

河道彎曲部における二次流の構造

A Study on the Secondary Flow in Open Channel Bend

北海道大学 正員 森 明 巨

北海道大学 正員 岸 力

北海道大学 学生員 吉 岡 正 人

1. 研究の目的と方法

著者らは、⁽¹⁾⁽²⁾ 彎曲流が自由渦型から強制渦型へ移行する現象を二次流によるモーメント輸送関数 X を仮定して説明した。また、洪水時に實際河川で観測された二次流が弱まる現象を主流、二次流、乱流間の相互干渉を仮定して説明した。本研究の目的は、これらの仮定を数値実験により確かめることである。乱流モデルに $k-\epsilon$ モデルを用いて次の手順で調べた。

- i) 二次流成分 $V=0$ 、 $W=0$ において主流成分 U 、渦動粘性係数 ν_t を求める。求まった U 、 ν_t を固定して V 、 W 及び圧力 P を求める。得られた数値解（これを解 A と呼ぶことにする）を U_A 、 V_A 、 W_A 、 ν_{tA} 、 P_A とおきこれを主流、二次流、乱流間の相互干渉を無視した理論解と考える。
- ii) ν_t を ν_{tA} に固定して流れの場を求め、これを（解 B と呼ぶ） U_B 、 V_B 、 W_B 、 P_B とおく。解 A と解 B を比較して主流、二次流間の相互干渉効果を調べる。
- iii) 総ての変量を変えて求まった解を（解 C と呼ぶ） U_C 、 V_C 、 W_C 、 ν_{tC} 、 P_C とおき、これを解 B と比較して、主流、乱流間の相互干渉効果を調べる。

2. 流れの基礎方程式

流れを解く基礎方程式は(1)～(8)式である。（記号は図-1及び記号表参照）

$$V \frac{\partial U}{\partial r} + W \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{VU}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t r \frac{\partial U}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\nu_t \frac{\partial U}{\partial z}) + \frac{U}{r} (\frac{\partial \nu_t}{\partial r} + \frac{\nu_t}{r}) = 0 \quad (1)$$

$$V \frac{\partial V}{\partial r} + W \frac{\partial V}{\partial z} - \frac{U^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t r \frac{\partial V}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\nu_t \frac{\partial V}{\partial z}) - \frac{\partial}{\partial z} (\nu_t \frac{\partial W}{\partial r}) + \frac{2\nu_t V}{r^2} = 0 \quad (2)$$

$$V \frac{\partial W}{\partial r} + W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t r \frac{\partial W}{\partial r}) - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t \frac{\partial W}{\partial r}) - 2 \frac{\partial}{\partial z} (\nu_t \frac{\partial W}{\partial z}) = 0 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{\rho} (\frac{\partial^2 p}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}) = 2 \left[\frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial z} \right] - \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U^2 + V^2}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{VW}{r} \right) \quad (4)$$

$$V \frac{\partial k}{\partial r} + W \frac{\partial k}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t r \frac{\partial k}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t \frac{\partial k}{\partial z}) + \epsilon - G = 0 \quad (5)$$

$$V \frac{\partial \epsilon}{\partial r} + W \frac{\partial \epsilon}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (\nu_t r \frac{\partial \epsilon}{\partial r}) - \frac{\partial}{\partial z} (\nu_t \frac{\partial \epsilon}{\partial z}) + \frac{\epsilon}{k} (C_2 \epsilon - C_1 G) = 0 \quad (6)$$

$$\frac{G}{\nu_t} = 2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right]^2 \quad (7)$$

$$\nu_t = C\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (8)$$

(1)～(8)式において、 C_1 、 C_2 等は流れの構造により異った値を取る。Leszhziner等⁽³⁾は、彎曲部三次元流の数値計算において、以下に示す値を用いて良好な結果を得ているので本研究でもこれらの値を用いる。

$$C_1 = 1.43, C_2 = 1.92, C\mu = 0.09, \sigma_k = 1.0, \sigma_\epsilon = 1.3$$

3. 格子点の配置と境界条件

格子点の配置を図-2に示す。計算上の流れを図-2中の $S-S'$ 面を対象面とする管路として $S-S'$ を開水路の水面に対応させ $S-S'$ での境界条件を $\partial U/\partial Z=0$ 、 $\partial V/\partial Z=0$ 、 $\partial k/\partial z=0$ 、 $\partial \varepsilon/\partial z=0$ 、 $\partial p/\partial z=0$ 、 $W=0$ とする。

U の境界条件 側壁及び河床で(1)式をそれぞれ(9)、(10)式で近似し、これを差分化して壁面流速 U_b を求める。

$$\text{側壁} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial r} \right) = 0 \quad (9)$$

$$\text{河床} \quad \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) = 0 \quad (10)$$

ただし、壁面でのセン断力は(11)式で見積もる。

$$\nu_t \frac{\partial U}{\partial r} \text{ 又は } \nu_t \frac{\partial U}{\partial z} = C_D U_b^2 \quad (11)$$

壁面を粗面とし、 U_b の計算点と理論河床間の距離を y_b とおき、この間で対数則の成立を仮定して C_D を(12)式で与える。

$$C_D = (8.5 + 2.5 \ln y_b/d)^{-2} \quad (12)$$

V の境界条件 河床では(2)式を(13)式で近似し、これを差分化して河床の $V=V_b$ を求める。

$$V \frac{\partial V}{\partial r} - \frac{U^2}{r} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} - \frac{\partial}{\partial t} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) = 0 \quad (13)$$

ただし、(13)式において $(\nu_t \partial V/\partial z)$ 河床 $=C_D U_b V_b$ とする。

壁面では流れの連続条件より V_b を求める。

W の境界条件 側壁では(3)式を(14)式で近似し、これを差分化して側壁の $W=W_b$ を求める。

$$W \frac{\partial W}{\partial z} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial r} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial r} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} \right) = 0 \quad (14)$$

ただし、(14)式において $(\nu_t \partial W/\partial r)$ 側壁 $=C_D U_b W_b$ とする。

$J=1$ 及び $J=NJ-2$ の点の W は流れの連続条件より求める。

P の境界条件 (4)式を境界上から1ツ内側の U の計算点まで積分する。例えば河床については、

$$- \left| \frac{\partial p}{\partial z} \right|_{J=1}^{J=2} - \int_{J=1}^{J=2} \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} dz = 2 \int_{J=1}^{J=2} \left[\frac{\partial V}{\partial z} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\partial V}{\partial r} \frac{\partial W}{\partial z} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U^2 + V^2}{r} \right) \right] dz - \left| \frac{VW}{r} \right|_{J=1}^{J=2} \quad (15)$$

である。式中の積分値を被積分関数の $J=1$ と $J=2$ での値の平均値に積分区間 Δz をかけたもので近似してこれを差分化し、 $P=P_b$ の計算式とする。

k 、 ε の境界条件 境界上の $\varepsilon=\varepsilon_b$ 、 $k=k_b$ 、 $\nu_t=\nu_{tb}$ を(16)~(17)式で与える。

$$\varepsilon_b = \frac{u_*^3}{\kappa y_b} = \frac{C_D^{\frac{3}{2}}}{\kappa y_b} U_b^3 \quad (16)$$

$$\nu_{tb} = \kappa y_b u_* = \kappa y_b C_D^{\frac{1}{2}} U_b \quad (17)$$

$$k_b = (\varepsilon_b \nu_{tb} / C_\mu)^{\frac{1}{2}} \quad (18)$$

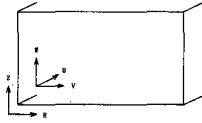


図-1 座標系の定義

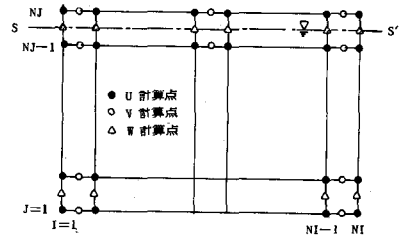


図-2 格子点の配置

4. 計算結果

計算に用いた水理量 水理量は、 $r_0=4.5\text{m}$ 、 $B=1\text{m}$ 、 $h=7.0\text{cm}$ 、 $Q=30.0\text{ l/sec}$ 、 $d=1.8\text{mm}$ であり、 y_b は

河床で $d/8$ 、側壁で $d/4$ である。

上記水理量は池田⁽⁴⁾が弯曲水路で行った実験の条件である。以下の図中には、参考のために池田による実測値を○印で示した。

二次流によるモーメント輸送 図-3に $\bar{U}$ ($-$ は深さ方向の平均値を意味する)、図-4に(19)式で定義される X の計算値を示す。

$$X = \int_0^h (U - \bar{U}) \cdot (V - \bar{V}) dz \quad (19)$$

図-3によれば、二次流を無視した解Aでは U の分布は自由渦型となるのに対して、二次流を考慮した解B、Cでは強制渦型となっている。これは、図-4からわかる様に内岸側で $\partial X / \partial r > 0$ 、外岸側で $\partial X / \partial r < 0$ となるためである。弯曲部流入点で自由渦型分布を持った流れは、二次流によるモーメント輸送の作用で流下とともに外岸側の流速が増大し、これによる抵抗の増分とモーメントの流入率がバランスしたところで平衡状態に達する。図-5は、乱流生成量 ($J = 2$ の計算点での値) を示したものであるが、図から解Aではエネルギー損失が内岸側で大きくなるのに対し、解Cでは外岸側で大きくなっているのがわかる。

主流と二次流の相互干渉 著者らは、前回の報告⁽²⁾で、主流と二次流の相互干渉を考慮して現象の説明を試みた。以下に $\partial h / \partial r = 0$ の場合について考え方の概略を示す。

U 及び V 成分の運動方式を(20)、(21)式で与える。

$$\nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = V \frac{\partial U}{\partial r} - gI \quad (20)$$

$$\nu_t \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = gI_f - \frac{U^2}{r} \quad (21)$$

上式において

$$U = \alpha_v \frac{r}{h} u_m \phi\left(\frac{z}{h}\right), \quad V = \alpha_v u_m f\left(\frac{z}{h}\right) \quad (22)$$

とおき、 $\alpha_v = \text{const} \cdot \alpha_v = \text{const} \cdot$ とすると(20)式は

$$\nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 2\alpha_v \alpha_v \frac{u_m^2}{h} f\phi - gI \quad (23)$$

となる。簡単のため $\nu_t = \bar{\nu}_t = \text{const} \cdot f\phi \approx 2z/h - 1$ において(20)式を z で積分し、水面で $\nu_t \partial u / \partial z = 0$ とおくと(24)式が得られる。

$$\frac{\partial U}{\partial z} = \frac{ghI}{\bar{\nu}_t} \left(1 - \frac{z}{h}\right) \left(1 - \alpha \frac{z}{h}\right) \quad (24)$$

ここに、 $\alpha = \alpha_v \alpha_v \phi_0^2$

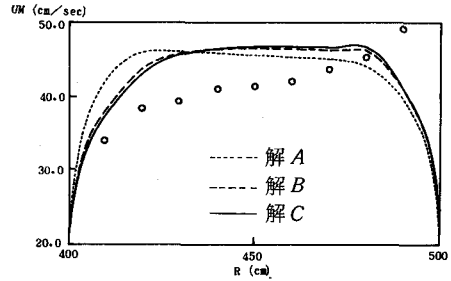


図-3 U_m の分布

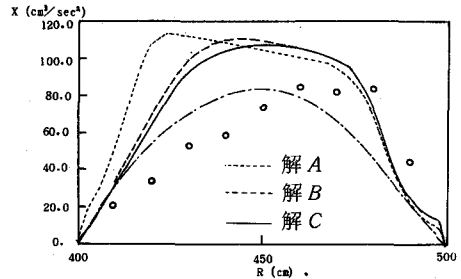


図-4 X の分布

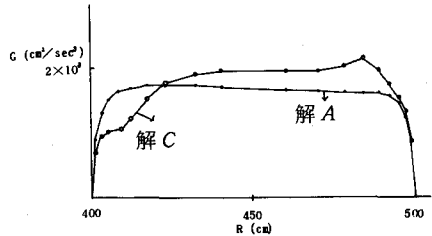


図-5 G の分布

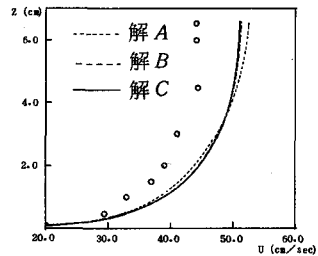


図-6 U の分布

24式における α に関する項が二次流の効果を表わしており、 $\alpha_U > 0, \alpha_V > 0$ であることから $\partial U / \partial z$ を小さくするように作用している。このため、強制渦型の流れでは二次流の作用により U の深さ方向の分布形は平坦化され、その結果二次流は、20式からわかる様に強度が弱められる。

以上が考え方の概略であり、図-6、7は、この効果を確かめたものである。図-6からわかる様に二次流を考慮した解 U_B は、 U_A に比べ平坦化されている。また、図-7からわかる様にわずかであるが解Bでは二次流の強度が解Aに比べて小さくなっている。

5. 考察

二次流によるモーメント輸送 前節で、河床横断勾配が水平であっても強制渦が起り得ることを示した。ここでは、流れの型を決するパラメータについて若干の考察を行う。

20式を河床から水面まで積分すると25式が得られる。

$$\varphi_0^2 \bar{U}^2 = ghI_0 \frac{r_0}{r} - \frac{\partial X}{\partial r} \quad (25)$$

ただし、25式において $I = I_0 r_0 / r$ なる関係を用いている。添点0は水路中央での量を表わす。 X を26式で与える。26式は、 U の分布に二次式を仮定して得たものである。図-4における一点鎖線は26式である。

$$X = X_0 \cos \frac{\pi(r-r_0)}{B} \quad (26)$$

ここに、

$$X_0 = \left[ksn \frac{(hU_m)^2}{r} \right]$$

$$ksn = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{6}{1-\beta/3} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{45} - \frac{2}{315} \beta + \frac{\beta^2}{945} \right),$$

$$\alpha = \frac{\beta(2/3 - 0.6\beta + \beta^2/7)}{1-\beta/3}, \quad \beta = \frac{3}{\kappa\varphi_0 + 1}$$

26式を25式に代入して、25式を r で一回微分し、 $r = r_0$ と置いて整理すると27式が得られる。

$$\frac{r_0}{U_m^2} \left(\frac{\partial \bar{U}^2}{\partial r} \right)_0 = ksn \left(\pi \varphi_0 \frac{h}{B} \right)_0^2 - 1 \quad (27)$$

ここで、

$$P_f = \pi ksn^{\frac{1}{2}} \varphi_0 \frac{h}{B} \quad (28)$$

とおくと、 $P_f > 1$ なら $\partial \bar{U}^2 / \partial r > 0$ であるから流れは強制渦となり、 $P_f < 1$ であれば流れは自由渦となる。前節で取り扱った計算例では $P_f \approx 2.5$ で強制渦の領域に入っている。パラメータ P による流れの型の判定は、流れが充分に発達した場合に適用すべきであるから、直線部から弯曲部に流入する流れでは、 $P_f > 1$ は流れが強制渦となるための必要条件であり、 $P_f < 1$ は流れが自由渦となるための充分条件である。

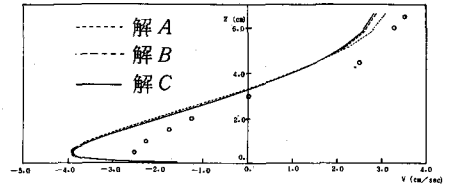


図-7 Vの分布

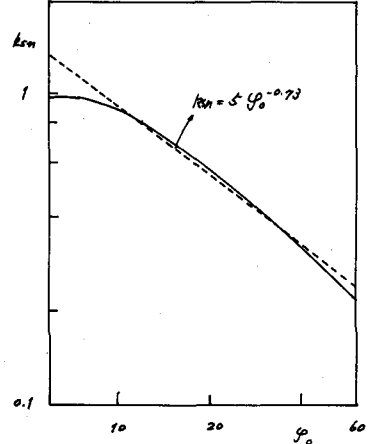


図-8 ksnと φ_0 の関係

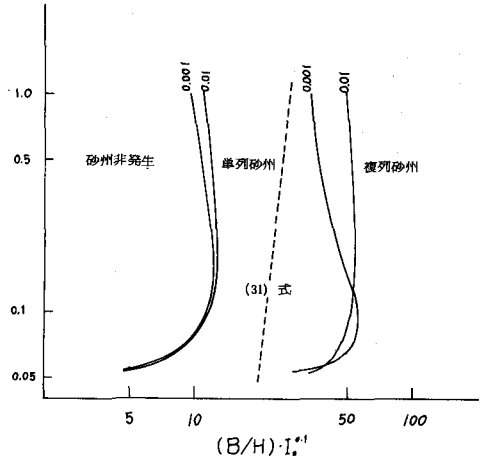


図-9 河床波領域区分図とPfの関係

次に P_f の水利学的意味について考える。図-8は(28)式から求まる h_{sn} と φ_0 の関係を示したものである。これを図中の点線で近似すると P_f は、

$$P_f = \sqrt{5 \pi \varphi_0^{0.63}} \frac{h}{B} \tag{29}$$

となる。 φ_0 を(30)式で近似し、流れが強制渦となる条件を求めると、(31)式が得られる。

$$\varphi_0 = 7.66 \left(\frac{h}{d}\right)^{\frac{1}{6}} \tag{30}$$

$$\frac{B}{h} I^{0.1} \leq 8.06 \pi \left(\frac{h}{d}\right)^{0.105} I^{0.1} \doteq 8.5 \pi \tau_w^{0.1} \tag{31}$$

図-9は、黒木ら⁽⁵⁾による河床波の領域区分図と(31)式の関係調べたものである。図によれば、(31)式の区分線は、単列砂州発生領域の中央にある。このため単列砂州の流れについては、はっきりしたことは言えないが、複列砂州の流れについては、自由渦の流れになっていることが予想される。

6. おわりに

主流、乱流間の相互干渉 河床が横断勾配を持つ場合は流れに上昇流が生ずる。この上昇流により上下層の流れの間に混合が起こり U -分布の一樣化の促進が予想される。主流-乱流間の相互干渉に関する仮定は、上述の現象を渦動粘性係数の増加によって表わそうとしたものである。しかし、今回の計算は矩形水路で行ったため、図-10に示す様に W の値は極めて小さく、主流-乱流間の相互干渉の検証はできなかった。

流れの弯曲による抵抗の増加 表-1に、直線水路及び各解で得られた I_0 (圧力勾配を水面勾配に換算)の値を示した。表から弯曲流では流れが内岸又は、外岸に偏寄するために抵抗が増加しているのがわかる。(図-5参照) 今回の計算例では、弯曲流の抵抗は、直線水路に比べ1.24倍となっている。

河床面における二次流の分布と強度 図-11は V_D の分布を示したものである。解C(実線)では、外岸側から内岸に向かって $|V_D|$ は急激に増加し、更に水路中央部に向かって微増している。水路中央から内岸に向かっては $|V_D|$ は微減し、内岸近くで急減している。図から水路中央より外岸側で洗堀、内岸側で堆積の起こることがわかる。これに対して、自由渦型の流れでは(点線)かなり内岸寄りまで洗堀が起こることが予想される。

最後に、図-12に解Cの二次流のベクトル図を示しておく。深さ方向のスケールは横方向の4倍になっている。

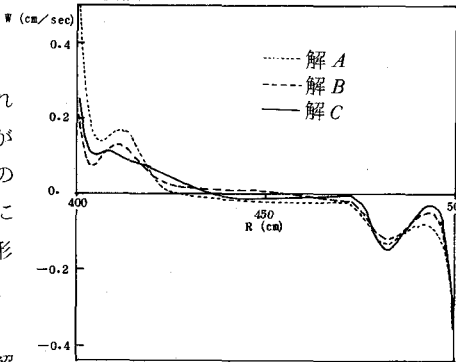


図-10 W の分布

表-1

case	水面勾配 I_0
直線水路	0.00118
A	0.00139
B	0.00147
C	0.00146

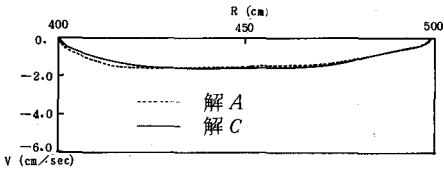


図-11 V_D の分布

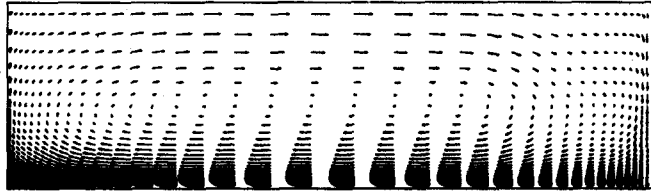


図-12 二次流のベクトル図

参考文献

- (1) 森明巨、岸力：河道弯曲流れの数値計算、土木学会第37回年次学術講演会、1982年
- (2) 森明巨、岸力：河道弯曲部の河床形に関する研究、第21回水理講演会論文集、1982年
- (3) Leschziner M. A. and Rodi W.: Calculation of Strongly Curved Open Channel Flow, Proc. of A. S. C. E. HY10, 1979年
- (4) Kikkawa H, Ikeda S, Ohkawa H. and Kawamura Y: Secondary Flow in a Bend of Turbulent Stream, Proc. of J S C E, № 219, 1973年
- (5) 黒木幹男、岸力：河床変動の研究、河川の機能に関する基礎的研究、北海道開発局、1981年

記号

B : 川巾	Q : 流量	ϵ : 乱流エネルギー逸散率
$C_1, C_2, C_\mu, \sigma_\kappa, \sigma_\epsilon$: 乱流モデル 常数	r : 曲率半径	κ : カルマン常数 (= 0.4)
C_b : 抗力係数	U, V, W : 流速成分	ρ : 水の密度
d : 河床粗度径	U_m : 断面の平均流速	τ_* : 無次元河床せん断力
f, ϕ : ②式	U_* : 摩擦速度	ν_t : 渦動粘性係数
g : 重力の加重度	X : ①式	ϕ_o : 流速係数
G : 乱流生成量	z : 河床からの距離	
h : 水深	α : ④式	
I : 流下方向の水面勾配	α_u, α_v : ②式	
I_x : 横断方向の水面勾配	β : ⑥式	
k : 乱流強度		
P : 圧力		
P_f : ⑧式		