

グリーン公式による浸透流解析法の岩盤タンクへの適用
Application of Seepage Analysis to Rock Caverns
by Means of Green's Identity Formula

清水建設㈱ 正員 百田 博宣
清水建設㈱ 正員 楠本 太

1. 緒言

岩盤内に空洞を掘削し、地下水の効果によって石油類を貯蔵する「岩盤タンク」の浸透流解析には、任意の幾何形状や境界条件が取扱い易い有限要素法¹⁾²⁾が多く用いられているが、計算容量が大きく煩雑である。一方、鏡像法による解析³⁾は簡便であるが、タンクの形状や境界条件の取扱いに問題が残る。

本研究は、山上ら⁴⁾と同様に、任意の幾何形状や境界条件を有す浸透流問題を精度よく且つ簡便に求める一般的な数値解析法の確立を目的とするもので、グリーン公式⁵⁾を導入して2次元定常飽和浸透流の定式化を行ない、岩盤タンクの浸透流問題に適用したものである。

2. グリーンの公式⁵⁾

図-1に示すように、閉曲線CとCによって囲まれる閉領域Dにおいて2次の連続な導関数を持ち、且つラプラス方程式を満足するポテンシャル関数を $\phi(x, z)$ とすると、点Pの $\phi(x, z)$ の値は、グリーンの定理よりC上の点Qの関数値 $\phi(\xi, \eta)$ と、その外向き法線微分値 $\partial\phi(\xi, \eta)/\partial\nu$ で与えられる⁶⁾。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2\pi} \int_C \left[\phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial\nu} (\ell_n R) - \frac{\partial\phi(\xi, \eta)}{\partial\nu} \cdot \ell_n R \right] ds \tag{1}$$

ここで、RはPとQの距離、 ν はCに沿う外向き法線、また積分はCに沿う反時計廻りの線積分である。また、内点がC上の点P'に接近する極限を考え、 r をP'とQの距離とすると、式(1)より次式を得る⁶⁾。

$$\phi(\xi', \eta') = \frac{1}{\pi} \int_C \left[\phi(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial}{\partial\nu} (\ell_n r) - \frac{\partial\phi(\xi, \eta)}{\partial\nu} \cdot \ell_n r \right] ds \tag{2}$$

いま、図-2に示すように、境界線CをN個の小線分に分割し、各線分の中点 (ξ_j, η_j) における $\phi(j)$ と $\partial\phi(j)/\partial\nu$ が当該線分上で一定と仮定すると、式(2)は次の差分方程式で近似できる。

$$\phi(i) = \sum_{j=1}^N \left[\bar{E}_{ij} \phi(j) - E_{ij} \bar{\phi}(j) \right] \quad (i=1 \sim N) \tag{3}$$

ここで、 $\phi(i)$ は $\phi(\xi_i, \eta_i)$ 、 $\phi(j)$ は $\phi(\xi_j, \eta_j)$ 、 $\bar{\phi}(j)$ は $\partial\phi(\xi_j, \eta_j)/\partial\nu$ を示す。また、 $i = \sqrt{-1}$ とすると、 E_{ij} および $\bar{E}_{ij}$ は次式で与えられる線分 ΔS_j についての積分値である(図-2)。

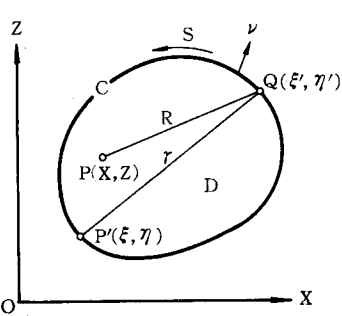


図-1 2次元閉領域の定義

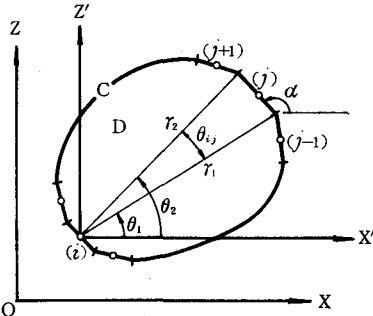


図-2 境界線の分割

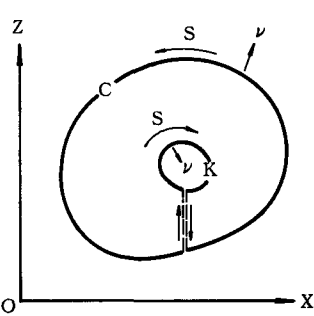


図-3 2重連結領域の定義

$$\left. \begin{aligned} E_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta s_j} \ell_n \gamma_{ij} ds = \frac{1}{\pi} \operatorname{Re} \left[e^{-i\alpha} \{ r_2 e^{i\theta_2} (\ell_n r_2 e^{i\theta_2} - 1) - r_1 e^{i\theta_1} (\ell_n r_1 e^{i\theta_1} - 1) \} \right] \\ \bar{E}_{ij} &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} (\ell_n \gamma_{ij}) ds = \frac{\theta_{ij}}{\pi} \quad (\text{ただし、} \bar{E}_{ii} = 0) \\ \gamma_{ij} &= \sqrt{(\xi_i - \xi_j)^2 + (\eta_i - \eta_j)^2} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

式(3)は、境界上の N 個の ϕ と $\bar{\phi}$ 、すなわち $2N$ 個の未知数に関する N 個の連立一次方程式を示し、領域の形状のみで決まる幾何学的関係式である。本文では、井島ら⁵⁾と同様これをグリーン公式と称す。このグリーン公式を解くには更に N 個の関係式が必要で、この関係は境界条件より与えられる。

内点 (x, z) における $\phi(x, z)$ は、式(1)より式(3)と同様に表現できる。

$$\phi(x, z) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N [\bar{E}_{xj} \phi(j) - E_{xj} \bar{\phi}(j)] \quad (5)$$

$$\left. \begin{aligned} E_{xj} &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta s_j} \ell_n R_{xj} ds \\ \bar{E}_{xj} &= \frac{1}{\pi} \int_{\Delta s_j} \frac{\partial}{\partial \nu} (\ell_n R_{xj}) ds \\ R_{xj} &= \sqrt{(x - \xi_j)^2 + (z - \eta_j)^2} \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

以上は、グリーン公式の基本的説明であるが、本法は多重連結領域問題にも適用可能である。例えば、図-3に示す2重連結領域の場合、図中に破線で示す横断線を導入して単一連結領域に変換し、式(3)を用いればよい。この場合、破線上の積分は、破線間隔を十分小さく取れば数値計算上考慮する必要はない。

3. グリーン公式による2次元定常飽和浸透流の定式化

透水性に関して均質等方性で多孔質な浸透流の場合において、水の単位重量を w 、透水係数を k 、任意点の圧力を P とし、水平方向に x 軸、鉛直上向きに z 軸を設定する。ポテンシャル関数 ϕ を式(7)で定義すれば、2次元定常飽和浸透流の基礎式は、Darcyの法則と質量保存則より式(8)となる。

$$\phi = -kh = -k \left(\frac{P}{w} + z \right) \quad (7)$$

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad (\text{ラプラス方程式}) \quad (8)$$

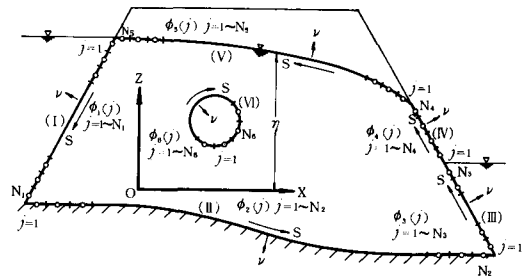


図-4 浸透流モデルの境界の分割とポテンシャル関数の定義

いま、図-4のモデルに対して、既知量は

ϕ_n または $\bar{\phi}_n$ 上に $\sim$ を附し、 $\tilde{\phi}_n$ または $\tilde{\bar{\phi}}_n$ で表わすと、I、III、IV境界は圧力指定境界より $\phi_n = \tilde{\phi}_n$ 、II境界は不透水層より $\bar{\phi}_2 = \tilde{\bar{\phi}}_2 = 0$ 、浸出面 (IV境界) は $\phi_4 = -kz$ となり、以上の境界では ϕ または $\bar{\phi}$ の一方の値が確定する。ただし、自由水面は水面高を η 、鉛直貫入水量を I 、方向余弦を $\cos(\nu, \eta)$ とすると、未知数 η に関する以下の条件式となる。

$$\bar{\phi}_5 = -I \cos(\nu, \eta) \quad (\text{自由水面の質量保存則より}) \quad (9)$$

$$\phi_5 = -k\eta \quad (\text{自由水面の圧力一定の条件より}) \quad (10)$$

よって、自由水面については式(9)を既知条件と仮定し、式(3)に代入すれば、本問題のグリーン公式が得られる。本式は、 $(N_1 + N_2 + N_3 + N_4 + N_5 + N_6)$ 個の未知量、 $\bar{\phi}_1(j)$ 、 $\phi_2(j)$ 、 $\bar{\phi}_3(j)$ 、 $\phi_4(j)$ 、 $\phi_5(j)$ 、 $\bar{\phi}_6(j)$ に関する同数の連立方程式である。

$$\begin{aligned}
& -\phi(i) + \sum_{j=1}^{N_1} [E_{ij} \tilde{\phi}_1(j) - E_{ij} \bar{\phi}_1(j)] + \sum_{j=1}^{N_2} E_{ij} \phi_2(j) \\
& + \sum_{j=1}^{N_3} [E_{ij} \tilde{\phi}_3(j) - E_{ij} \bar{\phi}_3(j)] - \sum_{j=1}^{N_4} [E_{ij} kz + E_{ij} \phi_4(j)] \\
& + \sum_{j=1}^{N_5} [E_{ij} \phi_5(j) + E_{ij} I \cos(\nu, \eta)] \\
& + \sum_{j=1}^{N_6} [E_{ij} \tilde{\phi}_6(j) - E_{ij} \bar{\phi}_6(j)] = 0 \quad (14)
\end{aligned}$$

($i=1 \sim N_1, 1 \sim N_2, 1 \sim N_3, 1 \sim N_4, 1 \sim N_5, 1 \sim N_6$)

これを解いて、式(10)を満足するまで η を移動させ、反復計算を行なうことにより、境界上のすべての $\phi(j)$ および $\bar{\phi}(j)$ が確定できる。また、領域内部のポテンシャル関数 $\phi(x, z)$ は式(5)より求められる。

4. 理論の検証

まず、被圧問題を対象として、半無限地下水場の円形暗きょの湧水量を取扱った上田らの厳密解⁷⁾と本法および有限要素法を用い、湧水量とポテンシャル分布の比較検討を実施した。図-5に暗きょの深さ(d)と湧水量(Q)の関係、図-6に本法と厳密解のポテンシャル(h)分布の比較を示す。図-5によれば、本法は、有限要素法に比して厳密解との合致性はよく、これは、本法では、境界流速 $\bar{\phi}$ が算定できることによる。特に本法によるAタイプモデルの結果は厳密解と非常によく一致し、両者の差は0.3%以下であった。また、図-6によれば、本法によるポテンシャル分布は、中心が鉛直線上を移動する円形分布となり、厳密解のそれと非常によく一致する。この結果より、本法は、領域内部の点のポテンシャル値も正確に算定できることが確認された。

次に、不圧問題を対象として、有限要素

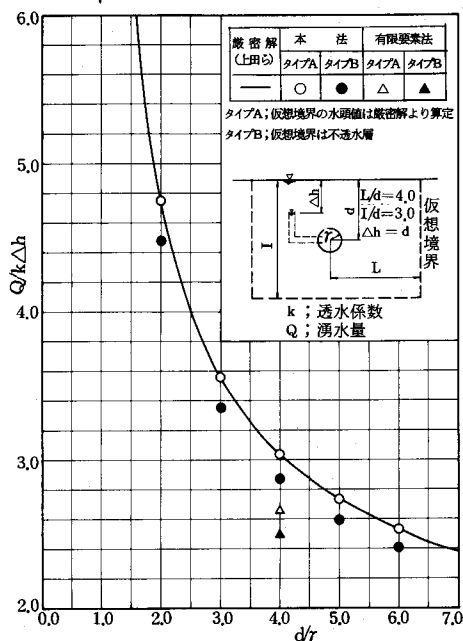


図-5 半無限地下水場の円形暗きょ湧水量の比較

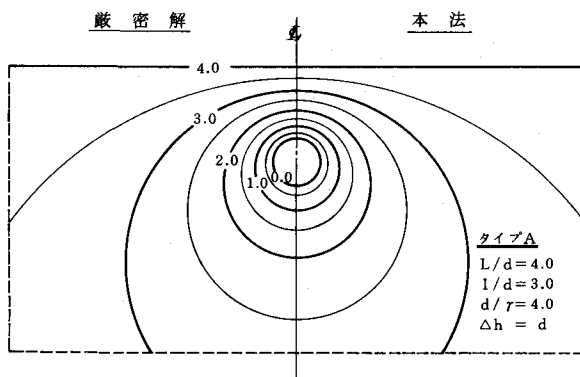


図-6 厳密解と本法のポテンシャル (h/r) 分布の比較

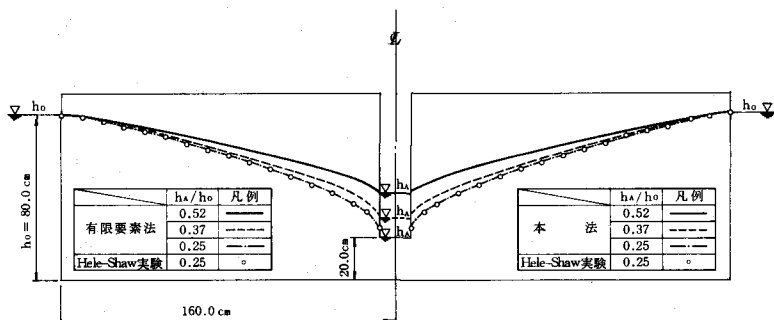


図-7 本法と有限要素法および実験による自由水面形の比較

法と本法およびHele - Shaw モデル実験⁸⁾ ($h_A/h_0=0.25$) によって自由地下水面(η)を算出し、比較検討した。なお、実験では η は写真撮影によって測定した。ここで得られた解析結果および実験結果を図-7に示す。本図によれば、本法による η は有限要素法や実験結果とほぼ一致し、 h_A/h_0 の低下による η の低下が認められる。これより、本法は境界が移動する不圧問題に対しても、収束計算を行なうことにより利用でき、きわめて有効な手法であることが確認された。

5. 本法の岩盤タンクへの適用

岩盤タンクの浸透流解析では、気密性の指標となるタンク周辺の鉛直方向動水勾配(I_0)と湧水量(Q_T)の正確な算定が必要である^{1) 9)}。本文では、この両者を指標として本法の岩盤タンクへの適用性を判定した。なお、ここで用いる本法と有限要素法モデルの境界上の線分長さは一致させてある。

(1) 単設タンクモデル

本モデルに対しては、本法の解析と共にHele - Shaw モデル実験⁸⁾および有限要素法解析⁸⁾を実施した。実験装置、実験モデルおよび有限要素法解析モデルの各諸元は、図-8に示す。これらの結果として、図-9にA₂₂モデルの本法によるポテンシャル分布とトレーサーによる流線の測定結果を、図-10に水封ボーリン

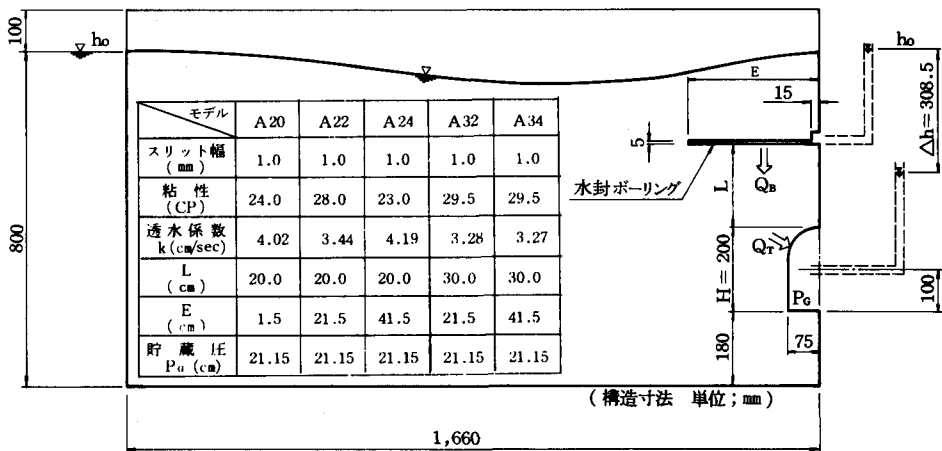


図-8 Hele - Shawモデル実験装置、実験モデルおよび有限要素法解析モデル

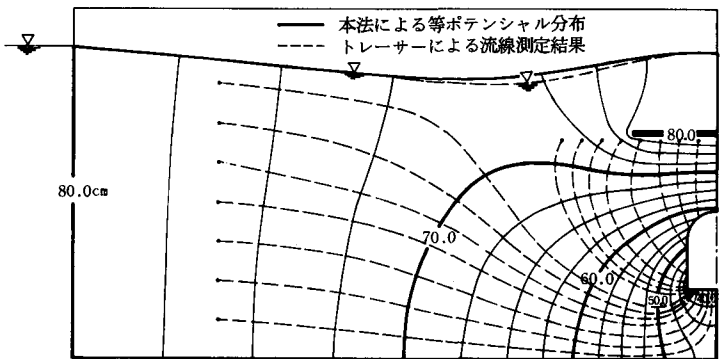


図-9 本法によるポテンシャル分布とトレーサーによる流線の測定結果 (A22モデル)

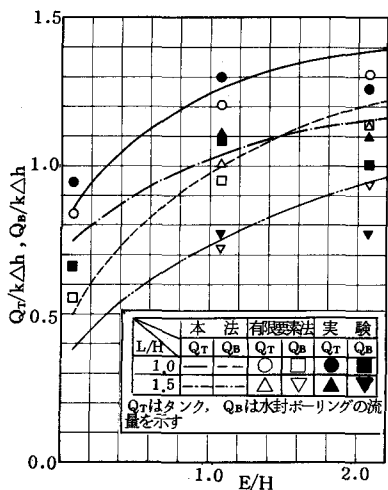


図-10 E/Hと $Q_T/k\Delta h, Q_B/k\Delta h$ の関係

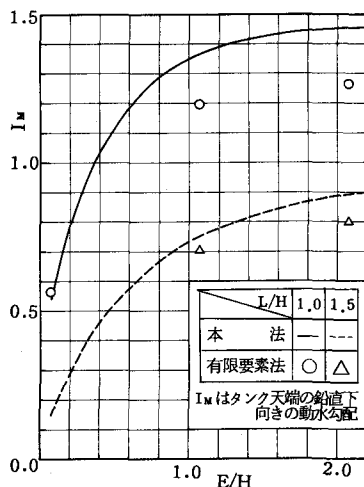


図-11 E/hと I_M の関係

グ長さ(E)とタンク湧水量(Q_T)および水封ボーリング流量(Q_B)の関係を、図-11に本法と有限要素法によるEとタンク天端の鉛直方向動水勾配(I_M)の関係を示している。

図-9の結果より、本法より得られたポテンシャル分布は、実験による地下水流動との整合性がよく、本モデルの地下水流動を適確に再現していることがわかる。図-10については、実験に一部不合理な値を示すが、これは実験装置のスリット幅の精度上の問題と考えられる。よって、全体的には本法と有限要素法および実験結果の合致性はよく、E/Hの増大と共に Q_T, Q_B は増加する合理的な結果と判断できる。更に、本法と有限要素法の値の差異は、図-3と同様で、本法の方が精度が高いと判断してよい。図-11の結果も、両手法による I_M の値は、概ね一致し、両者の差異についても、図-9と同一の理由と考えられる。

以上より、本手法は I_0 と Q_T が正確に算定できる点で、岩盤タンクの浸透流解析に適した手法と判断された。

(2) 大規模タンクモデル

本法を用いて、図-12に示す対称な16個の岩盤タンク(幅15m×高さ20m、天端レベル▽EL-25m)モデルを種々の貯蔵条件下で解析し、有限要素法との比較検討を実施した。なお、タンクは全周幅3mでタンクの一部とみなす^{1) 8)}ゆるみ領域を持つと仮定した。(有限要素法の節点数952、本法の境界要素数298)

表-1に流量(Q)および貯油槽天端の鉛直方向動水勾配(I_M)の算出結果を示す。本表によれば、前節と同様に、 Q, I_M とも本法の値は有限要素法解より幾分大きい値を示すが、全体として十分な合致性を示す。ここで、最大のQはモデル3より10万kℓ当たり(タンク長400m)概ね1.2 m³/hour/10万kℓ、最低の I_M はモデル1より概ね1.8であった。また、モデル2のタンク4において貯油槽に向かう最低の水平方向の動水勾配は

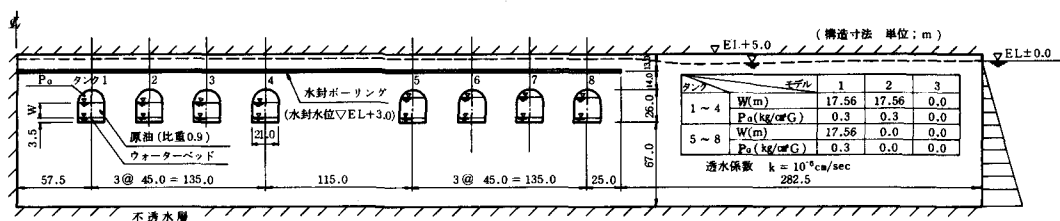


図-12 大規模な岩盤タンクモデルと解析ケース

表-1 タンク湧水量 Q ($\text{m}^3/\text{hour}/400\text{m}$) およびタンク天端の鉛直方向動水勾配 I_M

モデル		タ シ ク							
		1	2	3	4	5	6	7	8
1	本 法	1.12(1.88)	0.90(1.85)	0.89(1.85)	1.12(1.88)	1.12(1.88)	0.90(1.85)	0.90(1.85)	1.08(1.87)
	有限要素法	1.01(1.81)	0.81(1.79)	0.81(1.79)	1.00(1.84)	1.01(1.81)	0.81(1.79)	0.81(1.79)	0.98(1.82)
2	本 法	1.11(1.88)	0.89(1.85)	0.88(1.85)	1.04(1.88)	1.47(2.12)	1.09(2.09)	1.09(2.09)	1.36(2.10)
	有限要素法	1.01(1.81)	0.81(1.79)	0.80(1.79)	0.95(1.83)	1.34(2.02)	1.00(2.00)	0.99(2.00)	1.21(2.03)
3	本 法	1.39(2.12)	1.08(2.09)	1.08(2.09)	1.39(2.12)	1.39(2.12)	1.08(2.09)	1.09(2.09)	1.35(2.10)
	有限要素法	1.27(2.02)	0.98(2.00)	0.98(2.00)	1.24(2.05)	1.27(2.02)	0.98(2.00)	0.98(2.00)	1.21(2.03)

注) 括弧外の値は Q 、括弧内の値は I_M を示す。

0.571 で、この貯蔵条件においても貯蔵油の混合上の問題¹⁰⁾は生じなかった。

以上の結果、本法は複雑な貯蔵条件を有す大規模な岩盤タンクモデルにおいても、データー作成が容易で且つ計算精度が高いという点において、その有用性が確認された。

6. 結論

2次元定常飽和浸透流問題を対象としてグリーン公式の導入による定式化を行なうと共に、本理論の検証およびその応用として本法の岩盤タンクへの適用性を検討した結果、以下の結論が得られた。

- (1) 本法 (A タイプモデル) と上田らの厳密解の湧水量とポテンシャル分布は、非常に高い精度で一致し、湧水量に関する両者の差は 0.3 % 以下であった。
- (2) 本法と有限要素法および Hele-Shaw 実験結果の地下水面形を比較した結果、境界変動モデルへの本法の有効性が確認された。この事実より、本法が非定常問題にも拡張できる可能性が示唆された。
- (3) 単設および大規模タンクモデルを対象として、本法と有限要素法および Hele-Shaw モデル実験の結果を検討した結果、岩盤タンクの浸透流解析上必要となる動水勾配や湧水量が簡便且つ精度よく求まることが認められ、本法の岩盤タンクへの適用性が確認できた。

謝辞

本研究を遂行するにあたり、グリーン公式について理論的な助言を頂いた九州大学水工土木工学科助教授の吉田明德氏、Hele-Shaw 実験を実施された清水建設(株)の嶋田純氏と清川哲志氏に謝意を表します。

参考文献

- (1) 駒田, 中川, 北原, 林; 土木学会論文報告集 第300号, pp. 69 ~ 80, 1980年8月
- (2) 百田, 嶋田, 楠本; 第25回水理講演会論文集, pp.391 ~ 397, 1981年2月
- (3) 木村, 下茂, 立石; 第16回土質工学研究発表会, pp. 1369 ~ 1372, 1981年6月
- (4) 山上, 上村; 中国四国支部第33回学術講演会, pp. 244 ~ 245, 1981年5月
- (5) 井島, 周; 土木学会論文報告集 第252号, pp. 57 ~ 71, 1976年8月
- (6) 宇野, 洪; ポテンシャル, 培風館, 1961年
- (7) 上田, 杉尾; 土木学会論文報告集 第194号, pp. 91 ~ 101, 1971年10月
- (8) 日本立地センター; 石油地下備蓄技術調査研究報告書, pp. 180 ~ 249, 1979年9月
- (9) Åberg, B.; Rock Store 77, Session 4, pp. 175 ~ 189, 1977
- (10) Åberg, B.; Rock Store 77, Session 4, pp. 287 ~ 300, 1977