

開水路彎曲流の主流速度の流下方向への変化
The Longitudinal Velocities in the Curved Open Channels

立命館大学 理工学部 正会員 小沢功一

1. まえがき

平面的に見た河道は一般に曲がりくねった形状をとり、それが進行して行く傾向がある。¹⁾すなわち凹岸部はますます洗掘され、凸岸部には土砂が堆積することになる。したがって特に凹岸部では河道の弱点部となりやすいから、河岸を補強したりあるいは河床を保護する工作物を設置する必要が出てきたりする。

このような場合、その地点における水流の特性が的確に把握できて補強の範囲や程度があらかじめ正確に予測できることが望ましい。

従来から彎曲部における河床土砂の動きに大きな影響を及ぼす因子としては二次流が揚げられている。この二次流によって凹岸側の土砂が凸岸側の方へ運ばれるとする考え方がなされる。その二次流は、水の粘性によって主流速度が鉛直方向に分布して表面近くの速い流速に作用する遠心力と、底面近くの遅い流速に作用するものとの差に起因するものとされている。

主流速度の鉛直方向についての分布は直線部における場合と同じように対数則が成り立つともされている。^{2),3)}また横断方向についての分布は彎曲部へ入った当初の位置においては自由渦型、その後一様分布を経て彎曲部を充分流下した位置においては強制渦型であるとされている。^{4),5)}自由渦型については粘性を無視した半径方向の運動方程式とベルヌーイの式とを連立して得られる。また強制渦型については渦度保存則における鉛直方向の渦度成分が一定であるとして導かれる。あるいは円筒容器を回転させてその中の水と容器とが一体となって回転するようになったときの流速は強制渦型になっている。

これらの自由渦型、強制渦型の分布法則はそれぞれ別々に導かれたものであり自由渦型から強制渦型への移行過程がはっきりしていない。また実際河川への適用を考える場合には、流れは乱流であり、乱れによる粘性等は河床土砂の流送に影響を及ぼす、水深は河幅や曲率半径に比較して小さいというような状況に近い条件を踏まえることが望ましい。

したがって本研究においては粘性も考慮した運動方程式と連続式とを連立して得られた基礎式²⁾を数値積分して、彎曲部へ流入した当初の位置における流速分布がどのように流下方向へ変化して行くのかを検討した。それと移動床の彎曲水路において実験的に得られた速度分布とを比較して考察を行なった。

2. 主流速度に関する基礎式

2.1 運動方程式のオーダー

開水路彎曲部における定常流の運動方程式を考える場合図-1のような円筒座標を用いる。水深が曲率半径や水路幅に比較して小さいとすることができるときには r, θ, z 方向の運動方程式はそれぞれつぎようになる。

$r :$
$$-\frac{U_\theta^2}{r} = -gI_r + \frac{\partial}{\partial z}(\epsilon \frac{\partial U_r}{\partial z}) \dots\dots\dots (1)$$

$\theta :$
$$U_r \frac{\partial U_\theta}{\partial r} + U_\theta \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + U_z \frac{\partial U_\theta}{\partial z} + \frac{U_r U_\theta}{r} = gI_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(\epsilon \frac{\partial U_\theta}{\partial z}) \dots\dots (2)$$

$z :$
$$0 = -g - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

ここに U_r, U_θ, U_z はそれぞれ r, θ, z 方向の流速、 ϵ は渦動

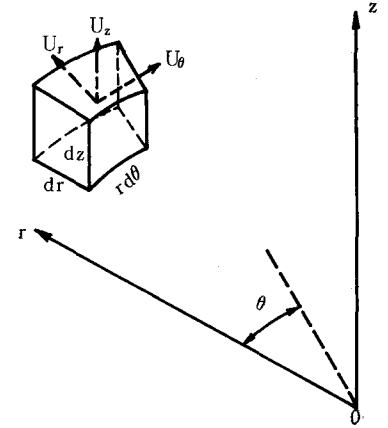


図-1 円筒座標系における速度成分

粘性係数, I_r, I_θ はそれぞれ r, θ 方向の水面勾配を表わしている。

また連続式は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial(U_r r)}{\partial r} + \frac{\partial U_\theta}{r \partial \theta} + \frac{\partial U_z}{\partial z} = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

である。

r 方向の代表流速, 代表長さをそれぞれ V, r_m, θ 方向のそれらをそれぞれ U, ℓ_m, z 方向のものをそれぞれ W, h_m とし, 連続式(4)における各項のオーダーは等しいと仮定すると r 方向の運動方程式(1)の加速度項のオーダーは $(V^2/r_m)(\ell_m^2/r_m^2)$ となる。因みに無視した $U_r(\partial U_r/\partial r)$ 等の加速度項のオーダーは V^2/r_m である。また θ 方向の運動方程式(2)の加速度項のオーダーはすべて $(V^2/r_m)(\ell_m/r_m)$ である。 z 方向の運動方程式(3)において無視した加速度項 $U_r(\partial U_z/\partial r)$ 等のオーダーは $(V^2/r_m)(h_m/r_m)$ である。また同様に無視した粘性項 $\partial(\epsilon \partial U_z/\partial z)/\partial z$ のオーダーは $(V^2/r_m)(\ell_m^2/r_m^2)(h_m/r_m)$ である。

彎曲部として前後が直線部に接続している単一の 180 度の曲がりを想定し, r_m, ℓ_m, h_m としてそれぞれ平均曲率半径, 水路中央における彎曲部の長さ, 水深を考えると $h_m \ll r_m < \ell_m$ の関係にあり, 運動方程式のオーダーについては $(V^2/r_m)(h_m/r_m) \ll (V^2/r_m) < (V^2/r_m)(\ell_m/r_m) < (V^2/r_m)(\ell_m^2/r_m^2)$ の大きさの順になる。

2.2 主流, 二次流速の鉛直分布

流速の鉛直分布を考える場合, 水深は水路幅に比較して小さいと仮定し, 側壁の影響が及ばない水路の中央部における分布について考察する。

まず主流速度の鉛直分布については直線部における場合と同じように対数分布則が成立するものとする。すなわち鉛直方向の平均流速 U_m で無次元化した形で示すと次のようである。

$$\frac{U_\theta}{U_m} = 1 + \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} (1_m \eta + 1) \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここに κ は Karman 定数, C は Chezy 式における係数, η は無次元鉛直座標, $\eta = (z - z_b)/h$, z_b は河床の z 座標, h は水深を表わしている。

180 度彎曲部における彎曲角が $\theta = 0, \pi/6, \pi/2, 2\pi/3$ の位置で水路中央についての実験値を式(5)と比較すると図-2 のようである。この場合 Karman 定数の値については通常使われている 0.4 より大きい 0.6 を使っている。

横断方向の二次流の速度 U_r の鉛直分布については式(1)を積分することによって得られる。このとき I_r は主流の速度 U_θ が対数則に従うとすると

$$I_r = \left(1 + \frac{g}{\kappa^2 C^2}\right) \frac{U_m^2}{g r} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と表わされる。また ϵ はせん断力が鉛直方向に 1 次分布するとして

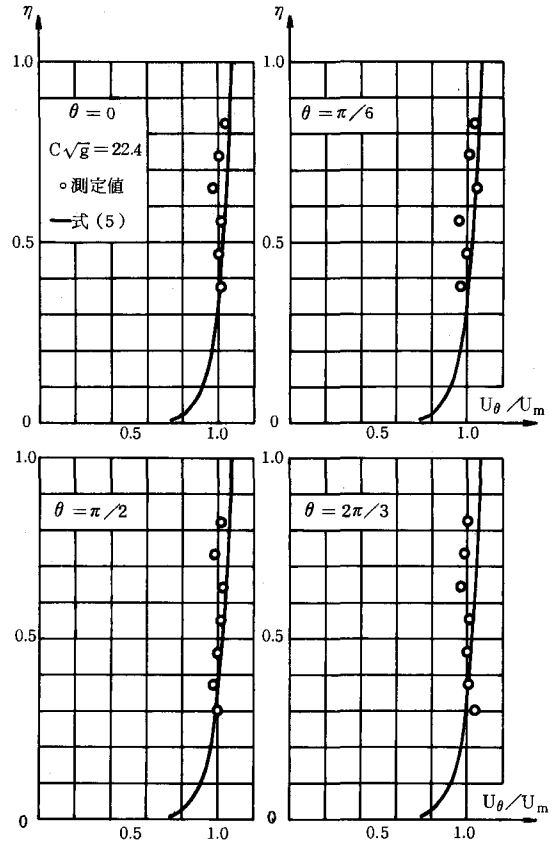


図-2 主流速度の鉛直分布

$$\varepsilon = \kappa u_* h (1 - \eta) \dots\dots\dots (7)$$

となる。ここに u_* は摩擦速度である。 ε は主流、横断方向に等方性であるとしている。

結局 U_r はつぎのように表わされる。

$$U_r = \frac{U_m}{\kappa^2} \frac{h}{r} \left\{ F_1(\eta) - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} F_2(\eta) \right\} \dots\dots\dots (8)$$

ここに $F_1(\eta)$ 、 $F_2(\eta)$ はそれぞれ

$$F_1(\eta) = \int \frac{2 l_n \eta}{\eta - 1} d\eta, \quad F_2(\eta) = \int \frac{l_n^2 \eta}{1 - \eta} d\eta \dots\dots\dots (9)$$

である。²⁾

2.3 主流速度の変化式

主流速度の横断方向への分布が流下するに従いどのように変化するかについては式(2)を用いる。^{2), 6)} この左辺を式(4)を考慮して変形すると式(2)はつぎようになる。

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial (r^2 U_\theta U_r)}{\partial r} + \frac{\partial (U_\theta^2)}{r \partial \theta} + \frac{\partial (U_\theta U_z)}{\partial z} = g I_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \left(\varepsilon \frac{\partial U_\theta}{\partial z} \right) \dots\dots\dots (2)'$$

これを境界条件として水面、河床において $U_\theta = 0$ 、水面におけるせん断応力 $\tau_\theta = \rho \varepsilon (\partial U_\theta / \partial z) = 0$ のもとに河床から水面まで積分して r を掛けると

$$\frac{1}{r} \frac{\partial (r^2 \int_{z_b}^{z_h} U_r U_\theta dz)}{\partial r} + \frac{\partial (\int_{z_b}^{z_h} U_\theta^2 dz)}{\partial \theta} = g I_\theta r h - \frac{r \tau_0}{\rho} \dots\dots\dots (10)$$

となる。ここに z_b 、 z_h はそれぞれ河床、水面の z 座標、 τ_0 は河床におけるせん断応力である。

左辺における定積分を計算する場合 U_θ 、 U_r についてはそれぞれ式(5)、式(8)を用いる。第1項目のものは、

$$\int_{z_b}^{z_h} U_r U_\theta dz = \frac{\sqrt{g} U_m^2 h^2}{\kappa^3 C} r \left[\int_0^1 l_n \eta F_1(\eta) d\eta - \frac{\sqrt{g}}{\kappa C} \int_0^1 l_n \eta F_2(\eta) d\eta \right] \dots\dots\dots (11)$$

となる。この右辺の $l_n \eta F_1(\eta)$ 、 $l_n \eta F_2(\eta)$

は図-3 のようであるが数値積分を行なうと結局

$$\int_{z_b}^{z_h} U_r U_\theta dz \approx 0.75 \frac{\sqrt{g} U_m^2 h^2}{\kappa^3 C} r \dots\dots\dots (12)$$

と表わされる。第2項目の積分については

$$\int_{z_b}^{z_h} U_\theta^2 dz = \left(1 + \frac{g}{\kappa^2 C^2} \right) U_m^2 h \dots\dots\dots (13)$$

となるが $1 \gg g / \kappa^2 C^2$ であるから括弧中の第2項は無視する。

これらの積分結果を式(10)に代入し、水深 h は流下方向に変化しないとするとつぎようになる。

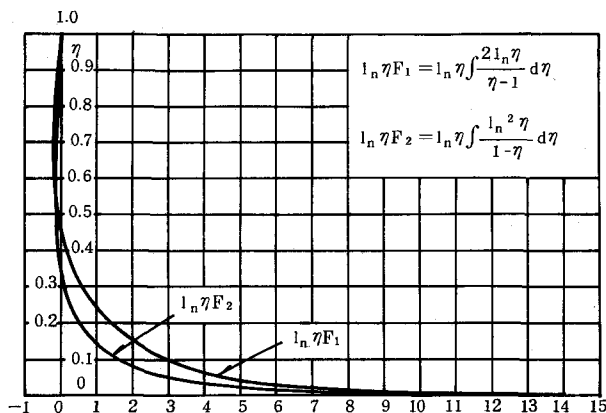


図-3 $l_n \eta F_1$ 、 $l_n \eta F_2$ の鉛直分布

$$\frac{0.75}{r} \left(\frac{\sqrt{g}}{\kappa^3 C} \right) \frac{\partial (r h^2 U_m^2)}{\partial r} + \frac{1}{h} \frac{\partial (r h^2 U_m^2)}{r \partial \theta} = g I_c r_c h - \frac{g r h^2 U_m^2}{C^2 h^2} \dots\dots\dots (14)$$

ここに $I_\theta r = I_c r_c$ としている。 I_c は主流方向の水面勾配の水路中央における値、 r_c は水路中央における曲率半径である。

水深 h が θ 方向に変化するかどうかについては 180 度の単一彎曲部の移動床水路の $\theta = \pi/6 \sim 2\pi/3$ における任意の数点の r の位置での実験結果から見ると一定であるとしてもよいようである。

式(4)において $s = r h^2 U_m^2$ とおいて差分の形にすると

$$\frac{1}{h r} \frac{ds}{d\theta} = g I_c r_c h - \frac{0.75 \sqrt{g}}{r} \frac{ds}{C^2 dr} - \frac{gs}{C^2 h^2} \dots\dots\dots (15)$$

となる。この式の計算手順については図-4 のようである。

3. 彎曲水路における実験と考察

3.1 概要

実験水路を用いて流れの状況等を検討する場合、実際の河川における蛇行部をモデル化するわけであるが多少の歪み等は避けられない。一般に河川の流れは洪水時においても河幅に比較して水深は大きくない。また彎曲部の凹岸側の河床は洗掘されて低くなっており凸岸側の河床は反対に土砂が堆積して高くなっている。さらに屈曲の程度については蛇行が充分発達した状態で彎曲角が 180°にも達するものと考えられる。模型と原型とで幾何学的相似が保たれることを目指すためには模型における水深も水路幅等に比較して出来るだけ小さいことが望ましい。また横断方向に河床高が水流の状況に対応して変化できるためには移動床水路であった方がよい。

このような点を考慮して実験水路は河床に約 8 cm 程の砂を敷いて移動床とした。また彎曲角は単一の 180 度とし、その前後にそれぞれ 5 m、2.5 m の直線部が接続している。水路幅は 50 cm、深さは 35 cm である。水路中央における曲率半径は $r_c = 1$ m で外岸、内岸の曲率半径はそれぞれ 1.25 m、0.75 m である。

最初に河床砂を水平に敷き均して水を流下させ、河床の状態がほぼ平衡に達した時点で砂面計により各点の水面、河床の高さを測定した。測定位置については流下方向に彎曲角が $\theta = \pi/6$ から $\theta = 2\pi/3$ まで 30 度間隔である。これらの位置は彎曲部へ流入した直後から彎曲部を充分流下した位置までの範囲と考えられる。それらの位置で横断方向には 10 cm 間隔の 5 点で測定した。また鉛直方向にはそれぞれの位置で 6、7 点の流速を測った。鉛直方向の流速分布については水路中央におけるものが図-2 に示してあるがほぼ対数則に一致すると見られる。この場合 Karman 定数については、彎曲部の流れは二次流が発達するために乱れの構造が変化するものと考えられ、通常使われる値 (0.4) よりも大きな値 (0.6) の方が実験値によく合うようである。横断方向の速度分布については鉛直方向の測定値を平均した値 U_m を対象として検討した。

流速等の実験条件を纏めると表-1 のようである。

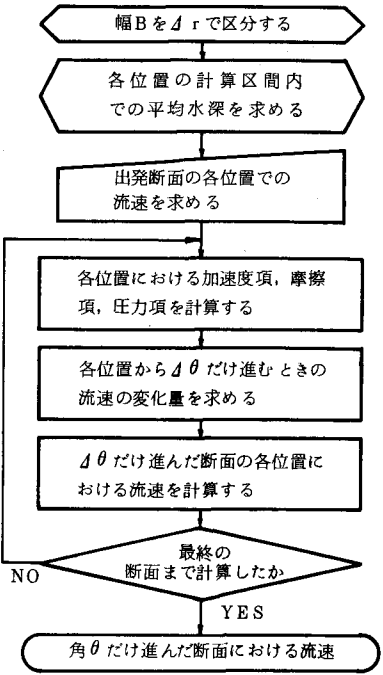


図-4 計算手順

表-1 実験条件

流量 Q (t/s)	平均水深 $\bar{h}_m$ (cm)	平均流速 $\bar{U}_m$ (cm/s)	フルード数 F_r	レイノルズ数 R_e ($\times 10^4$)	流速係数 φ ($\bar{U}_m/u_*$)	摩擦速度 u_* (cm/s)	中央粒径 D_{50} (mm)
20.5	13.1	34.1	0.310	4.91	22.3	1.52	0.72

3.2 主流速度の流下方向への変化

鉛直方向に平均した流速 U_m の横断方向への分布が流下方向へどのように変化するのかが示したのが次頁図-5 である。彎曲部へ流入した直後の位置である $\theta = \pi/6$ においては 内岸側の流速が速くて外岸側のも

のが遅い自由渦型の分布をしている。それが流下するに従い、内岸側の流速は徐々に遅くなり逆に外岸側のは少しずつ速くなるような変化があらわれてくる。

図-5には実線で示した計算値も載せてあるが、これは式(5)に基づいて計算したもので、 $\Delta r = 10 \text{ cm}$ 、 $\Delta \theta = 5^\circ$ 、 $\kappa = 0.6$ 、 $C = 70$ 、 $I_c r_c = 1.5 \times 10^{-4}$ としている。また計算を始める最初の条件は $\theta = \pi/6$ において実験的に得られた流速分布を用いている。水深 h は曲率半径 r の関数としているが、これは $\theta = \pi/6$ から $2\pi/3$ までの横断面形状を r のそれぞれの位置について平均したものを使っている。それは図-6のようである。彎曲角のこの範囲における河床形状としてはそれぞれの位置のものと平均値とはあまり変わらないようであった。

図-5には参考までに彎曲角が $\theta = 5\pi/6$ のものも示されているが、この辺まで流下しても流速の横断方向への分布としてはわずかに外岸側で速くなる程度で r に比例する強制渦型にまでは変化しないようである。

式(5)を用いて流速の横断方向への分布の流下方向への変化を計算する際、最初の条件として $\theta = \pi/6$ の位置における実験で得られた流速分布を使ったが、この分布は自由渦型に近いが多少づれている。図-7(a)に実験値と自由渦型分布とが同時に示してあるが、実験で得られた値は自由渦型の分布より緩和された型になっている。すなわち内岸側では自由渦分布より遅い流速を示し、外岸側では逆に自由渦分布より速い流速となっている。これは実際には粘性によるせん断力が無視できなくて流速に影響を及ぼしているものと考えられる。

因みに境界条件としての流速分布が自由渦型であるとした場合、式(5)によって計算される流下方向への横断分布の変化はどのようになるのかを示したのが図-7の(b)~(d)の点線である。比較のために境界条件として実験値を用いた場合の計算値も実線で同じ図に表わされている。 $\theta = \pi/3 \sim 2\pi/3$ の位置における実験値と対比してみたときやはり境界条件として実験値を用いた計算値の方が実験結果とよく一致するようである。

4. あとがき

開水路彎曲部における流れは三次元的になるとされている。したがって河床の土砂等は横断方向にも移動することになる。主流方向に掃流される土砂については上流の方から次々と土砂が掃流されてきて補給されるから河床変動としてはそれ程大きくはならない。しかし横断方向に土砂が輸送される場合は必ずしも補給が充分にはなされないから河床変動は大きくなる。河床形としては横断方向に斜面をなすような形となり、掃流力と土砂粒子に作用する重力の成分とが釣り合いを保つようになる程度まで河床は変化してくるものと考えられる。

外岸側で低く内岸側で高い斜面のような形状の程度が最も著しいのは彎曲部から直線部への出口に相当する位置であるともされている。²⁾このような位置においては直線部の流れに順次移行しようとするために、横断方向の水面勾配は無くなってくる。そのため外岸側の流速は速くなるように変化し、その位置の河床変

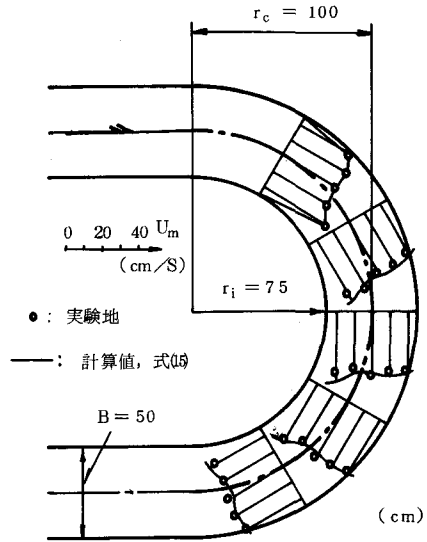


図-5 主流速度の流下方向への変化

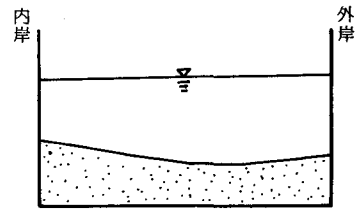


図-6 平均横断面

動は大きくなるものと考えられる。

彎曲部における河床変動に影響を及ぼす因子の一つは二次流であるがこれは式(8)からも明らかなように主流と密接に関連している。直線部に接続している単一の180度彎曲部における主流速度等について検討する場合、彎曲部を流下するにつれて変化してくることに注意しなくてはならない。従来から領域に区分して検討されてきているが、一つの区分の方法としては(1)上流直線部の影響が大、(2)曲線部の領域、(3)下流直線部の影響が大の三つに大別することもできる。このうちの(3)の領域は前述のように彎曲部における最大洗掘深等に大いに関係があると思われるが今回の研究は(2)の領域である直線部の影響が及ばない範囲に限定して検討を行なった。

この曲線部における主流速度の横断方向への分布としては概ね自由渦に近い分布から遷移して強制渦に近い分布に変化してくるとされている。

この遷移過程については式(9)を用いて計算することができる。式(9)は θ 方向の運動方程式を鉛直軸に沿って積分して差分の形で表わしたものである。この場合主流、二次流の鉛直方向についての分布はそれぞれ式(5)、式(8)を用いている。

単一の180度彎曲部における主流の横断方向への分布が流下方向へどのように変化するかを計算した結果が図-5に示してある。境界条件としては $\theta = \pi/6$ の位置における実験値を使っている。この図には実験値も描かれているが大略計算値と一致していると見ることができる。

厳密には主流、二次流の鉛直分布も流れ方向に変化することが考えられるし、また水深も横断方向に変化するだけでなく流下方向にも変化する。これらの点を詳細に考慮して計算方法にも精度を高めて行く事が望まれる。

参考文献

- 1) Zimmermann, C. and Kennedy, J. F.,: Transverse Bed Slopes in Curved Alluvial Streams, Proc., ASCE, Vol. 104, 1978.
- 2) Rozovskii, I. L.,: Flow of Water in Bends of Open Channels, Academy of Ukrainian SSR, Kiev, 1957.
- 3) Engelund, F.,: Flow and Bed Topography in Channel Bends, Proc. ASCE, Vol. 100, 1974.
- 4) 村本嘉雄, 井上喬之, : 開水路彎曲流の内部機構, 京都大学防災研究所年報, 第8号, 1965.
- 5) Einstein, H. A. and Harder, J. A.,: Velocity Distribution and the Boundary Layer at the Channel Bends, Trans. AGU, Vol. 35, 1954.
- 6) 小沢功一, : 彎曲水路における主流速度の流下方向への変化について, 年次学術講演会概要集, 1981, 10.
- 7) 岸力他, : 開水路彎曲部の二次流に関する研究, 年次学術講演会講演概要集, 1965.

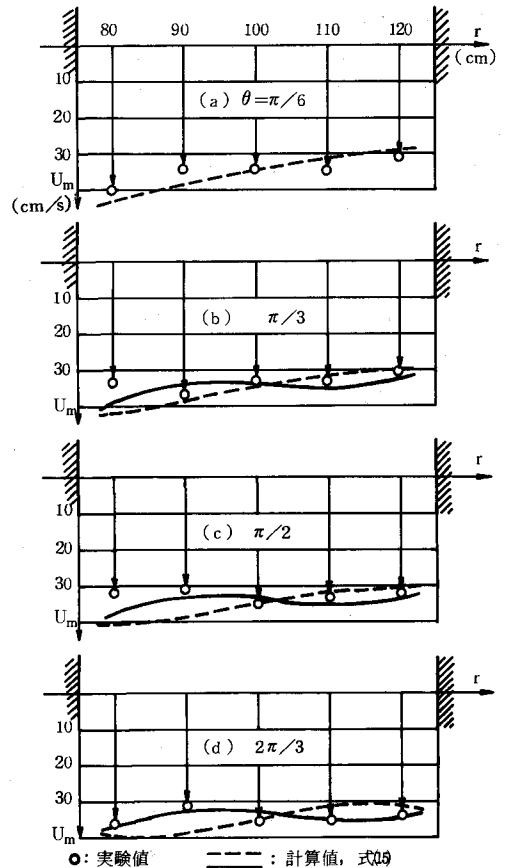


図-7 自由渦型の分布とした計算値等