

# 彎曲水路における主流速度の鉛直分布について

On Vertical Distribution of Longitudinal Velocities in the Curved Open Channel

立命館大学 理工学部 正会員 小沢功一

## 1. はじめに

河道彎曲部における流れは三次元的になり、流速は鉛直方向のみならず横断方向にも分布している。河道彎曲部の単純なモデルとして単一の180度彎曲部の前後に直線部が接続している水路の流れを考える。

流れが直線部から彎曲部へ流入した当初の位置における流速の分布は、横断方向には曲率半径に反比例する自由渦型である。また鉛直方向には直線部における場合と同じように対数則が成り立つとされている。

彎曲部の流れには遠心力が作用するが、水表面近くの流速が速い部分と、水底附近の遅い流速部分とではその大きさに差異が出てくる。そのため水表面近くの流れは曲率半径が大きい軌道を通るようになり、底面近くにおいてはそれが小さい軌道を通ることになる。このようにして水流は螺旋状に流下する傾向が出てくる。

彎曲部の当初の断面においては内岸近くでしかも水表面附近の流速が速い。その部分の運動量が螺旋流によって外岸の方へ輸送され、そこの運動量を増加させることになる。そしてつぎに外岸に沿って鉛直下方へ輸送され、今度は底面附近で内岸へ向かう<sup>1)</sup>。したがって水表面近くの流速は減少し、底面附近のそれは増加する傾向が出てくる。

このようにして主流速度の鉛直分布は徐々に鉛直方向に平均化してくるものと考えられる。この主流速度の鉛直分布が流下方向へ変化する事を対数則におけるKarman定数の変化に対応させて考える。すなわち彎曲部においては二次流が徐々に発達するために乱れの特性を示す混合距離も同様に大きくなると考えられる。それをPrandtlの表示を使って表わすとすれば、Karman定数が徐々に大きくなることと対応づけることができる。

従来の研究によると彎曲部におけるKarman定数の変化は $\kappa = 0.4 \sim 0.7$ 程度と計算されている文献もある<sup>2)</sup>。そして平均的な値として $\kappa = 0.5$ を採用している。あるいはまた彎曲部においても直線部の場合と同様に $\kappa = 0.4$ を使っている研究もある<sup>3)</sup>。

したがって本論文においては彎曲部の主流速度の鉛直分布が対数則で表わされるとき、パラメータとして入っているKarman定数の値をどの程度に見積ったら良いのかをRozovskiiの手法<sup>2)</sup>に準じて検討した。また実験的に得られた値と比較して考察した。

## 2. 基礎式

### 2.1 概要

運動方程式における粘性項に関して、分子粘性は乱れ粘性に比較して小さいとして無視する。そして後者は前者を表示する場合と同じように、流体のひずみ、変形と直線関係にあるとする。

質量力としては重力のみを考え座標軸を $x, y$ についてそれぞれ水平で直角をなすとする。 $z$ 軸については鉛直上方にとる。

このようにして得られる直角座標についての運動方程式を図-1に示されるような円筒座標を用いて表わすことにする。その場合流れは定常であるとし、また $r$ 方向の大きさに比べて $z$ 方向のものはかなり小さいと仮定する。この事は実際河川の流れ

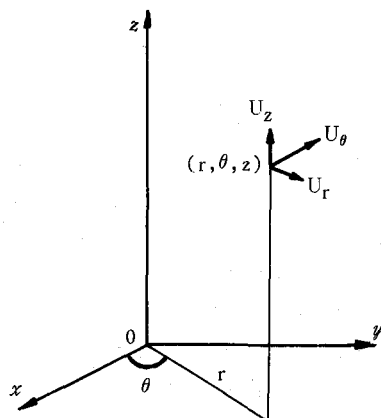


図-1 円筒座標

においても、一例として蛇行の曲率半径が4, 5km  
に対して水深は数mのオーダーであり<sup>4)</sup>、水深は曲率  
半径の1%以下であるとしてすることができる。

運動方程式の各項のオーダーを考えて、微小項は  
無視すると  $r, \theta, z$  方向の運動方程式はつぎのよ  
うになる。

$r$  方向：

$$-\frac{U_\theta^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon \frac{\partial U}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (1)$$

$\theta$  方向：

$$U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + U_\theta \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_r U_\theta}{r} \dots\dots\dots (2)$$

$$= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{r \partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left( \epsilon \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right)$$

$z$  方向：

$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

ここに  $U_r, U_\theta, U_z$  はそれぞれ  $r, \theta, z$  方向の流速、 $p$  は圧力、 $\epsilon$  は渦動粘性係数を示している。各項  
のオーダーについては、境界層の理論における場合と同じように連続方程式の各項は同オーダーであるとし  
て算定する。 $r$  方向の代表流速を  $V$ 、 $r, \theta$  方向の代表長さを  $R, L$  とすると式(1)の各項のオーダーは  $(V^2/R) \cdot$   
 $(L/R)^2$ 、式(2)の左辺各項は  $(V^2/R)(L/R)$ 、右辺各項は  $(V^2/R)(L/R)^3$  であるとしてすることができる。  
また式(1)の左辺における他の加速度項のオーダーは  $(V^2/R)$  であるが、 $(V^2/R)(L/R)^2$  に比較して小さ  
いとして省略した。因みに180度の彎曲角の水路におい  
て  $L, R$  をそれぞれ彎曲部の長さ、曲率半径とすると  
 $(L/R)^2$  は約10となる。

連続方程式については、流れは定常であり、密度は一  
定であるとして円筒座標を用いて表わすつぎのよう  
である。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (U_r r)}{\partial r} + \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \dots\dots\dots (4)$$

## 2.2 運動方程式と連続式

$r, \theta$  方向の運動方程式における圧力については、 $z$   
方向の運動方程式を積分して得られる。それを代入する  
とそれぞれの方向における圧力項は重力加速度の  $r, \theta$   
方向への成分を表わすことになる。

単一の180度彎曲部の水路に砂を敷いて流下実験を行なうと、横断方向にはそれぞれの断面においてかな  
り水深は異なっているが、横断方向の水深を平均したものについては流下方向へほとんど変化していない。  
あるいは水路中央における水深は流下方向へほとんど変化しないと言うこともできる。

したがって横断方向についての平均値で考えれば、あるいは水深に比較して水路幅の広い水路の中央につ  
いて見れば流れは等流であるとしてすることができる。その場合  $\theta$  方向の運動方程式(2)における右辺の圧力項と  
摩擦項とは釣り合うことになる。あるいは左辺の加速度項は0であるということにもなる。すなわち  $\theta$  方向

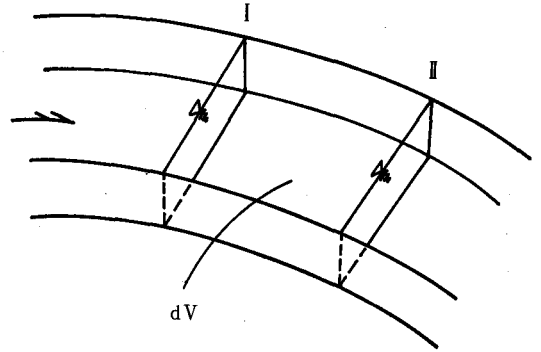


図-2 彎曲水路の要素

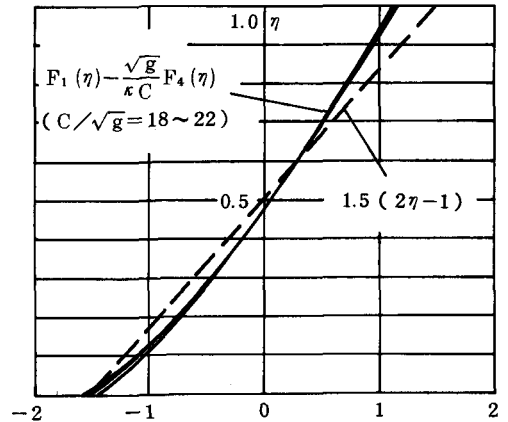


図-3 二次流についての  $\eta$  の関数

の運動方程式は

$$U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + U_\theta \frac{\partial U_\theta}{\partial \theta} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_r U_\theta}{r} = 0 \quad \dots (5)$$

である。

連続条件については連続方程式(4)を図-2におけるような要素  $dV$  に関して積分して求める。<sup>5)</sup>この場合体積  $V$  についての積分は Green-Gauss の定理を用いて面積積分に変えて行なう。要素は  $dV$  を囲む表面に立てた垂線の方法余弦は断面 I, II において、 $\theta$  方向に対してはそれぞれ  $-1, +1$  となる。 $r, z$  方向に対しては 0 である。また壁面において、 $\theta, z$  方向に対してはそれぞれ 0 になる。同じく  $r$  方向に対しては内岸、外岸に対してそれぞれ  $-1, +1$  である。

これらの条件を考慮し、壁面からの流入はなしとして式(4)を積分すると

$$\int_{II} U_\theta dA - \int_I U_\theta dA + \int \frac{U_r}{r} dV = 0$$

となる。

この式の両辺を  $r d\theta$  で割り、これを 0 に近づけるとその極限としてつぎの式が得られる。

すなわち

$$\frac{\partial Q}{\partial \theta} + \int \frac{U_r}{r} dA = 0 \quad \dots (6)$$

ここに  $Q$  は  $\theta$  方向への流量を表わしている。

直線水路の定常流においては  $Q$  は流下方向へ一定となり、式(6)は左辺第一項だけを取る形になるが、彎曲水路においては二次流が発達するためにその影響を表わす左辺第二項も考慮しなくてはならなくなる。

### 2.3 主流速度の鉛直分布の流下方向への変化についての計算

主流速度の鉛直分布については、直線部における場合と同じように彎曲部においても対数則が成り立つとされている。<sup>2),3)</sup>

最大流速、摩擦速度を鉛直方向に平均した速度  $U_m$  と Chezy 係数  $C$  とを用いて対数則を表わすとつぎのようである。<sup>2)</sup>

$$\frac{U_\theta}{U_m} = 1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} (l_n \eta + 1) \quad \dots (7)$$

ここに  $l_n$  は自然対数、 $\eta$  は無次元鉛直座標 ( $\eta = z/h$ ;  $h$  は水深) を示している。

$r$  方向の二次流  $U_r$  については Rozovskii によると運動方程式(1)から得られるとしている。粗面の場合  $U_r$  は  $F_1(\eta) - (\sqrt{g}/\kappa C) F_4(\eta)$  に比例する。この  $\eta$  の関数は図-3 に示されているように近似的に  $\eta$  の一次式で表わすことができる。すなわち  $F_1(\eta) - (\sqrt{g}/\kappa C) F_4(\eta) = 1.5(2\eta - 1)$  とすると  $U_r$  はつぎのようになる。

$$U_r = \frac{1.5 U_m}{\kappa^2} \frac{h}{r} (2\eta - 1) \quad \dots (8)$$

また  $z$  方向の二次流  $U_z$  については、主流  $U_\theta$  としては式(7)、二次流  $U_r$  としては式(8)を使い、これらを連

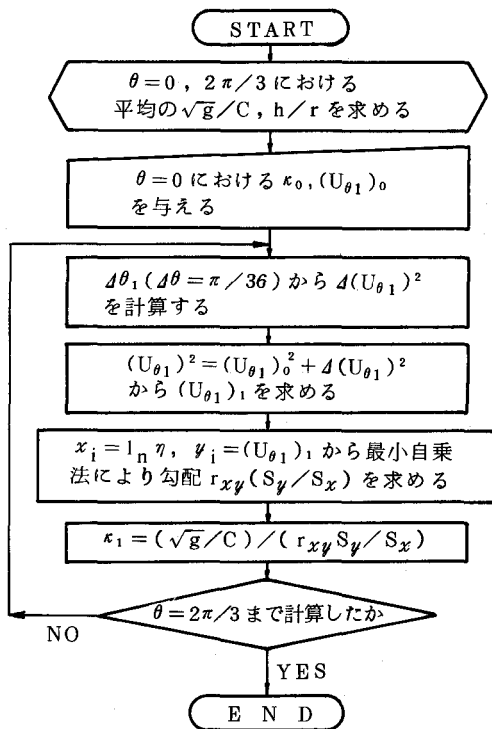


図-4 計算方法

続方程式(4)に代入し積分すると求まる。この場合流れは近似的に流下方向へ一様であると仮定する。また  $U_z$  を積分して求める場合、積分定数は河床面での  $U_z$  は 0 であるという境界条件を用いる。

このようにして  $U_z$  を算出するとつぎのようになる。

$$U_z = \frac{1.5 U_m}{\kappa^2} \frac{h^2}{r^2} (\eta^2 - \eta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$U_\theta$  としては式(7),  $U_r, U_z$  としてはそれぞれ式(8),(9)を用いて、流下方向の運動方程式(5)に代入する。その際主流の横断方向への分布は自由渦型であると仮定する。その結果はつぎのように表わすことができる。

$$\frac{\partial(U_{\theta 1}^2)}{\partial \theta_1} = \frac{3}{\kappa^3} (1 - \eta) \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここに  $U_{\theta 1} = U_\theta / U_m$ ,  $\theta_1 = \theta (h/r) (\sqrt{g}/C)$  である。

この式を用いて主流の鉛直分布の流下方向への変化を求めるにはつぎのようになる。まず計算区間における平均の  $\sqrt{g}/C$ ,  $h/r$  の値を実験値に基づいて決定する。また境界条件としては直線部から彎曲部への入口断面の対数則における Karman 定数は  $\kappa = 0.4$  であるとする。

$d\theta$  だけ流下方向に進んだ断面の  $dU_{\theta 1}$  と  $\eta$  との関係は式(10)から得られる。そして  $U_{\theta 1}$  を  $y$ ,  $1/\eta$  を  $x$  と置き換え、 $y$  は  $x$  の一次式で表わされるとき、その勾配を最小自乗法により求めると  $(S_y/S_x) r_{xy}$  となる。ここに  $S_x, S_y$  はそれぞれ  $x, y$  についての標準偏差,  $r_{xy}$  は相関係数である。この勾配がその断面における対数則式(7)の  $\sqrt{g}/(\kappa C)$  に等しいとする。これから  $d\theta$  だけ流下方向に進んだ断面での新しい Karman 定数が得られる。これがその次の断面の値を計算する時の境界条件である。このような手順によってつぎつぎと計算区間内における Karman 定数の値の変化を求めて行く。この計算手順を流れ図の形で示すと図-4 のようである。

仮定として計算区間内における主流の横断方向への分布は自由渦型であるとした。この分布に関しては実験的に得られた値等について種々の報告がなされているが、一例として今回の水路モデルと同じ単一の 180 度彎曲部についての Goncharov<sup>5)</sup>による実験結果を示すと図-5 のようである。この図によると彎曲部のかなりの範囲で自由渦型の分布をしていると見ることができる。

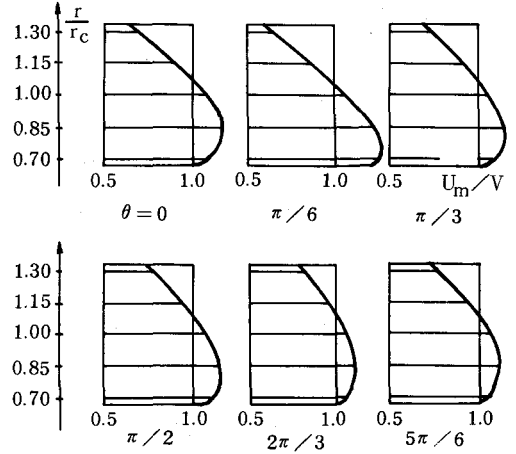


図-5 主流速度の横断分布(1)より)

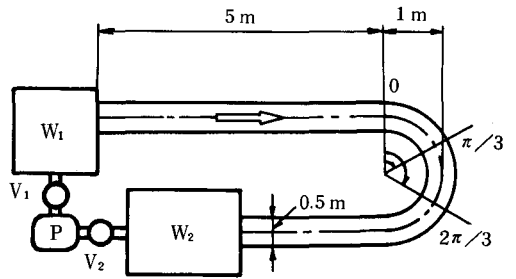


図-6 実験水路

### 3. 実験的検討

#### 3.1 概要

彎曲水路モデルの幾何形状としては必ずしも単一の 180 度彎曲部の前後に直線部が接続している形のものばかりではない。たとえば C.L.Yen<sup>6)</sup>による水路は 90 度の彎曲部が互いに逆方向に、中間の直線部を経て接続されている。いわゆる複合型の蛇行水路である。これは Mississippi 川と Missouri 川において測られた航行図から得られた半径の幅に対する比、彎曲部の長さの半径に対する比、彎曲の中心角等のパラメーターについての累積頻度曲線に基づいて、それらのパラメーターの中央値を採ったものである。

このような蛇行水路の場合には、主流の横断方向への分布としては彎曲角が 90 度の断面で外岸側の流速が内岸側のものより大きくなっており、自由渦型の分布とは言えない。

今回使用した水路は曲線部の単純なモデルとして図-6に示すような単一の180度彎曲部の前後に直線部が接続しているものである。

このような水路においては、主流速度の横断方向への分布は彎曲角で0度から120度程度まで内岸側で比較的流速が大きいいわゆる自由渦型になる実験結果が得られている。

水路幅は50 cmであり、全長に渡って水平である。まず最初にこの水路の中に中央粒径が $D_{50} = 0.72\text{mm}$ の砂を入れ水平に敷き均す。そして砂澱等がなるべく出来ないような適当な流量を定め、河床や水面形状が平衡状態になるまで流す。それが達成された時を見計らって水深を砂面計で測定する。その後側壁の影響が最も少ないと考えられる水路中央の、鉛直方向に6, 7点で河床を乱すことのない位置まで主流速度をプロベラ式の小型流速計で測定する。その位置は彎曲角で $\theta = 0, \pi/3, 2\pi/3$ とした。これらの測定値を鉛直方向の平均流速で割って無次元化した値と、水深で割って無次元化した鉛直座標との関係として示すと図-7の○印のようになる。

### 3.2 主流速度の鉛直分布の流下方向への変化

流量等の実験条件について纏めると表-1のようである。これから明かなように流れは常流で乱流の領域のものである。

また計算に用いた平均の無次元Chezy係数 $C/\sqrt{g}$ や曲率半径 $r$ で無次元化した水深 $h/r$ については、彎曲角で0~120度の計算区間での平均的な値として実験値に基づいて、無次元Chezy係数の逆数の形で $\sqrt{g}/C = 0.04472$ ,  $h/r = 0.141$ となった。

主流速度の流下方向への変化を計算する場合式(10)を用いるが、この左辺を差分の形 $\Delta(U_{\theta 1})^2/\Delta\theta_1$ にして $\Delta\theta_1 = \Delta\theta(h/r)(\sqrt{g}/C)$ とした。この時 $\Delta\theta$ としては5度( $\pi/36$ )の間隔にとった。

これらの条件を基にして図-4に示すような計算手順に従って計算すると彎曲角が0度の位置においてはKarman定数 $\kappa = 0.4$ であったものが、彎曲角が60度( $\pi/3$ )の位置では $\kappa = 0.514$ , 120度( $2\pi/3$ )では $\kappa = 0.601$ となった。

式(10)の右辺において無次元鉛直座標 $\eta$ は $0 \leq \eta \leq 1$ であるから、 $\Delta U_{\theta 1}$ は河床面近くで大きく水面では0となる。したがって主流速度の鉛直分布の流下方向への変化としては、水面での流速は変わらないがそれ以下の河床面までの流速は流下するにしたがい徐々に大きくなる。よって図-7における曲線の勾配、すなわち $d\eta/d(U_{\theta 1})$ は彎曲角が大きい断面になる程大きくなる。

この事は対数則式(7)から $d\eta/d(U_{\theta 1})$ を求めると $(\kappa C/\sqrt{g})\eta$ となり、 $d\eta/d(U_{\theta 1})$ が大きくなるということと $\kappa$ の値が大きくなることとが対応している。

彎曲流においては二次流が発達するためにそれによって運動量が低い方へ運ばれ、その流速を増加させる。このようにして主流の鉛直分布は流下方向へ変化するものと考えられる。

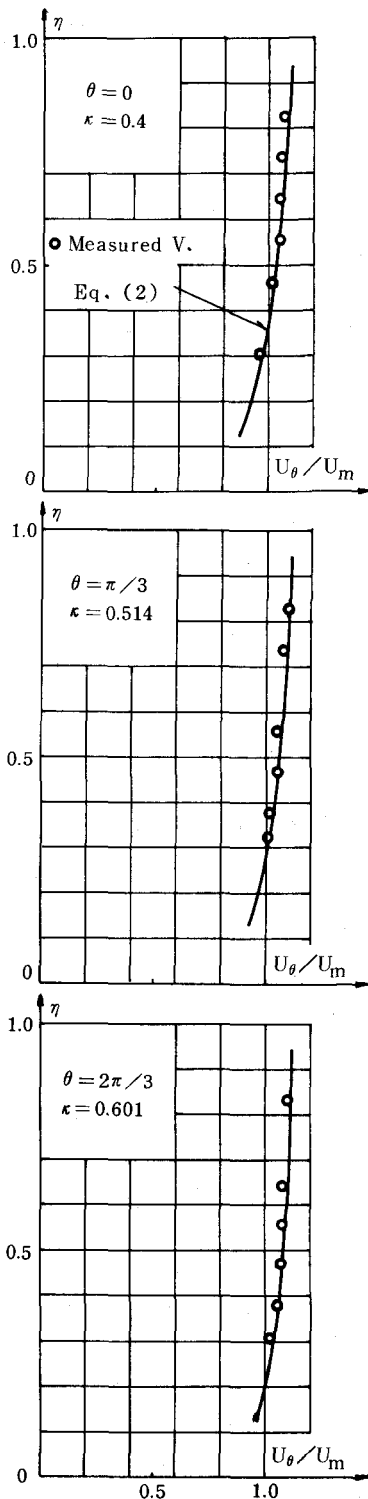


図-7 主流速度の鉛直分布

連続条件については、式(6)は常に正であるが、前述のように二次流についても同時に考慮しなくてはならない。したがって連続式としては式(6)のようになると思われる。

表-1 実験条件

| 流量<br>$Q$<br>( $\ell/S$ ) | 平均水深<br>$\bar{h}_m$<br>(cm) | 平均流速<br>$\bar{U}_m$<br>(cm/S) | フルード数<br>$F_r$ | レーノルズ数<br>$Re$<br>( $\times 10^4$ ) | 流速係数<br>$\varphi$<br>( $\bar{U}_m/U_*$ ) | 摩擦速度<br>$U_*$<br>(cm/S) | 中央粒径<br>$D_{50}$<br>(mm) |
|---------------------------|-----------------------------|-------------------------------|----------------|-------------------------------------|------------------------------------------|-------------------------|--------------------------|
| 20.5                      | 14.1                        | 31.4                          | 0.265          | 4.85                                | 22.3                                     | 1.41                    | 0.72                     |

#### 4. あとがき

曲率半径や水路幅に比較して水深が小さい

彎曲水路の、水路中央においては側壁の影響も無視することができ、主流速度の鉛直分布は対数則で表わすことができるとされている。その場合の Karman 定数  $\kappa$  の値については、直線部と同様  $\kappa = 0.4$  とするのかそれとも Rozovskii の指摘のように  $\kappa = 0.5$  程度の値を採るべきか必ずしも明確になっていない。

180 度の彎曲部の前後に直線部が接続している水路において主流速度の鉛直分布を実験的に調べてみると図-7 に示すように彎曲部を流下するにしたがい、鉛直方向に一様になるように変化してくるようである。この事実は  $\kappa$  の値の増加と対応づけて考えることができる。

半径、鉛直方向の二次流はそれぞれ式(8)、(9)で近似的に表わされけるとする。主流は対数則を Chezy の係数  $C$  を導入した式(7)を用いて、これらを流下方向の運動方程式(5)に代入し整頓すると式(6)が得られる。ここで主流の横断方向への分布は自由渦型であり、流れは等流であると仮定している。

式(6)を用いて図-4 に示すような手順によって計算する。境界条件としては彎曲角が 0 の断面においては  $\kappa = 0.4$  とする。 $d\theta$  を 5 度にとって計算を進めると彎曲角が 60 度の位置では  $\kappa = 0.514$ 、120 度では  $\kappa = 0.601$  となった。

これらの値を使って式(7)の鉛直分布を求めると図-7 の実線のようにになる。それぞれの断面における場合について実験値と比較するといずれにおいても計算値は実験結果とよく一致しているといえることができると思われる。

しかし実験値としては特に河床に近い位置のものが不足している。これはプロペラ式の流速計で測定する場合、河床を乱す恐れがあるためデータを取ることが出来なかったからである。今後工夫をして測定値を補って行く必要がある。また主流の横断方向への分布は自由渦型であると仮定しているが、必ずしもこれがいずれの場合にも成り立つとは限らない。よってどのような分布であるとするのが最も妥当であるのかを検討することも今後の課題である。

最後に、実験を行なうについては立命館大学理工学部の過年度の卒業研究生に負うところが多かった事を記して感謝の意を表します。

#### 参考文献

- 1) Goncharov, V. N., : Flow in a Channel Bend, Israel Program for Scientific Transactions, pp.118-121, 1970.
- 2) Rozovskii, I. L., : Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Sciences of Ukrainian SSR, Kiev, 1957.
- 3) 吉川秀夫・池田駿介・北川明, : 彎曲水路の河床変化について, 土木学会論文報告集, 第 251 号, 1976.
- 4) 小沢功一, : 河川彎曲部における河床形について, 第18回自然災害科学シンポジウム講演要旨集, p.156, 1981.
- 5) 岩佐義朗, : 開水路における定常流, 水理学, 朝倉書店, pp.121-122, 1981.
- 6) Yen, C. L., : Bed Topography Effect on Flow in a Meander, Proc. ASCE, Vol. 96, 1970.
- 7) 小沢功一, : 開水路彎曲流の主流速度の流下方向への変化, 第26回水理講演会論文集, p.657, 1982.