

線形貯水池モデルに基づく流出解析法 Rainfall-Runoff Simulation by Linear Reservoirs Model

早稲田大学理工学部 正員 鮎 川 登

国士館大学工学部 正員 〇北 川 善 廣

1. はじめに

降雨から流出を算定するための流出解析モデルとしては数多くのモデルが提案されている。それらのモデルのうち最も単純なモデルのひとつに線形貯水池モデルがある。線形貯水池モデルに含まれるパラメーターは貯留係数と貯水池の数の2つだけである。本論文では、この2つのパラメーターについて検討し、線形貯水池モデルを用いて山地流域および都市流域の流出解析を行なった結果について述べる。

2. 線形貯水池モデル

線形貯水池モデルでは流域を貯水池とみなし、雨が貯水池に貯留され、その貯留量に比例した流出量が河川へ流出するものとする。Nash¹⁾は流域を直列に置かれたm個の線形貯水池(図1)でおきかえ、そのときの瞬間単位図を次式のように導いた。

$$u(t) = \frac{1}{K \Gamma(m)} \left(\frac{t}{K} \right)^{m-1} \exp \left(-\frac{t}{K} \right) \quad (1)$$

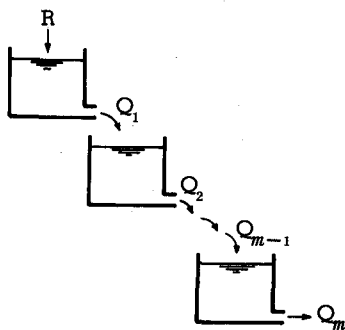
ここで、 $u(t)$ は瞬間単位図、 t は時刻、 K は貯留係数、 m は線形貯水池の数、 $\Gamma(m)$ はガンマ関数である。

式(1)に含まれる2つのパラメーター(貯留係数 K と線形貯水池の数 m)の値は次式により求められる。

$$M_{Q1} - M_{R1} = T_L = mK \quad (2),$$

$$M_{Q2} - M_{R2} = m(m+1)K^2 + 2mKM_{R1} \quad (3)$$

図1. 線形貯水池モデル



ここで、 M_{Q1} および M_{Q2} はそれぞれ時間原点のまわりの流量ハイドログラフの一次モーメントおよび二次モーメント、 M_{R1} および M_{R2} はそれぞれ時間原点のまわりの有効降雨ハイドログラフの一次モーメントおよび二次モーメント、 $T_L = M_{Q1} - M_{R1}$ は流出の遅れ時間である。

なお、瞬間単位図として式(1)の関数を用いて流出解析する方法は我が国では流出関数法と呼ばれ、Nashの研究とは別に、佐藤・吉川・木村²⁾ および石原・高瀬³⁾ により提案されている。

3. 貯留係数

貯留係数 K および貯水池の数 m の値を式(2)および(3)により決定するためには、過去の降雨流出資料を用いて M_{R1} 、 M_{R2} 、 M_{Q1} および M_{Q2} を求めることが必要である。

佐藤・吉川・木村²⁾は降雨のピークと流量のピークの時間差として過去の降雨流出資料から T_L を求め、 T_L は降雨強度や流量に關係することを示した。そして、過去の資料から求めた T_L と流量の關係を用いて流量に応じた K の値を算定する方法を提示した。

石原・高瀬³⁾は、佐藤らと同様に、降雨のピークと流量のピークの時間差として過去の資料から T_L を求め、 T_L と最大降雨強度および最大流量との關係を示し、それらの關係から降雨強度に応じた K と m の値を求める方法を提示した。

これらの方法によると、 K および m の値を求めるために、過去の降雨流出資料を用いて M_{R1} 、 M_{R2} 、 M_{Q1} 、 M_{Q2} を求めたり、 T_L と降雨強度や流量との関係を求めることが必要となるので、これらの方法では降雨流出資料が十分整備されていない河川や流域の土地利用状態が変化するような河川の流出計算をすることができない。そこで、本論文ではkinematic wave法により T_L を求める方法について検討する。そのために、従来の方法では流域斜面と河道を一体として流出計算が行なわれているが、本論文では流出現象を流域斜面からの河道への流出と河道における合流、伝播とに分けて考えることにし、流域斜面からの河道への流出の計算に線形貯水池モデルを適用することを考える。このようにすると、 T_L は流量には関係せず、降雨強度と流域斜面の特性との関数として表示されるようになるものと考えられる。

流域斜面からの流出現象における降雨と流出の関係を模式的に示すと、図2のようになる。図2で T_L は降雨ハイトグラフの重心と流出ハイドログラフの重心の時間差（遅れ時間）、 t_c は集中時間、 t_r は降雨継続時間、 R_e は有効雨量、 Q は河道への流出量である。図2によると、

$$T_L = t_c / 2 \quad (4)$$

の関係が想定される。この関係を用いると、式(2)は次のようになる。

$$K = t_c / 2m \quad (5)$$

集中時間 t_c はkinematic wave理論によると次式で算定される。⁴⁾

$$t_r \geq t_c : t_c = (L / \alpha R_e^{2/3})^{3/5}$$

$$t_r < t_c : t_c = t_r + \frac{3}{5\alpha} (L - \alpha R_e^{2/3} t_r^{5/3}) / (R_e t_r)^{2/3} \quad (6)$$

ここで、 t_r は降雨継続時間、 L は流域斜面長、 $\alpha = \sqrt{\sin \theta} / N$ 、 θ は流域斜面の傾斜角、 N は流域斜面の等価粗度、 R_e は有効雨量である。

式(5)および(6)によると、貯留係数 K は有効雨量、有効雨量の継続時間と流域斜面の長さ、勾配、等価粗度および貯水池の数の関数として表示されることがわかる。

4. 貯水池の数

式(5)を式(1)に代入すると、次式が得られる。

$$u(t) = \frac{2m}{t_c \Gamma(m)} \left(2m \frac{t}{t_c} \right)^{m-1} \exp \left(-2m \frac{t}{t_c} \right) \quad (7)$$

有効雨量 $R_e(t)$ による面積 A の流域斜面からの流出量 $Q(t)$ は次式により計算される。

$$Q(t) = A \int_0^t u(t-\tau) \cdot R_e(\tau) d\tau \quad (8)$$

貯水池の数 m が流出量ハイドログラフの形状におよぼす影響を検討するために、式(7)で $m = 1 \sim 4$ として式(8)に代入し、継続時間 t_r の一定強度の有効雨量 R_e による流出量（単位図）を求めると、次式が得られる。

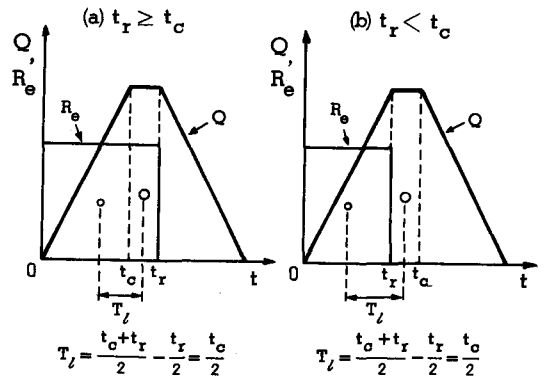


図2. 遅れ時間 T_L と集中時間 t_c の関係

$m = 1$ の場合

$$\left. \begin{aligned} t \leq t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left[\exp \left(2 \frac{t}{t_c} \right) - 1 \right] \exp \left(-2 \frac{t}{t_c} \right) \\ t > t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left[\exp \left(2 \frac{t_r}{t_c} \right) - 1 \right] \exp \left(-2 \frac{t}{t_c} \right) \end{aligned} \right\} (9)$$

$m = 2$ の場合

$$\left. \begin{aligned} t \leq t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left[\exp \left(4 \frac{t}{t_c} \right) - 4 \frac{t}{t_c} - 1 \right] \exp \left(-4 \frac{t}{t_c} \right) \\ t > t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left[\exp \left(4 \frac{t_r}{t_c} \right) \left(4 \frac{t-t_r}{t_c} + 1 \right) - \left(4 \frac{t}{t_c} + 1 \right) \right] \exp \left(-4 \frac{t}{t_c} \right) \end{aligned} \right\} (10)$$

$m = 3$ の場合

$$\left. \begin{aligned} t \leq t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left[\exp \left(6 \frac{t}{t_c} \right) - 18 \left(\frac{t}{t_c} \right)^2 - 6 \frac{t}{t_c} - 1 \right] \exp \left(-6 \frac{t}{t_c} \right) \\ t > t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left\{ \exp \left(6 \frac{t_r}{t_c} \right) \left[18 \left(\frac{t-t_r}{t_c} \right)^2 + 6 \frac{t-t_r}{t_c} + 1 \right] - \left[18 \left(\frac{t}{t_c} \right)^2 + 6 \frac{t}{t_c} + 1 \right] \right\} \exp \left(-6 \frac{t}{t_c} \right) \end{aligned} \right\} (11)$$

$m = 4$ の場合

$$\left. \begin{aligned} t \leq t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left[\exp \left(8 \frac{t}{t_c} \right) - \frac{256}{3} \left(\frac{t}{t_c} \right)^3 - 32 \left(\frac{t}{t_c} \right)^2 - 8 \frac{t}{t_c} - 1 \right] \exp \left(-8 \frac{t}{t_c} \right) \\ t > t_r : Q(t) &= A \cdot R_e \left\{ \exp \left(8 \frac{t_r}{t_c} \right) \left[\frac{256}{3} \left(\frac{t-t_r}{t_c} \right)^3 + 32 \left(\frac{t-t_r}{t_c} \right)^2 + 8 \frac{t-t_r}{t_c} + 1 \right] - \left[\frac{256}{3} \left(\frac{t}{t_c} \right)^3 + 32 \left(\frac{t}{t_c} \right)^2 + 8 \frac{t}{t_c} + 1 \right] \right\} \exp \left(-8 \frac{t}{t_c} \right) \end{aligned} \right\} (12)$$

式(9)～(12)により貯水池の数 m をパラメーターとして単位図を描くと、図3のようになる。図3によると、 m が大きくなるにつれてピーク流量の値が大きくなり、またピーク流量の発生時刻が遅くなる傾向が認められること、 $m = 1$ と $m = 2 \sim 4$ とでは単位図の形状が異なること、および m の値による単位図の違いはあまり大きくないことがわかる。

なお、参考のために式(5)とは異なり、貯水池の数 m とは無関係に K を一定として式(1)を式(8)に代入

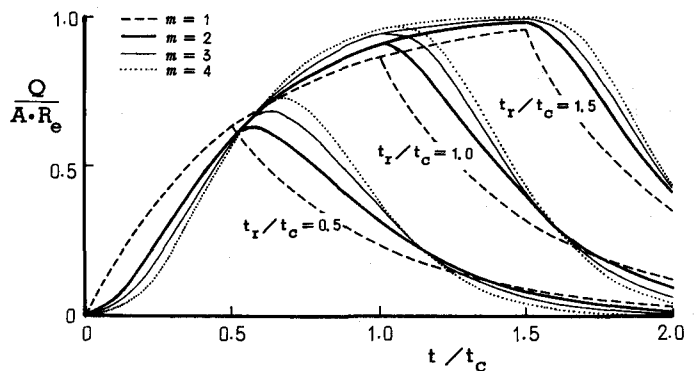


図3. 貯水池の数と単位図の関係 ($K = t_c / 2m$ の場合)

し、継続時間 t_r の一定強度の有効雨量 R_e による流出量ハイドログラフ（単位図）を計算し、貯水池の数 m をパラメーターとして描くと、図4のようになる。図4によると、この場合には m の値が大きくなるにつれて、ピーク流量の値が小さくなり、またピーク流量の発生時刻が遅くなり、単位図の形状が著しく平坦化していくことがわかる。

5. 有効雨量

式(9)~(12)を用いて流出量を計算するためには、有効雨量 R_e を算定することが必要である。

過去の降雨流出資料を用いて一洪水毎に総雨量と総直接流出高（総有効雨量）の関係をプロットすると、一般に図5に示すような関係が得られる。図5の関係をを用いると、降雨ハイドログラフの各单位時間雨量 R に対する有効雨量 R_e は次式で算定される。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma R \leq R_c : R_e &= f_1 R \\ \Sigma R > R_c : R_e &= f_2 R \end{aligned} \right\} (13)$$

ここで、 ΣR は累加雨量、 f_1 は一次流出率、 f_2 は二次流出率、 R_c は流出率が f_1 から f_2 に変化するときの雨量である。

6. 流出計算の方法

流出計算は次のような手順で行なう。流域を尾根線や河道によって斜面勾配が単一の傾斜角で代表せられるような小流域に分割し、式(9)~(12)を用いて各小流域からの河道の流出量を計算する。任意の降雨ハイドログラフによる流出量ハイドログラフは、各单位時間ごとの有効雨量について式(6)により集中時間 t_c を求め、式(9)~(12)により流出量ハイドログラフを計算し、単位図法のハイドログラフの合成法と同様に、それらのハイドログラフを降雨時刻に応じて時刻をずらしながら重ね合わせることにによって求める。

つぎに、最上流の小流域からの流出量ハイドログラフを一つ下流の小流域からの河道への流出点までの区間を洪水の伝播速度に応じて伝播させ、その流出点への流出量ハイドログラフと重ね合わせ、その流出点における流量ハイドログラフを求める。以下、順次この計算を繰り返し、各小流域からの流出量を合流させていき、所定の地点における流量ハイドログラフを算定する。なお、洪水の伝播速度は Manning の式を用い、kinematic wave 理論により求める。

上記の方法で流出計算を行なうためには、分割された各小流域の面積、斜面の長さ勾配、および各区間の河道の横断面形状と縦断勾配をデータとして与えることが必要であり、その他に貯水池の数 m 、流域斜面の等価粗度 N 、有効雨量の算定のためのパラメーター f_1 、 f_2 、 R_c および河道の粗度係数 n の値を決定することが必要である。本論文では、 f_1 、 f_2 および R_c の値は過去の降雨流出資料を用いて決定し、 n は河道の状

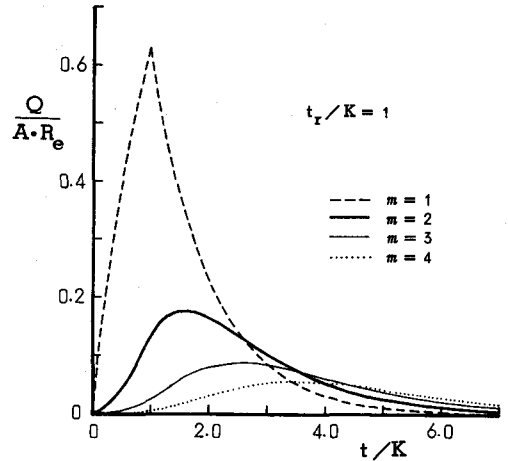


図4. 貯水池の数と単位図の関係 ($K = \text{const.}$ の場合)

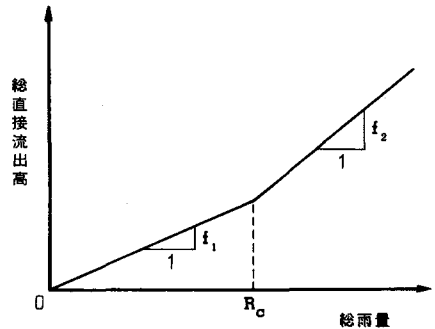


図5. 総雨量と総直接流出高の関係

況から推定し、 $m = 1 \sim 4$ の場合について N だけを未知のパラメーターとして流出計算を行ない、観測による流量ハイドログラフと計算による流量ハイドログラフが一致するように N の値を決定した。

7. 流出計算例

上述した流出計算法を流域の特性が著しく異なる2つの河川流域、多摩川（山地流域）と谷端川（都市流域）に適用した結果を以下に示す。

(1) 多摩川の流出計算

小河内ダムより上流の多摩川の流域（流域面積 263 Km^2 ）を対象として、流域を図6に示すように16の小流域に分割して流出計算を行なった。

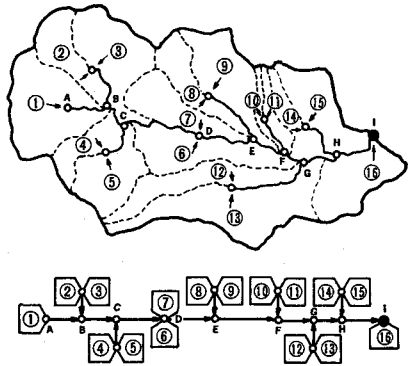


図6. 多摩川の流域分割図

過去の降雨流出資料により総雨量と総直接流出高の関係をプロットすると図7のようになり、有効雨量を算定するためのパラメーターの値は $f_1 = 0.25$ 、 $f_2 = 0.50$ 、 $R_c = 180 \text{ mm}$ となる。

貯水池の数 m が $1 \sim 4$ の場合について、 $N = 0.7$ 、 $f_1 = 0.25$ 、 $f_2 = 0.50$ 、 $R_c = 180 \text{ mm}$ 、 $n = 0.08$ とした場合の流量ハイドログラフの計算値と観測値の比較例を図8に示す。図8によると、貯水池の数が $1 \sim 4$ の場合には、貯水池の数が計算結果におよぼす影響は小さいこと、および計算値はほぼ妥当な結果を与えることがわかる。なお、

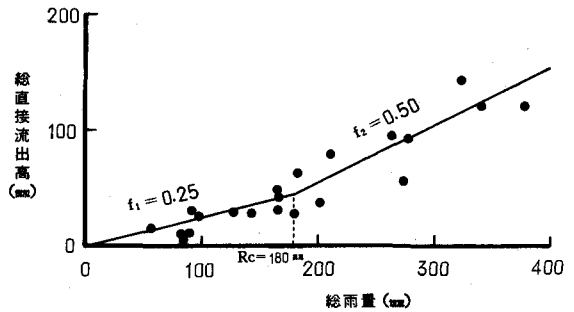


図7. 総雨量と総直接流出高の関係（多摩川）

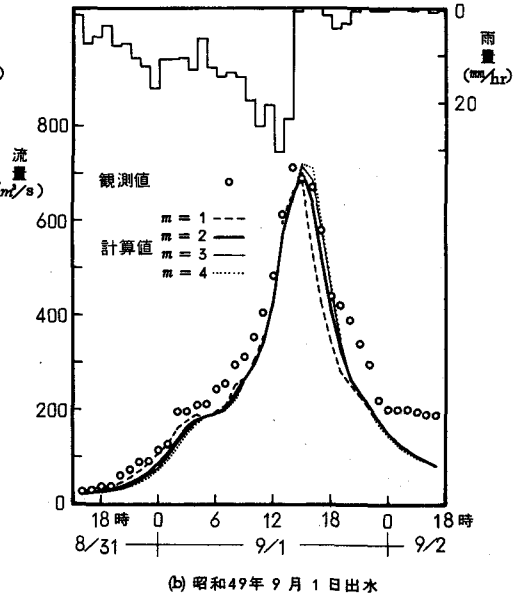
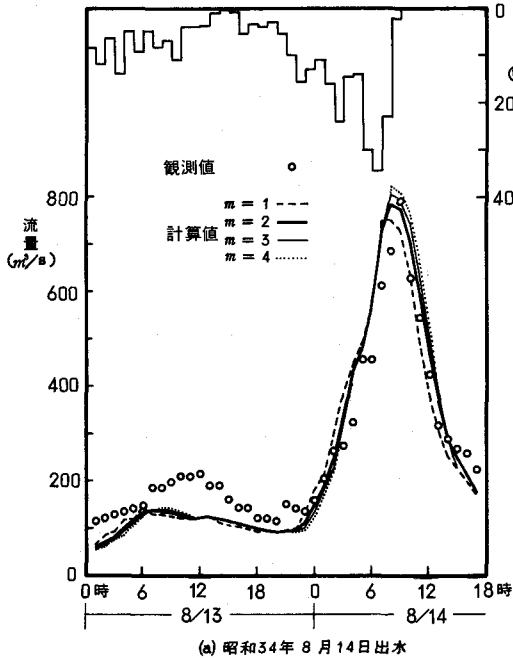


図8. 多摩川の流出計算例

洪水の初期における計算値は観測値より小さくなっているが、 $f_1=0.3$ とすると計算値と観測値はほぼ一致する。洪水ごとに f_1 、 f_2 、 R_c （主として f_2 ）の値を調整すれば、計算値を観測値により一致させることができる。

(2) 谷端川の流出計算

東京都板橋区の住宅地を流域とする谷端川（流域面積 5.42 km^2 ）について、流域を図9に示すように2つの小流域に分割して流出計算を行なった。谷端川流域の市街化率は100%、不透透面積率は53.1%で、下水道が整備されている。

過去の降雨流出資料⁵⁾により総雨量と総直接流出高の関係をプロットすると図10のようになり、有効雨量を算定するためのパラメーターの値は $f_1=0.55$ 、 $R_c=\infty$ となる。

貯水池の数 m が1～4の場合について、 $N=0.007$ 、 $f_1=0.55$ 、 $R_c=\infty$ 、 $n=0.03$ とした場合の流量ハイドログラフの計算値と観測値の比較例を図11に示す。図11によると、貯水池の数 m が1～4の場合には、貯水池の数が計算結果におよぼす影響は小さいこと、および m が2～4の場合には計算値はほぼ妥当な結果を与えることがわかる。洪水ごとに f_1 の値を調整すれば、計算値を観測値により一致させることができる。

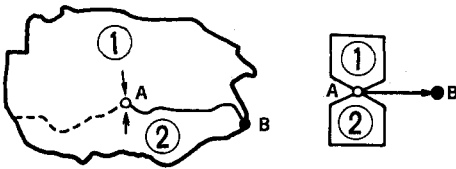


図9. 谷端川の流域分割図

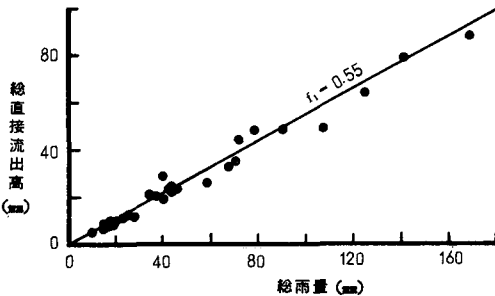
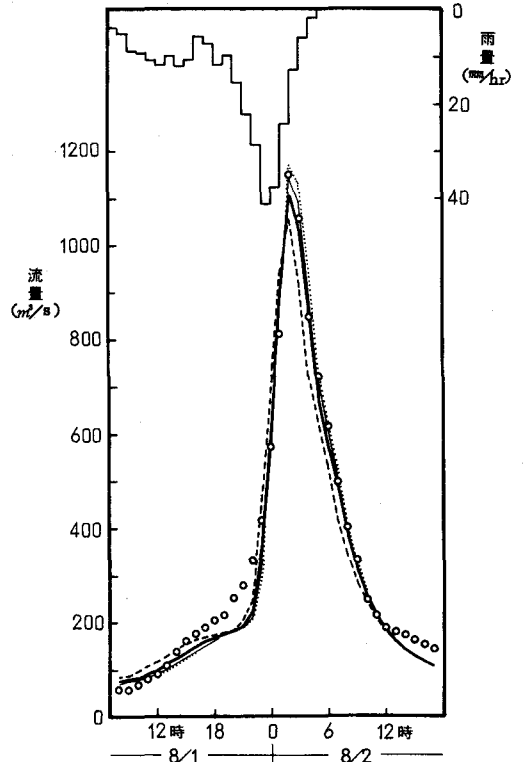
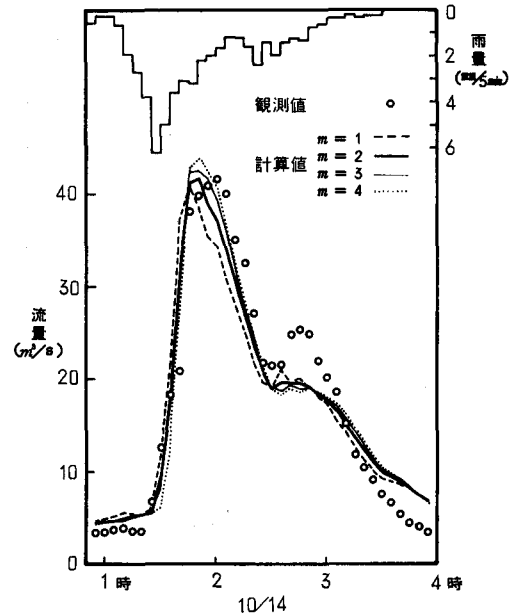


図10. 総雨量と総直接流出高の関係（谷端川）



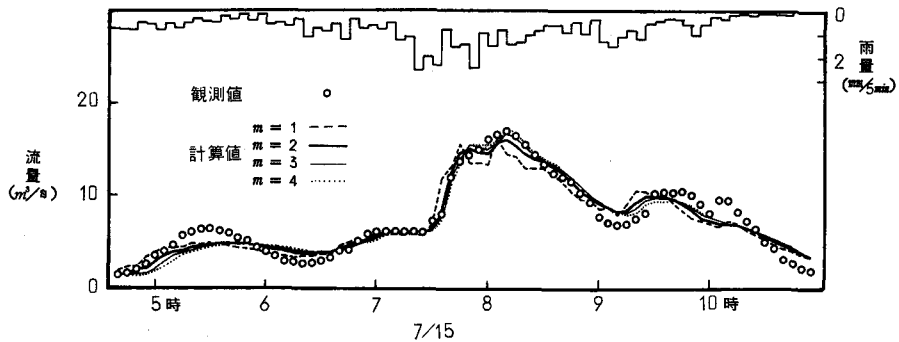
(c) 昭和57年8月2日出水

図8. 多摩川の流出計算例



(a) 昭和48年10月14日出水

図11. 谷端川の流出計算例



(b) 昭和47年 7月15日出水

図11. 谷端川の流出計算例

8. まとめ

本論文では数多く提案されている流出解析モデルのうち最も単純なモデルのひとつである線形貯水池モデルについて検討した。このモデルに含まれるパラメーターである貯留係数について kinematic wave理論により算定する方法を提示し、線形貯水池モデルを流域特性の著しく異なる2河川、多摩川(山地流域)および谷端川(都市流域)に適用し、貯水池の数が1~4個の場合について流出計算を行ない、線形貯水池モデルの適用性および貯水池の数が計算結果におよぼす影響について検討した。その結果、貯留係数の値を算定するために導入された流域斜面の等価粗度 N の値を多摩川(山地流域)の場合 $N=0.7$ 、谷端川(都市流域)の場合 $N=0.007$ とすることによりほぼ妥当な計算結果が得られること、および貯水池の数 m が1~4の場合には貯水池の数が計算結果におよぼす影響は小さく、 $m=2$ としてよいことが示された($m=1$ の場合は単位図の形状が $m=2\sim4$ の場合と異なり、また谷端川の流出計算の結果の適合性がよくない)。また、流域斜面の等価粗度 N の値を土地利用状態に応じて決定することができれば、本論文で提案した線形貯水池モデルに基づく流出計算法により流域の土地利用状態の変化が洪水流出におよぼす影響を評価しうる可能性が示された。本論文で提案した線形貯水池モデルに基づく流出計算法により種々の河川流域の流出計算を行ない、その適用性を検討するとともに、各種の土地利用状態に対する等価粗度の値を決定することが今後の課題である。

謝辞：本研究の遂行にあたり貴重な資料を提供して下さい建設省土木研究所および東京都水道局の関係各位に謝意を表します。また、本研究は文部省科学研究費補助金(自然災害特別研究(1):研究代表者早稲田大学理工学部吉川秀夫教授)の補助を受けたことを付記し、謝意を表します。

参 考 文 献

- 1) Nash, J.E.: The Form of the Instantaneous Unit Hydrograph, IASH, Pub. 45, Vol. 3, pp. 114-121, 1957.
- 2) 佐藤清一・吉川秀夫・木村俊晃: 降雨から流出量を推定する方法、土木研究所報告87号、pp.1-16, 1954.
- 3) 石原藤次郎・高瀬信忠: 流出関数による由良川洪水の解析、土木学会論文集、第57号、pp.1-6, 1958.
- 4) Eagleson, P.S.: Dynamic Hydrology, McGraw-Hill, pp. 337-344, 1970.
- 5) 建設省土木研究所: 都内谷端川・桃園川排水区水文観測資料(昭和47年~49年)、1975.