

回転流に伴う2次流について

Theoretical Analysis on the Secondary Flow by a Rotating Flow
in the Tank

東洋大学工学部 正員 荻原 国 宏
東洋大学工学部学生員 上 出 勝 幸

はじめに

底のある円形水槽に、液体を満たして回転を加えた場合に円形水槽の壁面付近では下降する流れがあり円筒形水槽の中心付近では上昇する流れがある。そのために回転流が存在する場合には2次流として縦うずが発生することは良く知られている。(図-1)

従来この種の2次流については余り研究がなされていないので筆者らは実験をするとともに若干の理論解析を行なってみた。

解析にあたっては実験によって確かめられた事項をもとにして次のような縦うずの発生メカニズムを考え、解析モデルを作製した。

- (1) 主流である回転流によって生ずる水面形の微小の変化が底層部の比較的流速の遅い部分では半径方向の圧力変化を生じさせ、これが2次流を生じさせる原因となっている。
- (2) この圧力は図-2のような等圧面をなしている。
- (3) 回転流の中心部では、底層部の2次流によって回転流の中心部に流れ込んだ流体が衝突して上昇流を発生させる。
- (4) 水面では上昇して来た水が外周へ向って流れ、壁面部で下降する流れとなる。

2 基礎方程式ならびに境界条件

(1) 基礎方程式

円筒形水槽内の流体は、非圧縮性粘性流体と考え、円柱座標系を用いて図-4のようなモデルを考える。その際に解析を容易にするために円筒形水槽の壁面および底面の主流への影響は小さいものと仮定し、回転流と回転流とともなって生ずる2次流の各量を図-4のように定義する。流れはナビエ-ストークスの方程式、連続の式および等圧面の式を組合せて解くことにする。このとき流れは定常であり、円筒形の中心軸について軸対称であり、また十分に遅い流れであると仮定する。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial p}{\partial r} \tag{1}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ur) + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \tag{2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\omega^2 r}{g} \tag{3}$$

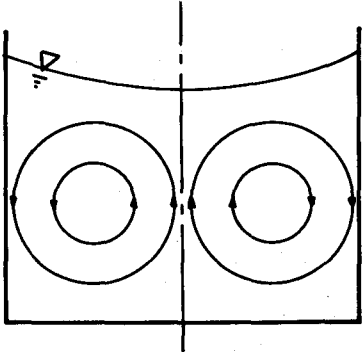


図-1 流況図

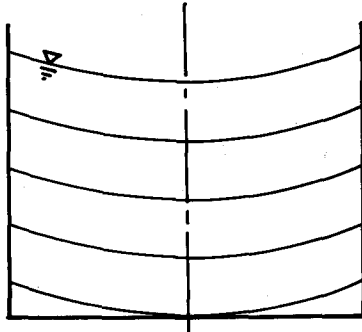


図-2 等圧面

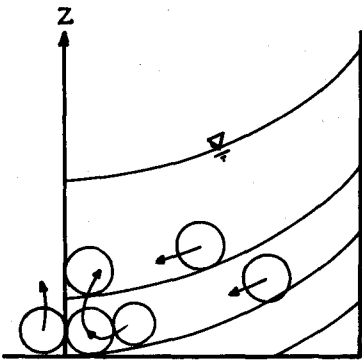


図-3 縦うずのメカニズム

$$v = V r \quad (4)$$

ここに u は 2 次流の半径方向の流速を v は円周方向の流速を表はす。 v については 2 次流によるものは主流の回転流に比べて小さいとして無視し、さらに水槽の壁面および底面の影響を無視するので (4) 式のように仮定している。

w は鉛直方向の速度成分であり ω は角加速度を表わす。 p は圧力であり、その主体は主流の回転流の等圧面として与えられるものとする。 μ は動粘性係数であり V は主流の流速分布を決める定数で (1/T) のディメンションを持つ。

(2) 境界条件

回転流の中心および水槽の周辺部では半径方向の流速は、軸対称の仮定および壁面の条件から零となり次のような条件となる。

$$r = 0 : u = 0 \quad (5)$$

$$r = R : u = 0 \quad (6)$$

ここに R は円形水槽の内径である。

次に水槽の底面では鉛直方向の流速、すなわち z 軸方向の流速が零である。また水面の条件は圧力が大気圧、零になる条件を用いるのが通常であるが、ここでは解法をより簡単にするために便宜的に次のように考えた。

水面ではこれに沿う流速があるわけで、厳密に言うとな鉛直方向の流速は水面こう配に比例する分だけありはつである。

しかし、この量は余り大きくないので無視できると考えた、すなわち水面で $w = 0$ として解を求めてみた。しかしながらこのように水面全域に渡って $w = 0$ を与えることは、若干でもある鉛直流速を完全に無視することになるので現実的ではないと考えて、中心軸の部分のみにおいてこの条件を当てはめることにした。

$$z = 0 : w = 0 \quad (7)$$

$$z = H : w = 0 \quad (8)$$

ここに H は水槽の中心における水深である。

3. 回転流の中心へ向う流れ

水槽内の流れをまづ円周方向の流れすなわち、回転流によって水槽底面付近に生ずる圧力変化によって水槽中心に向う流れを求めてみる。この流れは r と z の関数であると考えられるが、後で z については補償計算をするので、ここでは、まづ r のみの関数として 1 次近似解を求めてみる。

そこで速度 u を (9) 式のようにして、

$$u = u(r) \quad (9)$$

これを (1) 式に代入して境界条件 (5), (6) を満すように解を求めると (10) 式のごとくなる。

この式には当然のこととして底層部分のどのくらいの厚さ

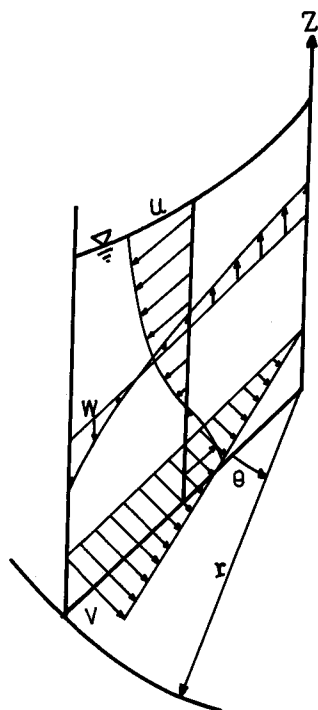


図-4 物理量

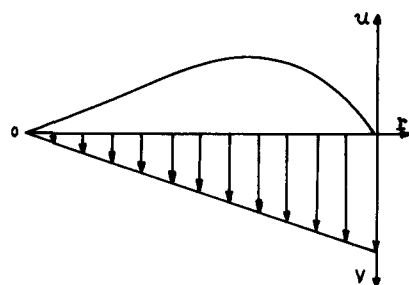


図-5 中心へ向う流れ

まで適用できるか、流れの連続性を満す結果としての鉛直方向の速度 w はどのようになっているかと言うような情報は含まれていない。これらについては次節で求める。

$$u(r) = \frac{V^2}{8\nu} r (r^2 - R^2) \quad (10)$$

この流速は水槽半径の約 60% のところで最大となっている。

回転流にともなう 2 次流

第 1 次近似解の (10) 式の流れを補償する流れとして (11) 式のような解を仮定する。第 1 項は底層部分の圧力の不均衡をもとに生じた流れとして求めたものであるが、第 2 項のような解を加えて水槽内全体の流れを解こうと考えているので、第 1 項が水槽全体に適用されたとしても、第 2 項で補償する量が多くなったと考えれば良いことが判る。

$$u = u(r, z) = u(r) + F(r) G(z) \quad (11)$$

第 2 項はいわゆる変数分離型の解を仮定していることになる。すなわちこの項は半径方向の流れの鉛直方向の変化を与えることになる。

(11) 式を (10) 式に代入して変数分離すると次の 2 式が得られる。

$$\frac{1}{F} \frac{d^2 F}{dr^2} + \frac{1}{Fr} \frac{dF}{dr} - \left(\frac{1}{r^2} + \lambda^2 \right) = 0 \quad (12)$$

$$\frac{1}{G} \frac{dG}{dz} = -\lambda^2 \quad (13)$$

この式の一般解はベッセル関数と指数関数で与えられ、境界条件 (5), (6), (7) を満す解を求めると次のようになる。

$$F(r) = A J_1(\lambda r) \quad (14)$$

$$G(z) = B(\text{Exp}(\lambda z) - \text{Exp}(-\lambda z)) \quad (15)$$

したがって (11) 式は次のような形に整理される。

$$u = \frac{V^2}{8\nu} r(r^2 - R^2) + EJ_1(\lambda r)(\text{Exp}[\lambda z] - \text{Exp}[-\lambda z]) \quad (16)$$

ここに $J_1(\lambda r)$ は第 1 次のベッセル関数であり、定数 λ は第 1 次のベッセル関数の零点を与える根として $J_1(\lambda R) = 0$ より求めることができる。定数 E は定数 A と B の積としてのものである。

次に鉛直方向の流速は (16) 式を連続の式 (2) に代入することにより

$$w = \frac{V^2}{8\nu} (2R^2 - 4r^2)z - EJ_0(\lambda r)(\text{Exp}[\lambda z] - \text{Exp}[-\lambda z] - 2) \quad (17)$$

が得られる。ここに $J_0(\lambda r)$ は零次のベッセル関数である。

定数 E は境界条件 (8) より次のようになる。

$$E = \frac{V^2 R^2 H}{4\nu(\text{Exp}[\lambda H] + \text{Exp}[-\lambda H] - 2)} \quad (18)$$

この定数を (16) 式と (17) 式に代入することによって、水槽内の 2 次流の流速分布を与える式が求まる。

$$u(r, z) = \frac{V^2 r(r^2 - R^2)}{8\nu} + \frac{V^2 R^2 H J_1(\lambda r) [\text{Exp}(\lambda z) - \text{Exp}(-\lambda z)]}{4\nu [\text{Exp}(\lambda H) + \text{Exp}(-\lambda H) - 2]} \quad (19)$$

$$w(r, z) = \frac{V^2 (R^2 - 2r^2) z}{4\nu} - \frac{V^2 R^2 H J_0(\lambda r) [\text{Exp}(\lambda z) + \text{Exp}(-\lambda z) - 2]}{4\nu [\text{Exp}(\lambda H) + \text{Exp}(-\lambda H) - 2]} \quad (20)$$

5. 理論解析の結果について

理論解析の結果の式(16), (17)について表-1の各ケースに数値計算を行なってみた。図-6から図-8までがその状況である、図-6のケースは水深が水槽の内径の半分の場合であり、縦うずの中心がやや右上にあることが判る。同様なことが図-7図-8においてもいえる。

これらは、いずれもベッセル関数の第一の零点より特性値 λ の値を決めているので、水槽内のうずはいづれの場合も一つである。

零点の取り方によって、このようなうづが水槽内に複数個ある場合も求めることが出来る。また水深と水槽の内径との関係でこれらの事が決まってくる様に考えられるし、また主流の回転速度との関係でうづの強さが決まることも考えられる。

これらの事については実験と合わせて現在も研究を続けて進めている。またこのような回転流の中に固体粒子が流入したときの粒子の運動についても今後研究をしたいと考えている。

6. 実験との関係

現在実験を進めている段階であるが、一部の写真との関係をここに示しておく。

円筒水槽の水深と半

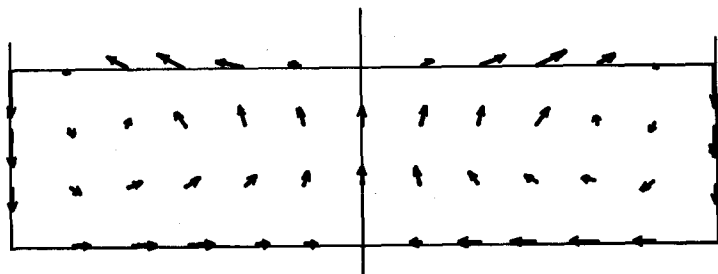


図-6

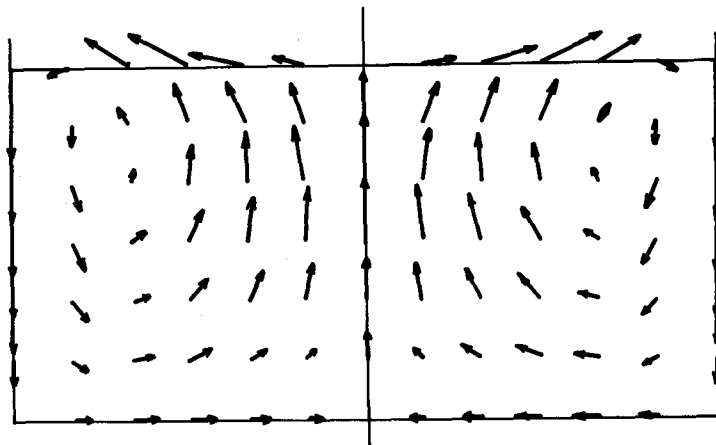


図-7

径の関係を理論の試算と同じ条件にして行なった結果を示す。写真-ノは図-7に相当するものであり、回転流により縦うずを形成していることがわかる。

しかし縦うずの中心は理論的に得られたものよりやや、下方にあることが判る。

これは円筒形水槽の壁面と底面の影響によるものと考えられる。それぞれの面では境界層を形成することにより回転流の流速分布が理論のそれとずれることから縦うずの中心がやや、下方になったものと考ええる。

写真-2は図-8に相当するが縦うずが不安定な状態となり、中心付近においてゆらぎが生じている。

さらに写真-3は図-9に相当しているが、写真-2より一層縦うずの乱れが増している。

このように水深が円筒水槽の半径に比べて大きくなると縦うずの中心は円筒水槽の壁面付近の上方となり不安定となってくる。

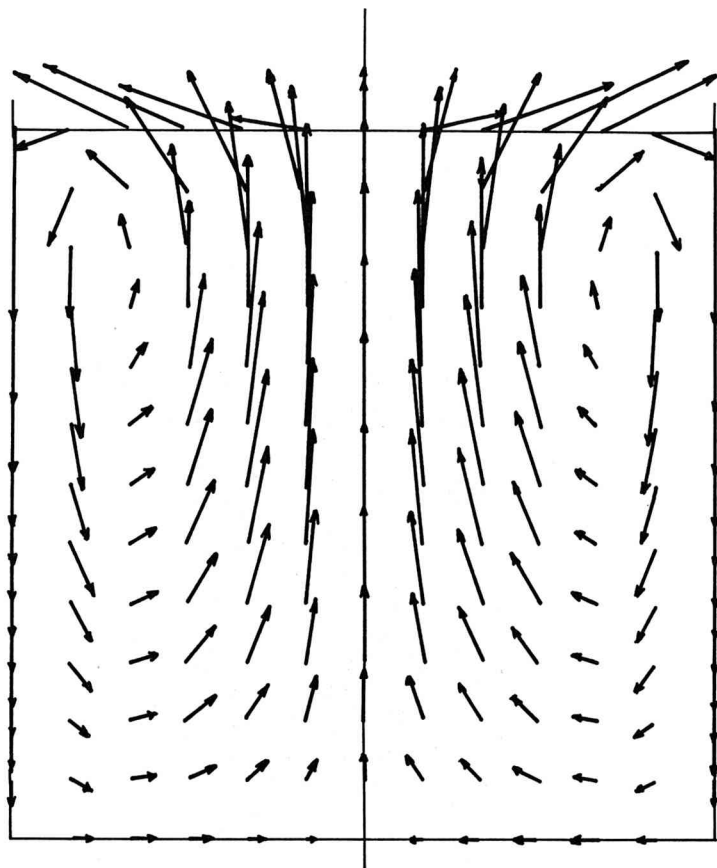


図-8

おわりに

理論も実験もまた初めたばかりで、種々な問題がま

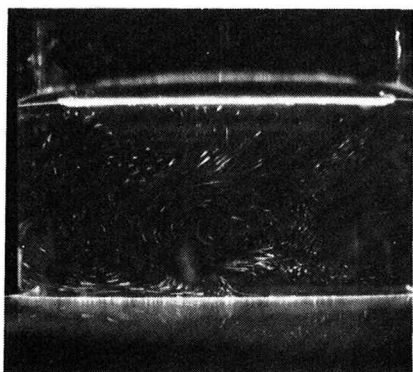


写真-2

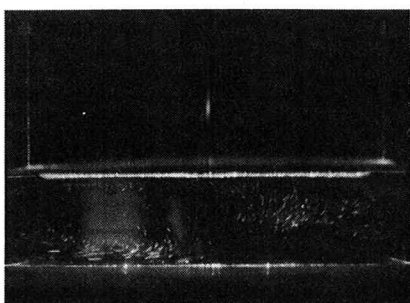


写真-ノ

だ残されている、これを機会に研究を進めたいと考えている。

なお実験およびその解析については学生、田寺佳大、金井正昭の二人に手伝ってもらいました、ここに記して感謝します。

参考文献

1) U.T.BODEWADT "Die Drehstromung uber festem grund" ZAMM, 20,241(1940)
2) W.G.Cochran "The flow due to a rotating disk" Proc. Cambrigde, Phil., Soc.,30,pp365-375,(1934)

写真-3



CASE	H/R	V	λR
1	0.5	1.0	3832
2	1.0		
3	2.0		

表-1