

渦度方程式による並列らせん流の実験的研究
Experimental Study on Cellular Secondary Currents by Vorticity Equation

京都大学工学部 正員 祢 津 家 久
京都大学工学部 正員 中 川 博 次

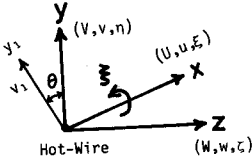
1 まえがき

組織的な乱流構造を示すバースティング現象よりだいぶ以前から実河川の大規模乱流、特に並列らせん流（セル状の二次流で縦渦ともいう）の存在が指摘され、これによって最大流速点が自由水面より下方に現われたり、¹⁾河床には下降流部で洗掘、上昇流部で堆積がおこり、横断河床面が周期的に凸凹分布を示し、これに対応して自由水面上には高速域と低速域とが縦筋状に分布すること、²⁾また、浮遊砂濃度分布にも横断方向に濃・淡の縦筋が生じるであろうと説明されている。¹⁾湾曲河川等で見られる二次流は遠心力という起因力が存在し、渦度の伸長によって発生すると明解に説明される（Prandtl の第1種の二次流）。³⁾一方、直線河川の並列らせん流は乱れの内部構造の不均一性によって生じられる（第2種の二次流）と推測されているのみで、その発生・維持機構は現在でもほとんど不明であり、河床で生じるバースティング現象が発達して並列らせん流になるというJacksonの推論⁴⁾も筆者らの実験によって否定された。⁵⁾直線ダクトの隅角部の二次流と同様な立場から、主流方向の渦度方程式に基づいて並列らせん流に関する理論的検討が最近行われているが、^{6), 7)}研究者によって近似や仮定がまちまちであり、これを実証する実験データがないのが実状である。

並列らせん流は主流速の高々5%以下であるため、水路実験からこの構造をホット・フィルム流速計を用いて計測してもその解析にはかなりの困難を伴う。⁸⁾そこで、本研究では直線ダクトを用いた空気流で、ダクトの上面、下面に凸凹横断河床面を模擬した台形の突起を主流方向に交互に設置し、これによって生じる並列らせん流の乱流構造をホットワイヤ流速計で詳細に計測し、渦度方程式に基づいて検討したものである。

2 渦度方程式

図・1に示すように、主流方向をx軸、鉛直上方をy軸、横断方向をz軸にとり、対応する速度を $(U+u, V+v, W+w)$ 、平均渦度を (ξ, η, ζ) とする（以下で、大文字は平均流、小文字は乱れ成分を表わす）。このとき、主流方向に十分に発達した乱流の運動方程式は次式となる。



図・1 座 標 系

$$V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} + \nu \nabla^2 U \tag{1}$$

$$V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial \overline{v^2}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{vw}}{\partial z} + \nu \nabla^2 V \tag{2}$$

$$V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial \overline{vw}}{\partial y} - \frac{\partial \overline{w^2}}{\partial z} + \nu \nabla^2 W \tag{3}$$

式(2),(3)は式(1)と比べて2次の微小項式であるが、圧力Pを消去すれば平均渦度 (ξ, η, ζ) の方程式が得られる。まず、式(1)と(2)から1次オーダの渦度方程式

$$V \frac{\partial \zeta}{\partial y} + W \frac{\partial \zeta}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \overline{uv}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{uw}}{\partial z} \right) + \nu \nabla^2 \zeta, \quad \zeta \equiv - \frac{\partial U}{\partial y} \tag{4}$$

式(2)と(3)から2次オーダの渦度方程式がそれぞれ得られる。

$$\underbrace{V \frac{\partial \xi}{\partial y} + W \frac{\partial \xi}{\partial z}}_{\text{A}} = \underbrace{\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} (\overline{v^2} - \overline{w^2})}_{\text{B}} + \underbrace{\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \overline{vw}}_{\text{C}} + \underbrace{\nu \nabla^2 \xi}_{\text{D}} \tag{5}$$

ここで、 $\xi \equiv \partial W / \partial y - \partial V / \partial z$ である。

式(5)は式(4)と比べて2次の微小項式であるが、主流速度Uを含まないから並列らせん流 (V, W) を支配する基礎方程式と考えられる。式(5)のAはx方向の渦度 ξ の移流項、Bは渦度発生項、Cはレイノルズ応力項、Dは粘性項といわれ

6) 粘性項は壁面のごく近傍を除き無視できる。従来の二次流モデルでは、レイノルズ応力 $-\overline{vw}$ を

$$-\overline{vw} = \epsilon_{yz} (\partial V / \partial z + \partial W / \partial y) \quad (6)$$

なる渦動粘性モデルで (V, W) と結びつけ、⑧項がコーナ流の実測結果から適宜仮定されてきた。^{6), 7)} しかし、コーナ流の結果でも(i) ④=⑧、③=0としたり⁹⁾ 逆に(ii) ④=0、⑧+③=0¹⁰⁾と見なし、研究者によってその定式化が異なり、このきめ手を欠いている。これは、式(5)の各項が式(4)と比べて2次の微小項ゆえ実験的検討がより困難なためと考えられる。

一方、コーナ流に比べて並列らせん流に関する実験結果はほとんどなく、式(5)の各項がどの程度の大きさであり、これによって並列らせん流の内部構造がどの程度説明されるかは不明である。そこで、本研究は式(5)の各項を高精度に詳細に実測し、この内部構造を渦度の面から検討した。

3 実験方法及び解析方法

実験装置は標準型の小型風洞で、整流筒を1/11の絞り比で縮流したのち、全長6m、鉛直幅 $2a=8$ cm、横断幅 $B=18$ cmの亚克力製の長方形断面ダクトに接続され、計測断面が流入口から下流4.8mの位置に設定された。最大流速 U_{max} を約5m/sに固定し($Re \equiv U_{max} a / \nu = 1.3 \times 10^4$)、まず一様平滑面で実験を行った。この場合、側壁の影響が若干現われたが、 $|z/a| \leq 1$ のダクト中央部ではほぼ2次元乱流が得られ、側壁によるコーナ流が並列らせん流の発生・維持に直接的な原因であるとは認められなかった。¹¹⁾ このことは、 $k-\epsilon$ の乱流モデルを用いた二次流の数値計算でも示唆される。¹²⁾ このため、河川の洗掘部と堆積部に相当する凸凹形状を底面に設置することが必要と考え、厚さ5mm、幅20mmの台形断面(45°エッジ切断)を有する滑面の栈突起を x 方向にダクト全長にわたって設置し、またダクトの中央高 $y=a$ がダクト対称面(自由水面に相当する)になるように上底面にも対称に設置された。¹¹⁾ 並列らせん流の上昇・下降流部を境界とする1つのセルを詳細に検討するため、 $y-z$ 面内の約300測点で流速をX型ホットワイアで計測した(図・2)。ホットワイアのX面と y 軸とのなす角度を θ とすれば(図・1)、 $\theta_1=0^\circ$ で (u, v) 、 $\theta_2=45^\circ$ で (u, v_1) 、 $\theta_3=90^\circ$ で (u, w) の各ベアが計測できるから、本実験では同一測点でホットワイアを3通り回転させ、余弦則から各成分が高精度に計算された。このとき、

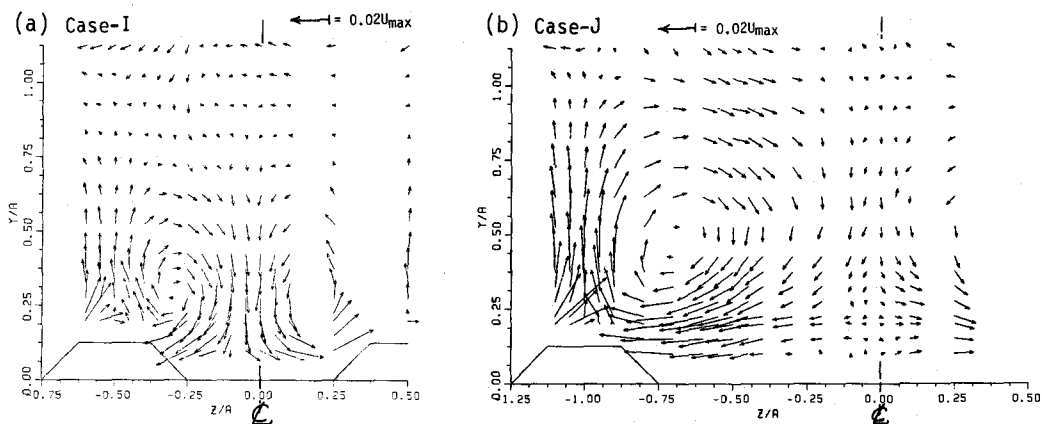
$$v_1 = v \cos \theta_2 - w \sin \theta_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(v - w) \quad \therefore -\overline{vw} = \overline{v_1^2} - \frac{1}{2}(\overline{v^2} + \overline{w^2}) \quad (7)$$

であるから、式(5)のすべての項が実測可能となった。実験は、突起間隔 l を a としたケースIと $l=2a$ としたケースJの2通り行った。

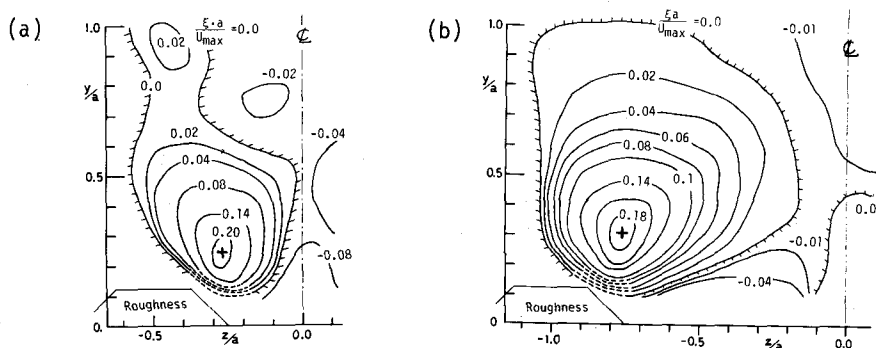
4 実験結果及びその考察

4.1 二次流及び渦度の分布 図・2は、両ケースで得られた二次流 (V, W) をベクトル表示したものである。予想した通り、河川の堆積部に相当する凸部で上昇流、洗掘部に相当する凹部で下降流が現われ、並列らせん流の存在が明瞭に認められる。この二次流に伴って、主流速 U の分布は凸部で低速、凹部で高速となり、乱れ強度3成分 u', v' 及び w' は逆に凸部で大きく、凹部で小さくなった。レイノルズ応力 $-\overline{uv}$ 及び $-\overline{uw}$ も含め、これらの乱流諸特性に及ぼす二次流の詳細な検討は文献11)で行っている。ここで注目すべき点は、上昇流部より下降流部で壁面せん断応力が大きくなることである。このため、移動床では二次流が存在すれば下降流部が洗掘され、縦筋ができると説明され、あるいは何らかの原因で縦筋が現われると二次流が惹起され、より安定した縦筋が形成されるとも推測される。しかし、境界層厚程度の大きな突起を設置すればこの上面には逆に下降流が現われるという報告があるから¹³⁾ 実河川の縦筋高もおおのずと有限であろう。

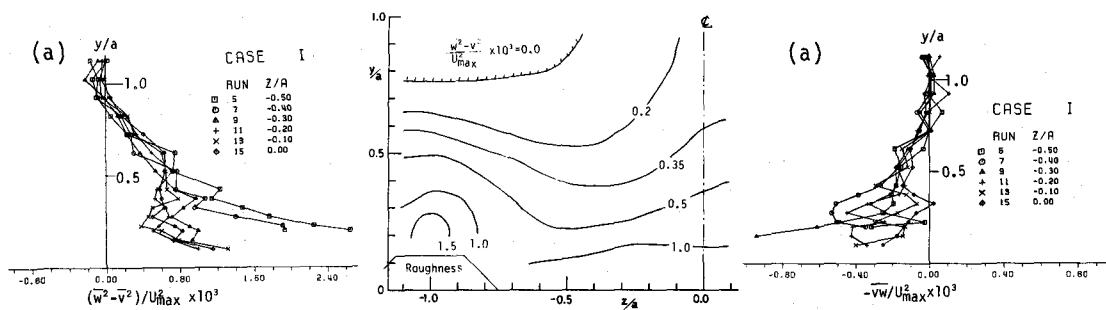
突起間隔 l がダクトの中央高 a (水深に相当する)に等しいケースIでは、二次流の規模は小さく、ほぼ $a/2$ を半径とする円運動で、その中心は $y/a \approx |z/a| \approx 1/4$ となる。 z 方向に隣接のセルでは逆回転となり、また、 $y/a > 0.6$ のダクト中央部にも互いに逆転する弱い並列らせん対が見られる。一方、突起間隔が $2a$ となったケースJの二次流セルは $a \times a$ のほぼ正方形であるが、渦回転の中心は $y/a \approx 0.5$ 、 $z/a \approx -0.65$ と突起側にかた寄っている。実河川で観測される縦筋



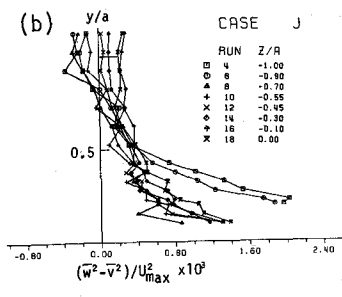
図・2 並列らせん流 (V, W) のベクトル図 (左図はケース I, 右図はケース J)



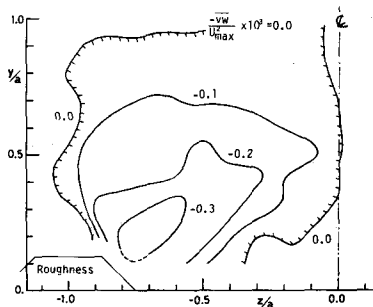
図・3 主流方向 (x 軸方向) の渦度 $\xi \equiv \partial W / \partial y - \partial V / \partial z$ の等値線分布



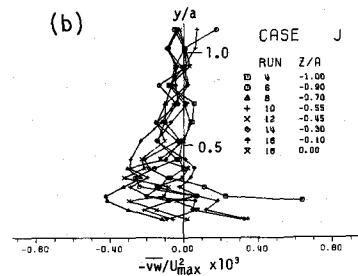
図・5 $(\overline{w^2 - v^2})$ の等値線図



図・4 $(\overline{w^2 - v^2})$ の y 方向分布



図・7 $-\overline{vw}$ の等値線図



図・6 $-\overline{vw}$ の y 方向分布

間隔は水深の約2倍であるから、ケースJはこれを模擬したものであるが、二次流構造も水面に相当する $y/a=1$ まで及ぶ大きな渦を構成し、注目される。上昇流部はほぼ突起上に限られるから、下降流部の範囲はより広く、このため流れの連続関係から上昇流の速度は下降流より数倍大きい。特に、凹部の中央である $z/a=0$ の下降流は弱く、ケースIと著しく異なった特性を示す。このように、強い上昇流が狭い範囲で集中し、この囲りに弱い下降流が広い範囲で存在する特性は、実河川で多くの研究者によって指摘され、^{2), 4)} ケースJは真しくこの並列らせん流を再現したものと考えられる。この場合、堆積部（突起部）の細砂が強い上昇流で水面まで浮上し、浮遊砂濃度の高いボイルを発生すると説明できる。ケースIの二次流はケースJより弱く、このタイプの二次流が実河川でも実在するか興味ある検討課題である。いずれにせよ、両ケースの二次流速度は主流の最大流速の高々4%以下、すなわち平均摩擦速度 $U_* \approx 0.045 U_{max}$ と同程度かそれ以下の値である。この結果は、コーナ流の二次流とはほぼ同程度であり⁹⁾、水流での実測が困難となる理由がここにある。

次に、図・3は、図・2の(V, W)からx方向の渦度 ξ を計算し、このコンタを示している。 ξ の計算に当っては、数値微分を高精度よく得るために実測のVとWの分布形を5次のベキ関数に最小2乗法で近似し、この関数を微分して求められた。なお、 ξ は a と U_{max} で無次元表示されている（以下の図面でも同様）。図・2の二次流のパターンと対応して、渦度 ξ の分布もほぼ同心円状をなす。ケースIの $-0.5 \leq z/a \leq 0$ の二次流セルでは $\xi > 0$ すなわち時計回りの回転を示し ξ のピーク値は図・2(a)の渦中心とほぼ一致する。このセルの対称面 $z/a=0$ 、 -0.5 で ξ はほぼ0、隣接のセル内の ξ は負となる。また、 $y/a > 0.6$ のダクト中央でも $\xi < 0$ となる。すなわち、 $-0.5 \leq z/a \leq 0$ の凸凹半波長間の底面近くで強い渦度集中($\xi > 0$)、その上方では反回転の微弱な渦度集中($\xi < 0$)がおこることがわかる。一方、ケースJではセル対称面の $z/a=0$ 、 -1 及び $y/a=1$ で $\xi \approx 0$ となり、このセル内全体で $\xi > 0$ の大規模な渦度分布を示している。しかし、 ξ のピーク部は図・2(b)の二次流の回転中心とは一致せず、突起部にさらに近づいた位置にある。このため、突起部周辺の渦度分布の勾配は大きく、この領域で二次流が機動されることが推測できる。すなわち、突起の存在が二次流の生成に重要な役割をもつことがわかる。

4.2 渦度発生項 式(5)の⑧を評価するため、 $(\bar{w}^2 - \bar{v}^2)$ を図・4に示した。凸部（上昇流部）で乱れ強度は増加し、凹部（下降流部）で減少するという特性¹¹⁾を反映して、 $(\bar{w}^2 - \bar{v}^2)$ は凸部上で最大となり、 z の位置が凹部に移行すると減少して、 y 方向に平坦な分布形を示す。両ケースを比較すると、ケースIでは、 $y/a > 0.5$ で凸凹底面の影響をほとんど受けず、一様平滑面上の結果とほぼ一致し、この場合 $\partial(\bar{w}^2 - \bar{v}^2)/\partial z$ はほぼ0、すなわち渦度発生項は0となる。一方、ケースJでは凸凹底面の影響が $y/a=1$ まで現われ、 $y/a > 0.8$ で凸部上では $\bar{w}^2 < \bar{v}^2$ 、凹部上では $\bar{w}^2 > \bar{v}^2$ となり、ケースIと著しい差違を示した。これは、上昇流が $y/a=1$ まで及ぶから $y/a > 1$ のダクト反対側との運動量交換が活発になり $\bar{v}^2$ が増大し、一方 $z/a=0$ の位置では二次流はほとんどどよみ、 $\bar{v}^2$ は減少する結果と考えられる。図・5は、ケースJの $(\bar{w}^2 - \bar{v}^2)$ のコンタである。凸部でのコンタ間隔は狭く、凹部に移行すると広がるから渦度発生項⑧は $-1.0 < z/a < -0.5$ で負となることが直ちにわかる。この特性はコーナ流と著しく相違する。すなわち、コーナ流では壁面に向う線上（下降流に相当する）で $\bar{v}^2 \equiv \bar{w}^2$ となるからこの近傍ほど $\partial(\bar{v}^2 - \bar{w}^2)/\partial y$ は大きく、このため渦度発生項は正となる。このように、 $(\bar{w}^2 - \bar{v}^2)$ の分布はコーナ流と並列らせん流では著しく異なり、Perkins³⁾ や Gerad⁶⁾ が行った $(\bar{w}^2 - \bar{v}^2)$ の普遍関数表示は並列らせん流にはまったく適用できない (U_* で図・4を無次元表示すれば上昇・下降流部でその差違はより大きくなる)。この意味で、並列らせん流はコーナ流より複雑な現象であって、先述したように後者が前者の直接的な起因力とは考えられない。

4.3 並列らせん流のレイノルズ応力 筆者の知る限り、並列らせん流のレイノルズ応力 $-\bar{v}w$ を実測した例はなく、たとえ実測精度が悪くともこれを計測してこの分布特性を得ることが本研究の1つの目標であった。コーナ流の計測で用いられるホットワイヤ回転法⁹⁾を使って式(7)から $-\bar{v}w$ が得られた。しかし、同一測点を3回別々に計測する必要がある、プローブの位置や流れ条件が同一になるように細心の注意を払ったが、他の乱れ特性値に比べてかなりの誤差があると考えられる。この実測結果を図・6に示す。 $y-z$ 面内の対称線では $-\bar{v}w$ は符号を変えるから $-\bar{v}w=0$ となるはずである。確かに、両ケースとも $z=0$ 及び突起部の軸上で $-\bar{v}w$ はほぼ0となる。また、 $y/a=1$ の対称線（自由水面に対応する）では z の位置によらずに $-\bar{v}w=0$ となり、先述のケースJでの $\bar{w}^2 \neq \bar{v}^2$ の特性と比較して興味深い。ここで対象とした二次流セル間では $-\bar{v}w < 0$ となるが、 y 方向の分布特性は $y/a < 0.5$ でかなりばらつき、複雑な変化を示す。図・7

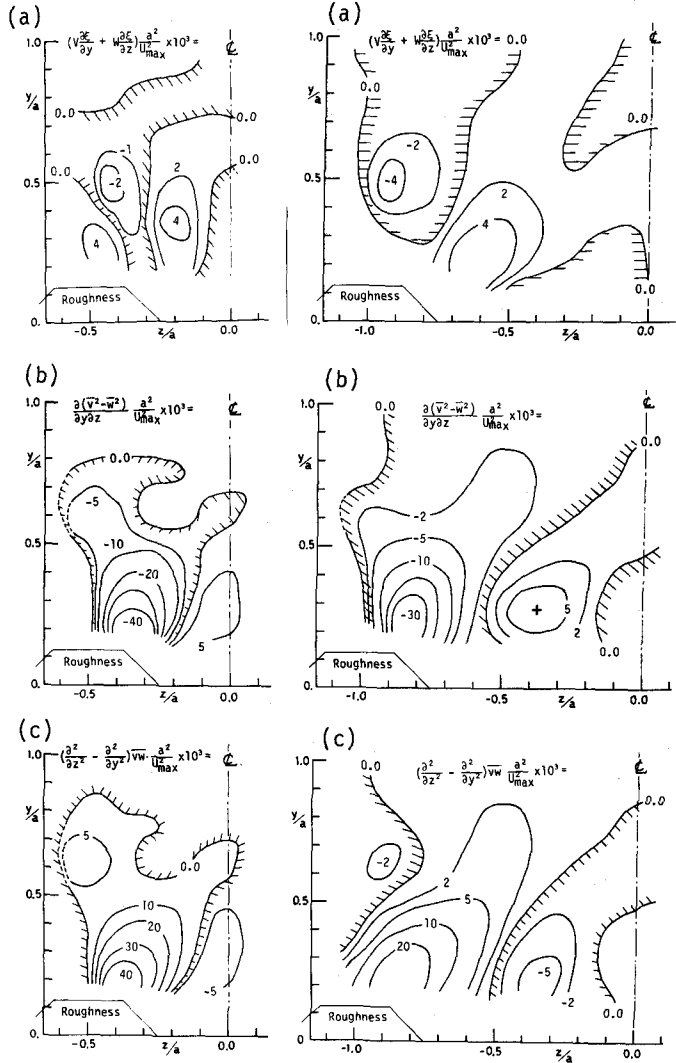
はケースJの $-\overline{vw}$ のコンタである。このパターンは図・3の渦度分布に類似し、注目される。すなわち、 $-\overline{vw}$ のピーク値は $z/a \approx -0.7$ の突起部境界の直上にあり、かなりゆがんでいるが同心円状の分布をなし、明らかに $(\overline{w}^2 - \overline{v}^2)$ のコンタとは異なっている。コーナ流での $-\overline{vw}$ と比較すると、⁹⁾値自体は同程度であるが、並列らせん流の下降流に対応するコーナ対角線上で $-\overline{vw}$ はピークをもち、図・7とはまったく異なった分布を示す。

5 渦度方程式による二次流の検討

以上で、渦度方程式の各項を評価できる準備が整った。まず、図・3の ξ から渦度の移流項Aが計算され、図・8、9の(a)に示された。なお、以下のコンタ図は $(U_{max}/a)^2 \times 10^{-3}$ の無次元単位で表示されている。ケースI、J共に、移流項は特徴あるパターンを示す。図・3の ξ の分布を対比して考察すれば、移流項の渦度中心を境として右側で正、左側で負となり、渦度のコンタが密なる領域でそれぞれピーク値をもっている。 $V \partial \xi / \partial y$ と $W \partial \xi / \partial z$ は、ほとんどの領域で異符号となるから、この移流項の合計はかなり小さくなった。これは、二次流の流線方向を s とすれば、 $V \partial \xi / \partial y + W \partial \xi / \partial z = U_s \partial \xi / \partial s$ であるが、図・2、図・3から ξ のコンタは流線とよく一致し、 $\partial \xi / \partial s$ が小さくなるからである。この結果はGessner らのコーナ流で見られるが、¹⁰⁾ 一方無次元移流項が50のピークをもつという報告もあり、³⁾ 論議が別れている。

次に、渦度発生項 $\partial^2 (\overline{v}^2 - \overline{w}^2) / \partial y \partial z$ は $y/a < 0.5$ でケースI、Jともに類似したパターンを示す。壁面近傍での微分精度は悪いからかなりの誤差が考えられるが、突起端の直上で強い負のピークを示し、並列らせん流が突起の存在によって生じられると考えられる。先述の理由により、コーナ流の渦度発生項は正となるが、無次元ピーク値は約30であり、³⁾ 本実験値と同程度である。

レイノルズ応力項Cの直接評価は困難であった。図・6の実測値を、2階差分法あるいは5次のベキ関数近似微分法を用いて計算しても、大きなばらつきが生じ、C項のコンタは描けなかった。式(5)の残差がB項と同オーダーとなる測点があり、 $-\overline{vw}$ を2階微分で生ずるほど実測精度は高くないことが判明した。そこで、式(5)を使い、 $C = A - B - D$ として間接評価し、この結果を図・8、9(c)に示した。ケースI、Jともに、突起上の $y/a = 0.5 \sim 0.8$ の領域を除きC項は渦度発生項Bと符号が異なるだけで、ほぼ同じパターンを示している。すなわち、移流項Aが負のピークを示した突起上ではA、B、Cは同一オーダーとなるが、Aが正のピークを示す突起端付近ではBは数倍大きく、BとCとがほぼ釣り合っている。Perkins によるコーナ流では、³⁾ コーナに向う下降流側でC<0、上昇流側でC>0となり、C項はコーナ流と並列らせん流とで大まかな対応がつく。したがって、両者で渦度発生項の正負が相反したのはAのきき具合が異なる



図・8、図・9 渦度方程式の各項の分布の比較

ためであり、並列らせん流の渦度移流項はコーナ流に比べてより小さいと考えられる。

8 圧力分布

式(2), (3) から圧力勾配 $\frac{1}{\rho} (\partial P / \partial y, \partial P / \partial z)$ が得られ図・10にベクトル表示した。二次流がなければ $\partial P / \partial y = -\rho \cdot \partial \bar{v}^2 / \partial y > 0$, $\partial P / \partial z = 0$ であるからこのベクトルは y 軸方向に一致する。図から明らかに突起上が負圧、 $y/a=1$, $z/a=0$ の位置が正圧となり、両極端で圧力勾配の流れが起る。 $y=a$, $z=-a$ で $P=0$ とおき、これを線積分して図・11に示した。二次流がないと P のコンタは z 軸に平行となるが、突起の周辺でこれから顕著にずれ、上昇流部が負圧になる点が注目される。

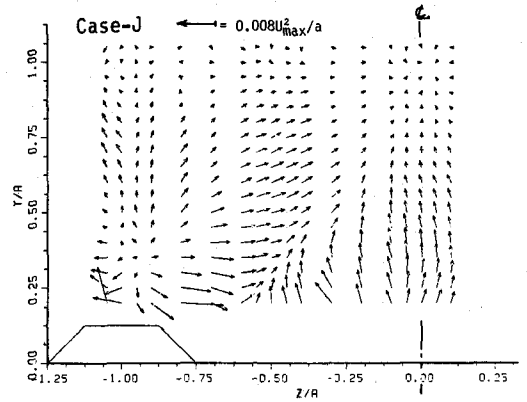
最後に、実測の $-\bar{uv}$, $-\bar{uw}$ から得られた渦動粘性 ϵ_{xy} , ϵ_{xz} はほぼ等しくなったから、 ϵ_{yz} をこの平均値と仮定して式(6)から $-\bar{vw}$ を求め、この結果を図・12に示した。図・6の実測値として比較して、ほぼ同程度となるが、 $y/a < 0.5$ の計算値は小さすぎ、この領域で $\epsilon_{xy} < \epsilon_{yz}$ であると推測されるが、詳細な検討は今後にしたい。

7 あとがき

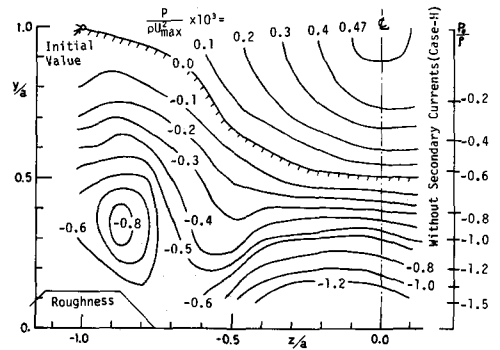
底面に縦稜粗度を設置すれば安定した並列らせん流が惹起されることが示された。このとき、渦度移流項は渦度発生項及びレイノルズ応力項に比べて小さく、後者の二項がほぼ釣り合っていることが明らかにされた。

<参考文献>

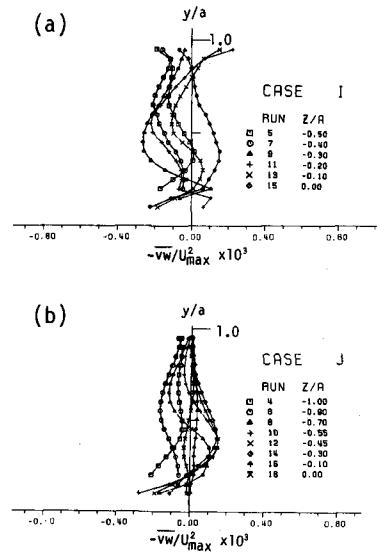
- 1) Vanoni, V.A. (1946), Trans. ASCE, **111**, 67.
- 2) 木下良作 (1967), 写真測量, **6**, 1.
- 3) Perkins, H.J. (1970), J. Fluid Mech., **44**, 721.
- 4) Jackson, R.G. (1976), J. Fluid Mech., **77**, 531.
- 5) 中川・祢津・冨永 (1981), 土木学会論文集, **312**, 93.
- 6) Gerard, R. (1978), ASCE, HY-5, 755.
- 7) 黒木・岸 (1981), 土木学会論文集, **312**, 83.
- 8) 祢津・中川 (1981), 土木学会年講, II-232.
- 9) Brundrett, E. & Baines, W.D. (1964), J. Fluid Mech., **19**, 375.
- 10) Gessner, F.B. & Jones, J.B. (1965), J. Fluid Mech., **23**, 689.
- 11) 中川・祢津・冨永 (1982), 水理講演会論文集.
- 12) Naot, D. & Rodi, W. (1981), SFB80/T/187, Karlsruhe Univ.
- 13) 中村ら (1979), 機械学会論文集, **400**, 1816.



図・10 圧力勾配のベクトル図



図・11 等圧力分布 (右端は二次流なしの場合)



図・12 渦動粘性モデルによる $-\bar{vw}$ の評価