

Saltation 運動の確率的性質
Stochastic Behaviors of Saltating Particles

京都大学工学部 正 員 中 川 博 次
京都大学工学部 正 員 辻 本 哲 郎
京都大学大学院 学生員 赤 尾 恒 博

1. ま え が き

本論文は、掃流砂の運動形式として saltation を仮定し、流砂理論の展開を図ったものである。掃流砂の運動様式は rolling, sliding, saltation の混在した複雑なもので、従来からいずれかの運動様式を仮定したアプローチが数多く行われてきた。著者らは、掃流砂れきの運動の本質が床面との間断ない衝突にあるとの考えから、また、従来の saltation 理論は単に一つの saltation の粒子軌跡を主体に考えられていて実際の流砂過程との懸隔の大きいことから、sliding 形式で包括的表現が可能との立場で研究を進めてきた¹⁾。しかしながら、種々のアプローチが何の関連もなく独立していることは研究の進展を阻むであろうし、また近い将来、掃流砂と浮遊砂の統一的取り扱いを画策する上で、掃流砂と浮遊砂の間に中間形式としての saltation を考えるのは意義あることと思われる。後者の立場での研究は、浮遊砂の規定濃度に関わる床面近傍の流砂挙動や、掃流、浮流の遷移についての知識をもたすだろうし、不安定性解析などで従来掃流砂、浮遊砂を別々に扱っていたことが解消されることになるだろう。

以上の目論みで saltation を扱うが、先にも述べたように従来の saltation 理論は一つの saltation の軌跡のみに着目したものが多く、これは数回から数10回と saltation を繰り返してはまた河床に停止、交換現象を生じる流砂過程の本質とはかけ離れていることに留意し、ここでは床面との接触を素過程とする saltation の継続 (successive saltation) を扱う。 successive saltation については土屋らがかつて詳しい検討を行っている^{2), 3)}が流砂の場合は不規則性の効果が強く、飛砂のように stationary successive saltation が出現するとは考え難い。本研究では、上述の点に鑑み、不規則性に着目して successive saltation を取り扱い、これをもとにした流砂理論の展開、検討を行う。

2. Saltation の基礎式とその実験的検証

saltation の運動方程式は土木以外の分野の研究者からも結構興味をもたれているようで昨夏 Istanbul で流砂力学をテーマに開催された Euromech 156⁴⁾においてもいくつかの論文が提出され、詳細かつ厳密な取扱いが指向されている。しかしながら流砂現象の記述という観点からすれば一つ一つの saltation の軌跡そのものより、それらの継続およびそれらの集合に意味があり、一つ一つの saltation の支配方程式の精粗は、その総合化の中で埋没してしまうものと考えられる。したがってここでは次のような簡単な基礎式によって素過程たる一つの saltation を表現することとする。

saltation 粒子に作用する力を重力と抗力 (ここでは粗砂を対象とし、抗力係数 C_D を一定とみなす。 C_D を Reynolds 数の関数としたものについては林らの論文⁵⁾で扱われている) のみとすると、粒子の鉛直方向の運動方程式は次のようになる。

$$d\hat{v}/dt = \mp v^2 - 1 \quad (\text{複号は上昇時-, 下降時+}) \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

$$\hat{v} \equiv \sqrt{C_D A_2 / 2 A_3} \cdot v_g / \sqrt{(\sigma / \rho - 1) g d} \dots\dots\dots (2)$$

$$\hat{t} \equiv \{ \sqrt{C_D A_2 / 2 A_3} / (\sigma / \rho + C_M) \} \cdot t \sqrt{(\sigma / \rho - 1) g / d} \dots\dots\dots (3)$$

$$\hat{y} \equiv (C_D A_2 / 2 A_3) \cdot \{ 1 / (\sigma / \rho + C_M) \} \cdot (y / d) \dots\dots\dots (4)$$

であり、 y : 粒子の河床からの存在高さ (図-1 参照), v_g : 粒子の鉛直方向速度, σ / ρ : 比重, d : 粒径, C_M : 付加質量係数, A_2, A_3 : 粒子の2次元, 3次元形状係数, g : 重力加速度である。

式(1)の解は

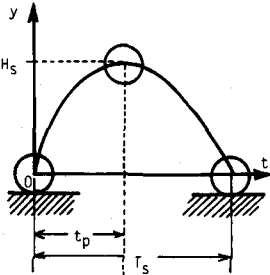


図-1 記号図

$$\hat{v} = \begin{cases} (\hat{v}_0 - \tan \hat{t}) / (1 + \hat{v}_0 \tan \hat{t}) & (\hat{t} < \hat{t}_p) \\ -\tanh(\hat{t} - \hat{t}_p) & (\hat{t} \geq \hat{t}_p) \end{cases} \quad (5)$$

$$\hat{y} = \begin{cases} \hat{H}_s + \ln |\cos(\hat{t} - \hat{t}_p)| & (\hat{t} < \hat{t}_p) \\ \hat{H}_s - \ln |\cosh(\hat{t} - \hat{t}_p)| & (\hat{t} \geq \hat{t}_p) \end{cases} \quad (6)$$

であり, saltation の特性量 (図-1 参照) の無次元量は以下のように求められる。 $\hat{v}_0$ は初速度の無次元量である。

$$\hat{t}_p = \arctan \hat{v}_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\hat{H}_s = -\ln |\cos \hat{t}_p| \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\hat{T}_s = \hat{t}_p + \ln |\sec \hat{t}_p + \tan \hat{t}_p| \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\hat{v}_s = -\tanh \{ \ln |\sec \hat{t}_p + \tan \hat{t}_p| \} \quad \dots\dots\dots (10)$$

上記の基礎式を検証するため粒径 0.395 cm の石炭粒子 ($\sigma/\rho = 1.29$) を用いて 16 mm フィルム解析を行った⁶⁾。図-2, 3 は式(5), (6)を, 図-4 ~ 6 は式(7)~(10)を検証したもので若干のデータのばらつきは見られるものの概ね適合性が認められるようである。実験は無次元掃流力が 0.05 ~ 0.20 程度で行われ, 顕著に saltation と認められる状態の標本を選んだ。またデータの整理にあたっては $C_D = 1.0$, $C_M = 0.5$, $A_2 = \pi/4$, $A_3 = \pi/6$ とした。

一方, 流下方向の運動方程式は作用流体力が粒子の位

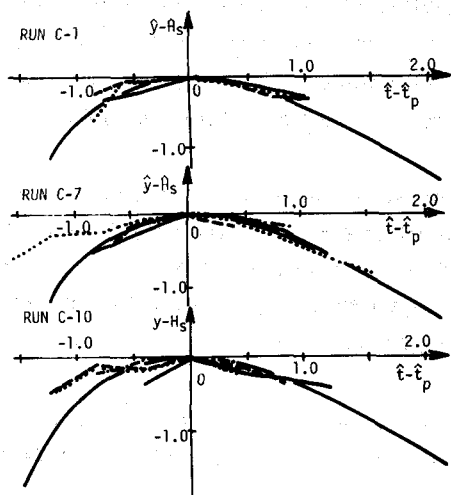


図-3 saltation 粒子の鉛直方向位置の時間的变化

置によって異なるため解析的に解くのが難しく, 近似的に扱われる⁵⁾ことが多い。流下方向の運動方程式は主として流体力による加速過程を表わすが, 初速度との関係もあり運動方程式そのものの検討より, saltation 粒子の流下方向速度の鉛直方向分布を流速分布と比較することの方が意義があろう。その一例が図-7 に示される ($y = 0$ は河床から $d/2$ の位置を表わしている点に注意)。この例では上昇時と下降時で顕著な差は無いが Sumer の実験結果⁷⁾のようにループを描くことがよくある。

3. Saltation 特性量の分布性状

16 mm フィルム解析による計測時だけにかかわらず, saltation の定義・判別は難しい。かなり rolling に近いも

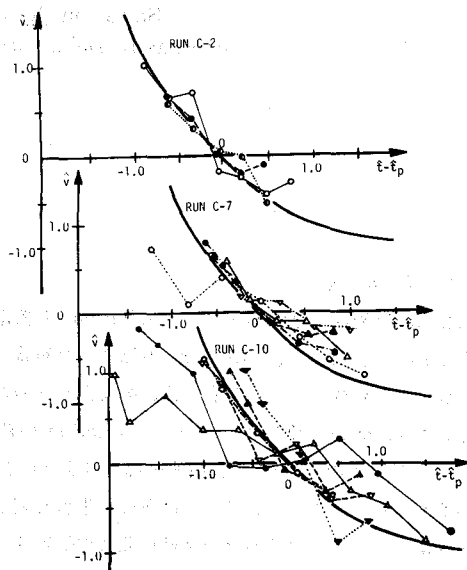


図-2 saltation 粒子の鉛直方向速度の時間的变化

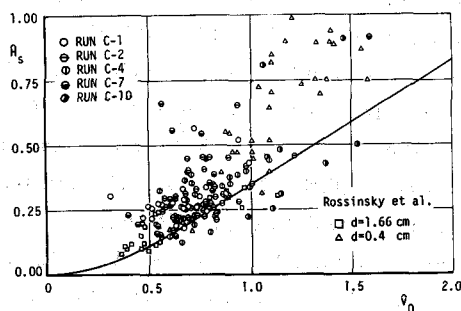


図-4 saltation 高さ

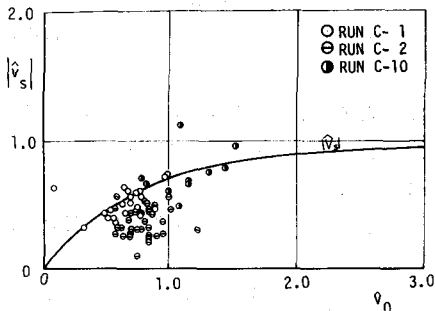


図-5 saltation 粒子の落下速度

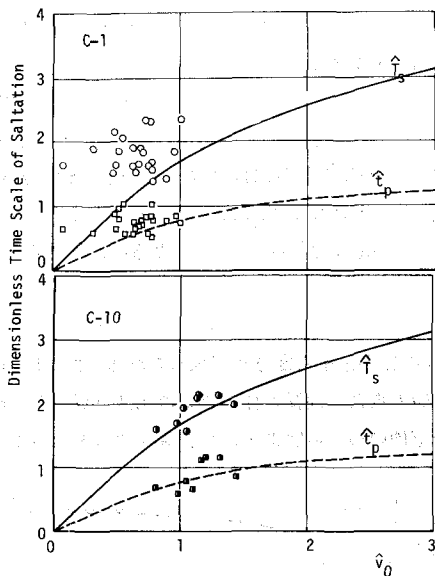


図-6 saltation の時間スケール

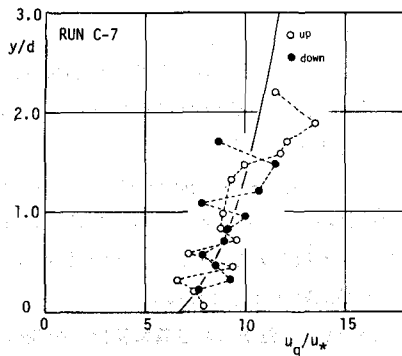


図-7 saltation 粒子の流下方向速度

のを含める場合もあろうし、逆に浮遊に近いものを含める場合もあろう。前章に示した実験でも主観的に顕著な saltation のみを標本として抽出したため、得られたデータの平均値やそれぞれの特性量の分布そのものの検討の意義は薄い。しかし、諸量の分布相互の関係については普遍的なデータが得られるはずだし、

又諸量の分布相互の関係の議論は不規則性に重点をおいた successive saltation のモデル構築に重要な意味をもつ。

ところで、初速度 $\hat{v}_0$ の変動は、初期移動または床面での反発の力学機構に素過程の不規則性（流体力の変動や床面の凹凸性状）を加味して求められるだろうから、これを既知とし、規準化された初速度 $\xi \equiv \hat{v}_0 / E[\hat{v}_0]$ の確率密度関数を $g_0(\xi)$ とすると saltation の特性量 $P (\equiv \hat{t}_p, \hat{H}_s, \hat{T}_s, \hat{v}_0)$ は $\hat{v}_0$ の関数として与えられ（式(7)～(10)), これを形式的に、

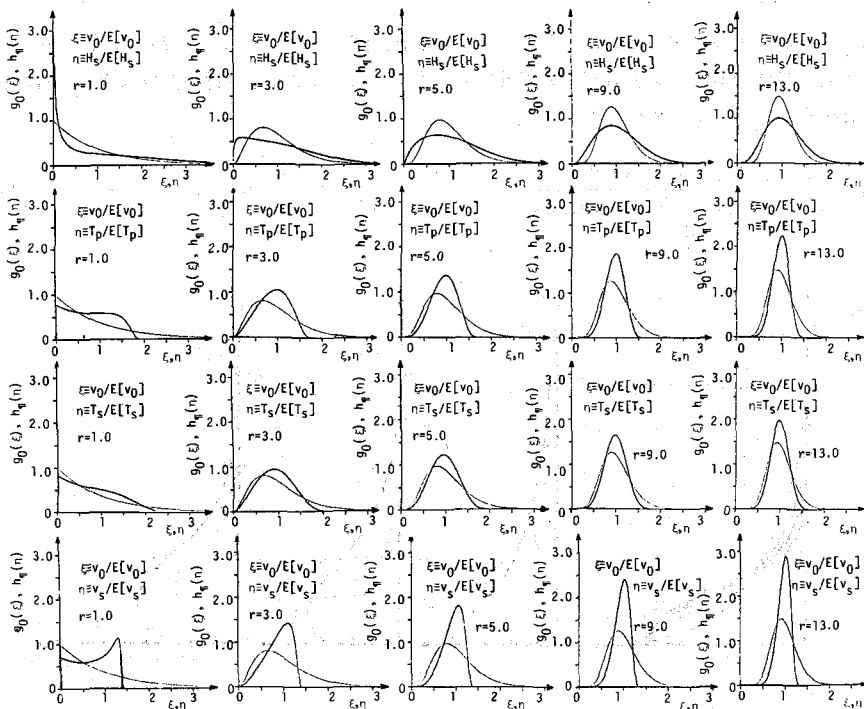


図-8 saltation 特性量の分布の変換

$$P = f_P(\hat{v}_0) \quad \dots\dots\dots (11)$$

と書くと、 P の規準化された確率密度関数 $h_P(\eta)$ は次式で与えられる。

$$h_P(\eta) = g_0(\xi) \cdot \{E[P]/E[\hat{v}_0]\} / |df_P/d\hat{v}_0| \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$\eta \equiv P/E[P] \quad \dots\dots\dots (13)$$

いま $\hat{v}_0$ の分布を shape parameter が r の gamma 分布として各量の分布性状を調べると図-8 が得られる。図中実線細線が $\hat{v}_0$ の分布、太線が各量の分布を表わしている。(ただし $E[\hat{v}_0] = 1.0$ の場合)。なお、実験結果では r の値が大きい、これは標本抽出が典型的な saltation に偏ったためで、実際には r の値はもっと小さい(分布が広い)と考えられる。

4. Saltation 粒子の存在確率密度と掃流砂濃度分布

前章までの検討にもとづいて、saltation 粒子の鉛直方向の存在確率密度分布が求められる。これより掃流砂濃度分布が求められ、流下方向速度分布との積の型式で(浮遊砂の場合と同様の様式で)の流砂量算定が可能となる。一方、こうした分布の検討は、掃流から浮遊への移行、浮遊砂の規定濃度推定にも有益な情報となることが期待される。

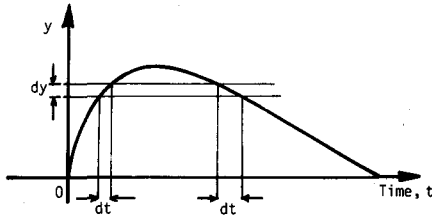


図-9 説明図

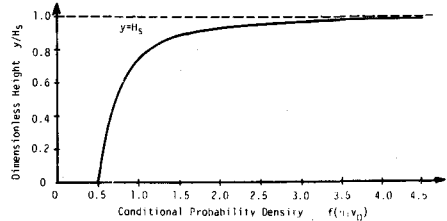


図-10 saltation 粒子の条件付存在確率密度

さて、いま $f(\hat{y}|\hat{v}_0)$ を、 $\hat{v}_0$ を与えたときの saltation 粒子の条件付存在確率密度とすると図-9 を参考に、

$$f(\hat{y}|\hat{v}_0) = (1/\hat{T}_s) \cdot |d\hat{t}/d\hat{y}| \hat{y} \quad \dots\dots\dots (14)$$

で与えられることがわかる。式(6)を用いて上式を計算すると、図-10 が得られる。図では $\hat{y}$ を $\hat{H}_s$ で規格化してあり、こうした表示では $\hat{v}_0$ による変化はほとんど認められない。 $\hat{v}_0$ による条件付の開放は次式で行われ、saltation 粒子の存在確率密度 $f(\hat{y})$ が求められる。

$$f(\hat{y}) = \frac{\int_0^\infty \hat{T}_s \cdot f(\hat{y}|\hat{v}_0) f(\hat{v}_0) d\hat{v}_0}{\int_0^\infty \int_0^\infty \hat{T}_s f(\hat{y}|\hat{v}_0) f(\hat{v}_0) d\hat{v}_0 d\hat{y}} \quad \dots\dots\dots (15)$$

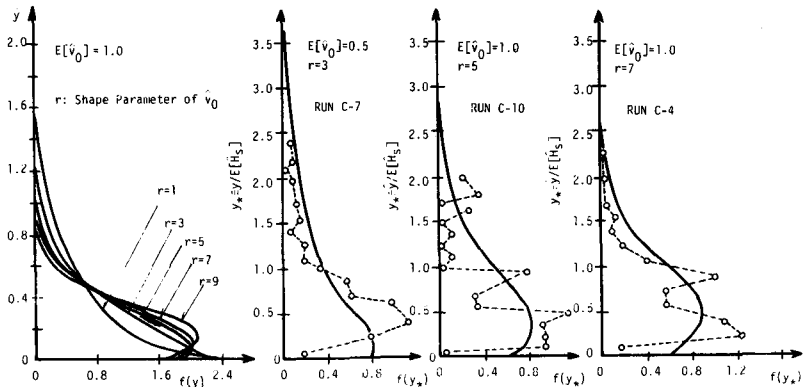


図-11 saltation 粒子の存在確率密度

$\hat{v}_0$ の分布を shape parameter が τ の gamma 分布として式 (15) を計算した例が図-11 に示され、一部先述の実験結果との比較を行っている。

上述のように saltation 運動の運動方程式をもとに 掃流砂の存在確率密度分布が導かれた。ところで 掃流砂の存在確率密度分布については 吉川・山田⁸⁾ が全く運動の力学を考慮しないで、すなわち床面を境界とする不規則過程の特徴から巧みに導いている。その結果を整理して図示した（平均存在高さで規準化）ものが、図-12 で図-11 と良く似ている。但し、吉川らのモデルでは 掃流粒子の平均存在高さ及び分散をパラメータとしており、分布形自体は巧みにしかも簡潔な形で導かれているにもかかわらず、流砂現象の表現の上では完結していない。これは流砂の運動に関する情報を全く縮約したためである。本論文で得られた力学機構に立脚した確率モデルでは次式によって saltation 粒子の平均存在高さ及び分散を $\hat{v}_0$ の平均値とその分布から求めることができる。

$$E[y] = \int_0^\infty y f(y) dy \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$Var[y] = \int_0^\infty y^2 f(y) dy - \{E[y]\}^2 \quad \dots\dots\dots (17)$$

さて、掃流砂の濃度分布 $C_B(y)$ は次のようにして求められる。すなわち、pick-up rate と moving period の分布（平衡状態なら平均 moving period のみ）とから流砂数密度 ν_g （単位面積当りの移動砂粒個数）が求められ、これと存在確率密度から、

$$C_B(y) = \nu_g A_0 d^3 \cdot f(y) \quad \dots\dots\dots (18)$$

である（ $y=0$ は河床から $d/2$ の高さであることに注意）。

5. 床面での反発と successive saltation

前章までの議論より、 $\hat{v}_0$ の分布及び moving period についての情報によって流砂過程が記述されることがわか

った。個々の saltation の生起は流体力による初期移動または床面での反発によっているが、一般には流砂運動は数回から数 10 回の successive saltation を形成して出現しており、個々の saltation の初速度を反発によるものとして求めても充分な近似解が得られるものと考えられる。また、moving period の分布も非平衡流砂過程で重要な役割を果たす step length の分布同様、床面との反発による saltation の継続に強く影響されている。こうした点に鑑み、床面での反発事象を考察した。

河床ではそこでの砂粒の凹凸により必ずしも反発面が水平面と限らず 図-13 のような仮想反発面（傾斜角 α ）を考えることができる。このような仮想面を考えると、たとえば次のように入射速度 v_r に対し反射速度 v_0' が求められよう。いま、入射速度、反射速度の反発面に水平及び垂直な成分をそれぞれ ξ 、 ξ' 及び η 、 η' とするとき、反発、摩擦及び河床の loose な特性を表わす係数 e 、 f 及び ξ_c 、 η_c を導入して次のような関係があると

$$\eta' = e(\eta - \eta_c), \quad \xi' = f(\xi - \xi_c) \quad \dots\dots\dots (19)$$

こうした反発事象の記述式を得ておくと、仮想反発面の傾斜角がわかれば反発後の saltation を追跡できる。

さて、仮想反発面は河床での砂粒の凹凸によって決定される不規則なもので、次のようなシミュレーションを考えた。図-14 に示すような理想的な砂面に入射角 θ_r で砂粒が落下してくる場合を考える。図の河床砂粒 A に衝突する砂粒は、図の TS 間（砂粒の中心位置で表現）に一様分布していると考えられる。いま P を通過した砂粒は Q の位置で河床砂粒 A に衝突する。Q 点の座標 (a_Q, b_Q) は、球 A の中心を中心とする半径 $2d$ の円と P 点を通る傾き θ_r の直線の交点として求められ、このときの傾斜角 α は

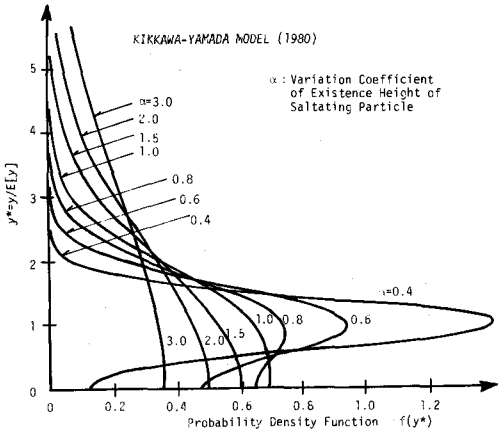


図-12 吉川・山田モデル

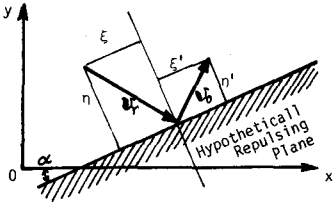


図-13 仮想反発面への衝突

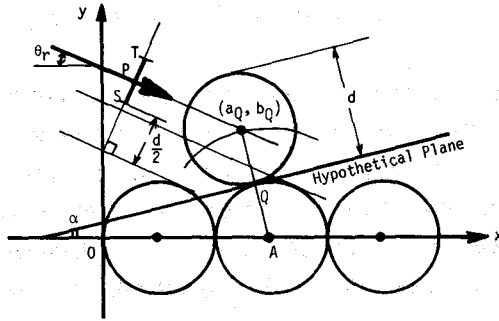


図-14 衝突・反発モデル説明図

$$\alpha = \arctan \left\{ (3d - 2a_Q) / 2b_Q \right\} \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。 θ_r で入射してくる砂粒を図-14のTS間に一様分布させると、 θ_r の条件付で α の分布を求めることができる(図-15参照)。

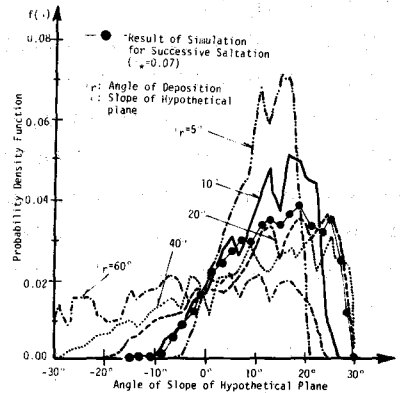


図-15 仮想反発面の傾斜角の分布(入射角の条件付)

上述の反発現象のモデルを saltation の方程式と組み合わせることによって掃流砂の挙動を数値模擬できる。 $\hat{v}_0$ の分布やそれに規定される(第3章での議論参照) saltation 特性量の分布、さらに step length や moving period の分布についての知識を得る目的で successive saltation のシミュレーションを実施した。シミュレーションに当っ

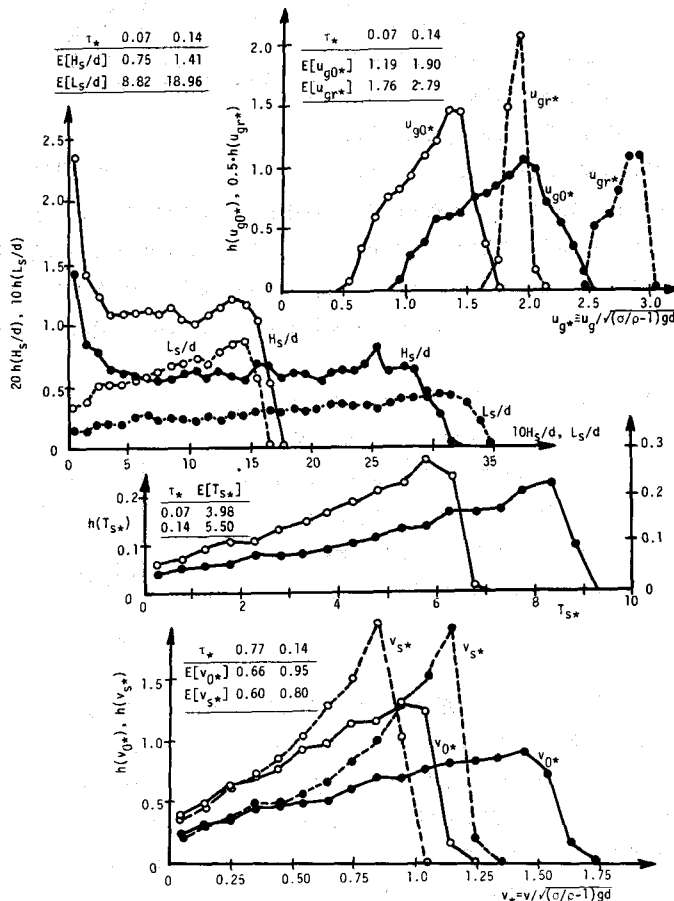


図-16 saltation 特性量についてのシミュレーション結果

ては、これまでに検討した事項に加えて次の仮定を行った。すなわち、saltation 粒子の河床への落下時の流下方向速度については、図-7 及び Sumer の指摘⁷⁾をも考慮し次式で与えられるものとした。

$$u_{gr} = (u_* / \kappa) [p_1 \ln 15.05 + p_2 \ln \{15.05 (1 + H_s / d)\}] \quad \cdots \cdots \cdots (21)$$

但し $p_1 + p_2 = 1$ である (重みつき平均)。また saltation 長 L_s は saltation の平均速度 $\overline{u}_g$ を

$$\overline{u}_g = (u_* / \kappa) \ln \{15.05 (1 + H_s / d)\} \quad \cdots \cdots \cdots (22)$$

で与え、これと saltation period T_s との積として求められるものとした。これらの仮定は先に述べた 16 mm フィルム解析によってほぼ満足し得る ($p_1 = 2/3$, $p_2 = 1/3$) のものと判断された。

シミュレーションの実施例 ($d = 0.15 \text{ cm}$, $\sigma / \rho = 2.65$, $C_D = 0.5$, $C_M = 0.5$, $e = 0.4$, $f = 0.8$, $\xi_c = \eta_c = 0$ とし, $\tau_* = 0.07$ 及び 0.14 に対して計算を行った) を示すと次のようである。まず、図-16 にはシミュレーションによって得られた saltation 特性量の分布の確率密度関数を示した ($v_* = v / \sqrt{(\sigma / \rho - 1) g d}$, $u_{gs} = u_g / \sqrt{(\sigma / \rho - 1) g d}$, $T_{gs} = T_s \sqrt{(\sigma / \rho - 1) g / d}$)。図によると、例えば v_0 の分布は第3章において仮定した gamma 分布と比べると分布のピークが大きい値の方へ偏っているなど若干異なった性状を示しており、また掃流力による変化は相似と考えられる。 v_0 の分布にもとづいて第3章の議論でも諸量の分布が求められるが、ここではシミュレーションの結果が示されており、第3章に示したものと v_0 に起因して異なった性状を呈している。とくに、saltation の高さ及び波長はかなり一様な分布を呈している。

図-17 には反発時の入射・反射角の分布性状を示した。図中に併示した 16 mm 解析結果 (顕著な saltation のみ標本として抽出したので実験結果の方が分布範囲は狭い) と比較しても共通の興味深い結果が得られている (入射角は小さくしかも分布が集中しているのに対し、反射角は大きくて広く分布している)。

図-18 には saltation の継続回数, step length, moving period の分布が示される。いずれも変動係数は 1.0 に近く分布関数の形は指数分布に良好に適合しているようである。現状ではモデル中の係数等の決定についての十分な検討がまだで、例えば平均 step length と掃流力の関係など興味ある問題について明解な判断はできないが、今回のシミュレーションの結果ではほぼ妥当な値が得られている。

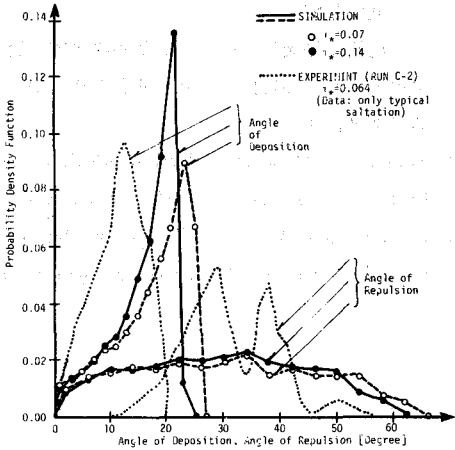


図-17 シミュレーションによる入射角・反射角の分布

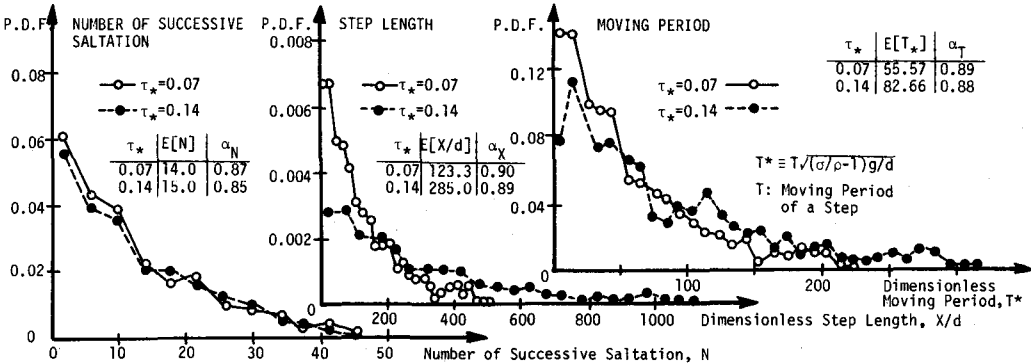


図-18 successive saltation の回数, step length, moving period の分布

6. あ と が き

本論文では saltation の運動方程式を基礎に、流砂現象に含まれる不規則性を考慮した流砂モデル (successive saltation) を検討した。これによって掃流砂の存在確率密度が決定される仕組みや、successive saltation のシミュレーションによっていわゆる step length や moving period の分布についての情報が得られることが明らかになった。また、掃流砂の場合、運動形式によらず床面との接触が重要なことが改めて認識され、saltation についても床面での反発を考慮した successive saltation の考え方の有効性が示された。今後、これらの内部力学機構を詳しく検討するとともに、saltation から浮遊への遷移の生じる状況についても研究を進めてゆきたいと考える。

なお、本論文に用いた実験の実施に当っては、当時京都大学大学院生 加賀田健司君 (現在大成建設 (株) 勤務) の協力を得た。記して謝意を表す。

参 考 文 献

- 1) Nakagawa, Tsujimoto and Hosokawa: Statistical Mechanics of Bed-Load Transportation with 16 mm Film Analysis of Behaviors of Individual Sediment Particles on a Flat Bed. Proc. 3rd International Symposium on Stochastic Hydraulics, Tokyo, 1980.
- 2) 土屋・青山: 水流による砂れきの saltation の機構(2), 京都大学防災研究所年報, 第 13 号 B, 1970.
- 3) 河田: 飛砂・流砂における砂粒の流送機構に関する基礎的研究, 京都大学学位論文, 1976.
- 4) Sumer and Müller ed.: Proc. of Euromech 156, The Mechanics of Sediment Transport. Istanbul, Turkey, 1982.
- 5) 林・尾崎: 掃流砂量に関する基礎的研究, 第 23 回水理講演会論文集, 1979.
- 6) 中川・辻本・加賀田: 流砂の運動形態に関する実験的考察, 昭和 57 年度土木学会関西支部年次学術講演会講演概要, 1982.
- 7) Sumer and Deigaard: Particle Motions near the Bottom in Turbulent Flow in an Open Channel. Part 2. Journal of Fluid Mechanics, Vol. 109, 1981.
- 8) Kikkawa and Yamada: Transport Rate of Bed Load Based on "Existence Probability" of a Sand Particle. Proc. 3rd International Symposium on Stochastic Hydraulics, Tokyo, 1980.