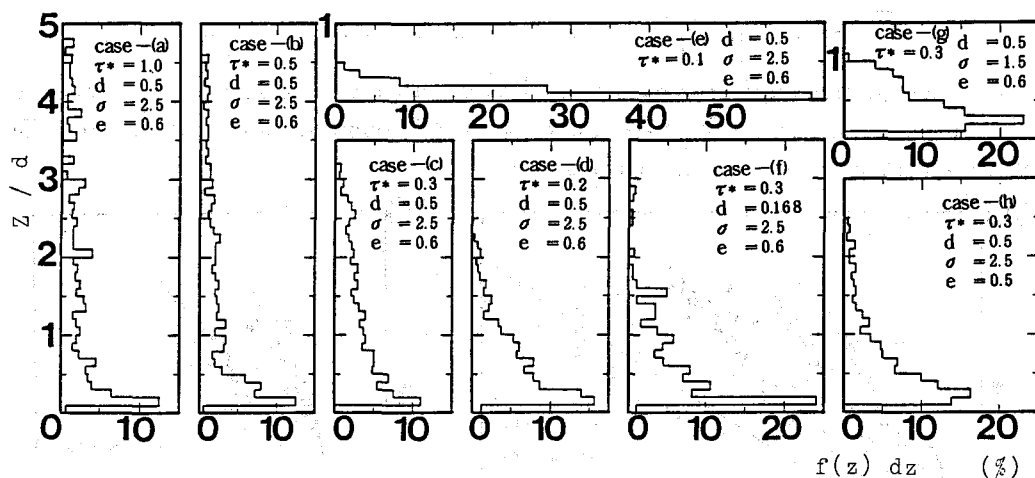


図3 粒子の存在確率の鉛直方向分布

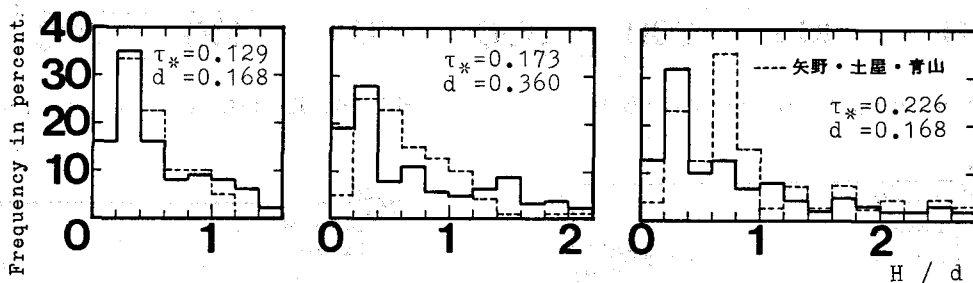


図4 粒子の跳躍高さ H の頻度分布

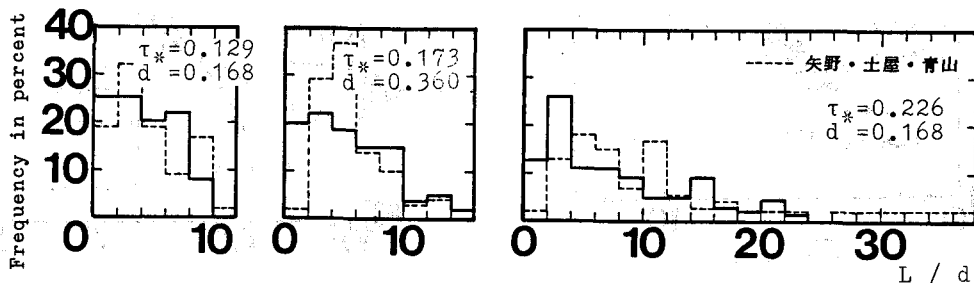


図5 粒子の跳躍距離 L の頻度分布

2-3. 移動速度 $\overline{v(z)}$

x方向の移動速度 $\overline{v(z)}$ のz方向分布を図6および7に示す。図6では、同一の球で τ^* のみを変えたときの分布を、図7では、 $\tau^* = \text{一定}$ の下で球の粒径、比重および反発係数のみを変えたときの分布を、それぞれ比較したものである。

図6および7より、移動速度 $\overline{v(z)}$ と z/d との間には、

$$\overline{v(z)} \propto \log(z/d) \quad \dots\dots\dots (12)$$

なる関係があることがわかる。さらに、任意の z/d に対して、図6では $\sqrt{\tau^*}$ で、図7では $\sqrt{sgd}$ (s : 球の水中比重) で、それぞれの $\overline{v(z)}$ を除すると、ほぼ一致することがわかる。そこで、 $\overline{v(z)}$ を u_* で除して無次元化したのが図8で、図上の直線付近に比較的良好に分布した。なお、この直線を表わす式が次式である。

$$\frac{\overline{v(z)}}{u_*} = 7.0 + 6.4 \log\left(\frac{z}{d}\right) \quad \dots\dots\dots (13)$$

さらに、断面平均移動速度 $\overline{V}$ と τ^* の関係を Francis³⁾ の実験結果と比較したのが、図9である。図9より、本シミュレーションにより求めた $\overline{V}$ と Francis による値とはほぼ一致することがわかるほか、 $\overline{V}$ を $\sqrt{sgd}$ で除して無次元化すると整理し易いこともわかる。

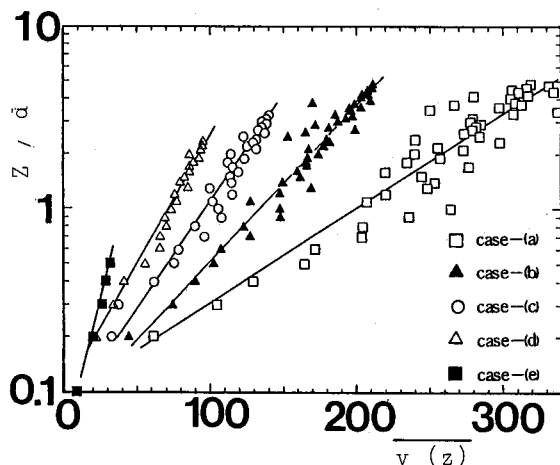


図6 移動速度分布 (τ^* による比較)

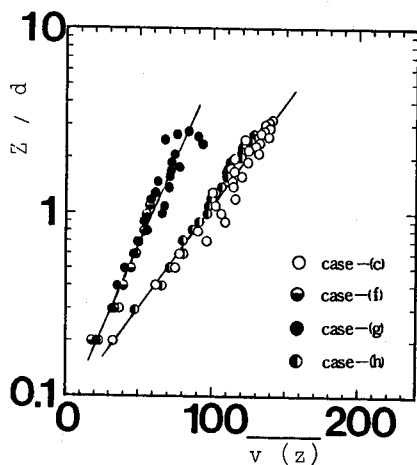


図7 移動速度分布 (d, σ, e による比較)

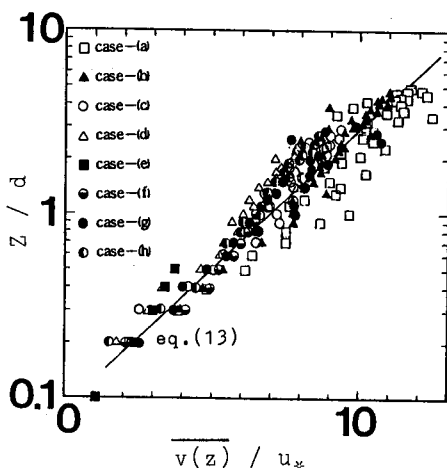


図8 $\overline{v(z)}/u_*$ と z/d の関係

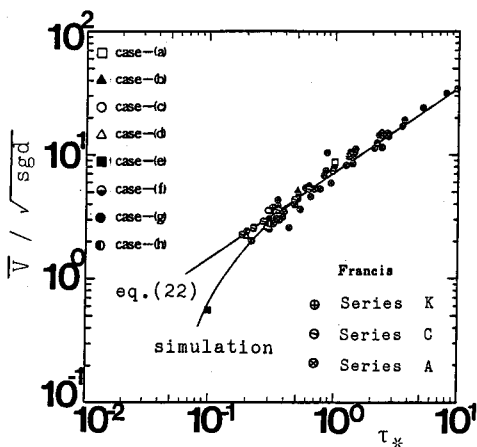


図9 $\overline{V}/\sqrt{sgd}$ と τ^* の関係

3. 濃度総量の評価

前章で掃流砂の存在確率及び速度の z 方向分布が得られた。存在確率分布より、分布の形状が定まったので、次に z 方向濃度分布について調べる。濃度分布 $c(z)$ は次式で表わされる。

$$c(z) = N \times f(z) \quad \dots\dots\dots (14)$$

ここに N は、河床単位面積上に存在する掃流砂粒子体積を表わす。先づ、 N と、単位時間当たりの粒子離脱率 P_s との間には、

$$N = N_B \times P_s \times t \quad \dots\dots\dots (15)$$

という関係が成立する。ここに示す t とは、河床を離脱した粒子が再び河床に停止するまでの時間であり、粒子が step-length に相当する距離だけ移動するのに要する時間である。又、 N_B は河床単位面積上に存在する粒子体積である。筆者らは、すでに P_s についてはその推定式を提案しており⁴⁾、河床粒子の諸々の特性量と、流れの持つ河床せん断力とから P_s を計算できる。そこで t の評価について以下に考察を加える。

本研究では、実測による掃流砂平均移動速度、及び step-length の実測データから、 t の推定を試みた。ここで述べる掃流砂平均移動速度とは、 $v(z)$ の掃流層内についての重みつき平均値であり、以下に $\bar{v}$ と表わす。又、step-length は、 $\bar{L}$ と表わす。

今、図10に示すような平坦な単位巾河床面を考える。

任意の横断面を原点 O とし、その断面を中央として $\bar{v} \times (\text{単位時間})$ の距離を持つ、第0区間を考える。同様に上流側にも1, 2, ……という区間を与える。ここで第 n 区間を離脱、或いは通過中の粒子が、更に第 $(n-1)$ 区間を通過する割合を q とする。尚、簡単

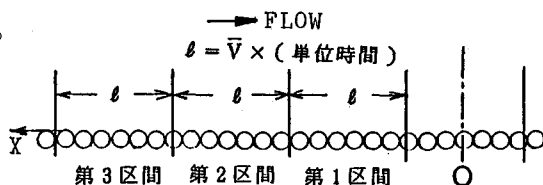


図10 説明図

のため、粒子の離脱・通過の基準点は各区間の中心の位置とする。一方、任意の1区間を途中で停止せずに通過する粒子について、その平均移動速度を考え、その値が $\bar{v}$ 以上である割合を r とする。すると、 q は粒子の移動距離に関する確率、 r は移動速度に関する確率で、両者は独立である。次に、単位時間に断面 O を通過する粒子数 (= 掃流砂量) を考える。以下では単位時間を1秒とし、単位時間当たりに、河床の1区間から離脱する粒子体積を1とする。

1秒前に離脱した粒子のうち、1秒後に断面 O を通過するもの

1区間から (rq)

2秒前に離脱した粒子のうち、2秒後に断面 O を通過するもの

1区間から $(1-r) \times (rq)$ 2区間から $(rq)^2$

3秒前に離脱した粒子のうち、3秒後に断面 O を通過するもの

1区間から $(1-r)^2 (rq)$ 2区間から $2 \times (1-r) \times (rq)^2$ 3区間から $(rq)^3$

一般に、 t 秒前に第 x 区間より離脱した粒子のうち、 t 秒後に断面 O を通過するもの atx は、

$$atx = (rq) \times t-1Cx-1 \times (1-r)^{t-x} \times (rq)^{x-1} \quad \dots\dots\dots (16)$$

となる。次に t 秒前に離脱した粒子のうち、 t 秒後に断面 O を通過するものは、 atx を x について上流側に積分し、二項定理を用いれば、

$$\begin{aligned} \sum_x atx &= (rq) \sum_{x=1}^{t-1} t-1Cx-1 \times (1-r)^{t-x} \times (rq)^{x-1} \\ &= (rq) \times (1-r+rq)^{t-1} \quad \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

更に、(17)式を用いて、時間軸方向にもさかのぼって和をとれば、単位時間に断面 O を通過する粒子個数 S が算定できる。(17)式の t についての積分は、 $(1-r+rq)$ を公比とする等比級数の和であるから、

$$S = \sum_{t=1}^{\infty} \left(\sum_x atx \right) = \frac{q}{1-q} \quad \dots\dots\dots (18)$$

即ち、断面Oを通過する粒子個数は、 q の関数となる。ここで無次元量 δ を導入し、

$$\delta = q / (1 - q) \quad \dots\dots\dots (19)$$

とおけば、 δ は、単位時間に断面Oを通過した粒子個数と、1区間から離脱した粒子個数との比になる。したがって δ の評価ができれば、(19)式の q は次式で表わされる。

$$t = \delta \times (\text{単位時間}) \quad \dots\dots\dots (20)$$

一方、(19)式で、 $q = 0.5$ の時、 $\delta = 1$ である。 $q = 0.5$ とは、今の場合、移動を開始した粒子のうち、5割が1区間以上の距離を移動し、5割が、それ以下の距離しか移動できなかったことであり、平均的には、step-lengthが、 $\bar{V} \times (\text{単位時間})$ の距離に等しかったことを意味する。 δ について、step-lengthの平均値 $\bar{L}$ と関連させて、別の解釈をすれば、

$$\delta = \bar{L} / \bar{V} \times (\text{単位時間}) \quad \dots\dots\dots (21)$$

となる。そこで、 δ を求めるために、 $\bar{L}$ と、その時の $\bar{V}$ とを得て、両者の比較を行なった。その際、 $\bar{L}$ の実測値として、辻本⁽⁵⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾のデータを用いた。又、掃流砂平均移動速度 $\bar{V}$ については、Francis⁽³⁾の実測を参考にして、2章でのシミュレーション結果とは別に、次式⁽⁴⁾を得ている。

$$\bar{V} / \sqrt{sgd} = 7 \times \tau_*^{0.72} \quad \dots\dots\dots (22)$$

ここに、 s : 水中比重、 d : 粒径

$\bar{V}$ の算出は、(22)式に依った。こうして得られた結果を粒径 d で無次元化した後、比較したものが、図11である。尚、 $\bar{L}$ の測定の大部分は、 $\tau_* = 0.05 \sim 0.1$ の条件下で行なわれている。図によると、結果には少々バラつきが見られ、 $\bar{L}$ の測定の困難さがうかがえる。しかしながら大半のプロットは、 $\delta = 0.5 \sim 2$ の範囲内におさまっている。したがって、 $\bar{L}$ の実測の困難さも考えると、この実測条件の範囲では、 δ の平均値とし

て、 $\delta = 1$ と結論しても良いと判断できる。そこで、掃流中の粒子の移動距離 $\bar{L}$ は、 τ_* によって変化しその値は、その時の、掃流砂平均移動速度 $\bar{V} \times (\text{単位時間})$ に等しいと考える。

以上までの議論から、(20)式の t は、単位時間とほぼ等しいと考えてよい。したがって(19)式より濃度総量 N が算出でき、(14)式から濃度分布 $c(z)$ が得られる。則ち、（ここでは 単位時間 = 1 秒）

$$c(z) = N_B \times P_S \times (\text{単位時間}) \times f(z) \quad \dots\dots\dots (23)$$

4. 結 語

本研究では、掃流される粒子の流送過程のうち、河床粒子との衝突機構に関して、確率論的手法を用いることにより、掃流砂の濃度分布及び速度分布を明らかにした。又、得られた速度と、粒子のstep-lengthを比較して両者の間の関係を見出した。尚、本研究では河床状態を平坦・平衡・定常であるものとして扱った。非平衡な河床状態や、河床波を伴う河床における解析においては、また別の要因を考えなくてはなるまい。それらに対する検討を今後の研究課題としたい。

本研究は文部省科学研究費（総合研究A ストカスティック・ハイドロリックスの手法の確立と応用の研究 代表者 林泰造教授）の補助を受けた。記して謝意を表します。

参考文献：(1)土木学会；水理公式集 p411 (2)矢野・土屋・青山；京大防災研年報第12号B 1969

(3)Francis, J.R.D；Proc.Royal Society of London 1973 (4)吉川ら；土論集（投稿中）

(5)辻本；京大学位論文 (6)篠原・椿；九大応力研究所々報第10号 1957 (7)高橋；新砂防60 1966

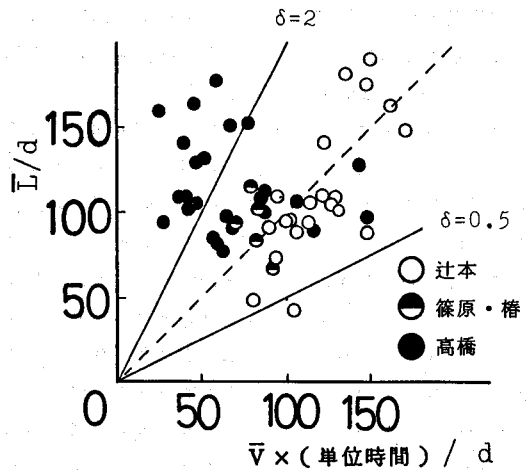


図 11 $\bar{V}$ と $\bar{L}$ の関係