

粘性および拡散の効果を考慮した成層二層密度流の安定性と界面波について

The Stability and Interfacial Waves of Viscous-Diffusive Stratified Two-Layered Flows

東京工業大学工学部 正 員 日 野 幹 雄

東京工業大学大学院 学生員 Nguyen Son Hung

M. Hino & Nguyen Son Hung, Tokyo Institute of Technology

1. はじめに

成層密度流の安定性に関する研究は多数見られる¹⁾が粘性および拡散の効果に関するものは多くはない。Maslowe & Thompson (1971)²⁾は粘性と拡散を考慮した平行剪断流の安定範囲を数値解法によって求めている。彼らの結論は Reynolds 数の小さい範囲 ($0 < Re < 150$) を除いて、粘性の影響は非常に小さいということであった。しかし、彼らの Reynolds 数の定義に用いられた代表流速と長さはそれぞれ界面における主流の流速と流速分布の遷移層の厚さの約 $1/8$ である。この Reynolds の範囲にある実際の流れは決して少なくない。また Maslowe & Thompson あるいは他の研究者の研究では、密度界面に対する逆対称性をもつ主流の流速と密度分布を仮定することが多い。この逆対称性により、伝播速度が主流の界面速度に等しい一種類の中立擾乱だけが求められている。しかし、二層密度流の界面波は2種類が存在するという多くの報告がなされている (Tsubaki ら (1969)³⁾, 吉田ら (1978)⁴⁾, 室田ら (1978)⁵⁾, 日野ら (1978, 1981)^{6,7)}, 安藤ら (1981)⁸⁾)。この2種類の界面波の性質はかならずしも同じではない。従って、実際の現象により近い流速と密度分布を用い、この安定性の問題を再検討することが必要であると考えられる。本研究は上に指摘したこれらの点を明かにしようとするものである。

2. 基礎方程式および境界条件

(1) 基礎方程式：本研究では粘性、拡散性、非圧縮性流体の平行流の安定問題を取り扱う。さらに粘性係数および拡散係数は鉛直方向の座標の関数であると考ええる。運動方程式、拡散方程式および連続方程式はそれぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \mu \nabla^2 u + \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \mu \nabla^2 v + \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \rho \frac{Dw}{Dt} &= -g\rho - \frac{\partial p}{\partial z} + \mu \nabla^2 w + 2 \frac{d\mu}{dz} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{D\rho}{Dt} = \nabla \cdot (\mathbf{K} \nabla \rho) \dots\dots\dots (2)$$

$$0 = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \dots\dots\dots (3)$$

流速、圧力および密度を

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= (U(z) + u, v, w) \\ p &= p_o + p \\ \rho &= \sigma(z) + \rho \\ w &= W(z) e^{i(kx + nt)} \\ \rho &= \rho(z) e^{i(kx + nt)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

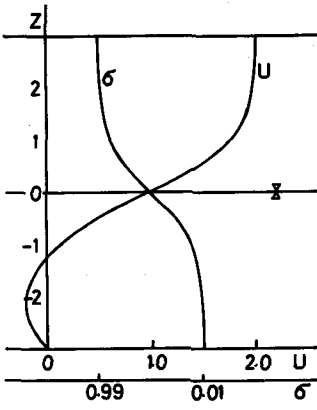


図-1 流速と密度分布

とおく。上式を運動方程式、拡散方程式および連続方程式に代入し、擾乱が存在しないそれぞれの方程式を考慮し、オーダーが小さい項を省略すれば、式(1)、(2)および(3)は次のような無次元形の2つの方程式になる。

$$\begin{aligned}
 W'''' + 2 \frac{\mu'}{\mu} W''' - \left[i \alpha (U-C) R_e \frac{\sigma}{\mu} + 2 \alpha^2 - \frac{\mu''}{\mu} \right] W'' - \left[2 \alpha^2 \frac{\mu'}{\mu} + i (U-C) \alpha R_e \frac{\sigma'}{\mu} \right] W' \\
 + \alpha \left[i (U-C) \alpha^2 R_e \frac{\sigma}{\mu} + i \frac{R_e}{\mu} (\sigma U'' + \sigma' U') + \alpha^3 + \alpha \frac{\mu'''}{\mu} \right] W - \alpha^2 R_e R_i \frac{1}{\mu} \frac{\rho}{\sigma'} = 0 \dots (5) \\
 \rho'' + \frac{K_z'}{K_z} \rho' - \alpha \left[\frac{K_x}{K_z} \alpha + i \alpha (U-C) \frac{R_e P_r}{K_z} \right] \rho - \sigma' \frac{R_e P_r}{K_z} W = 0 \dots (6)
 \end{aligned}$$

無次元化は次のように行われた。

$$z = z/h_r, \alpha = kh_r, g = g \frac{h_r}{U_r^2}, \mu = \frac{\mu}{\mu_r}, K = \frac{K}{K_r}, \sigma = \frac{\sigma}{\sigma_r}, \rho = \frac{\rho}{\sigma_r}, U = \frac{U}{U_r}, W = \frac{W}{U_r}, C = \frac{C}{U_r} \dots (7)$$

ここに、 $h_r, U_r, \sigma_r, \mu_r, K_r$ はそれぞれ代表の長さ、流速、密度、粘性係数および拡散係数である。記号は z 方向に対する一階の微分を表わし、 P_r, R_e および R_i はそれぞれ Prandtl 数、Reynolds 数および Richardson 数である。

$$P_r = \nu_r / K_r, R_e = \frac{U_r h_r}{\nu_r}, R_i = - \frac{g h_r}{U_r^2} \sigma' \dots (8)$$

粘性および拡散係数が鉛直方向の座標に対して一定であり、Boussinesq 近似を行った場合には上記の2つの方程式はより簡単になる。

$$\begin{aligned}
 W'''' - \alpha \{ 2 \alpha + i (U-C) R_e \} W'' + \alpha \{ \alpha^3 + i \alpha^2 R_e (U-C) + i R_e U'' \} W - \alpha^2 R_e R_i \frac{\rho}{\sigma'} = 0 \dots (9) \\
 \rho'' - \alpha \{ \alpha + i (U-C) R_e P_r \} \rho - P_r R_e \sigma' W = 0
 \end{aligned}$$

式(9)の最初の式より ρ を計算し、これをその第二式に代入すれば W の6階常微分方程式が得られる。

$$\begin{aligned}
 W^{VI} - \alpha \{ 3 \alpha + i (U-C) R_e (1+P_r) \} W'''' - 2 i \alpha R_e U' W''' + \{ 3 \alpha^4 + 2 i R_e \alpha^3 (1+P_r) (U-C) \\
 - \alpha^2 P_r R_e (U-C)^2 \} W'' + 2 i \alpha R_e (\alpha^2 U' + U''') W' - \{ \alpha^6 + i \alpha^5 R_e (U-C) (1+P_r) \\
 - \alpha^4 P_r R_e^2 (U-C)^2 - \alpha^2 P_r R_e^2 U'' (U-C) - i \alpha R_e U'''' + P_r R_e^2 R_i \alpha^2 \} W = 0 \dots (10)
 \end{aligned}$$

(2) 境界条件：下層の固定した底面における擾乱に対する境界条件は次のように書ける。

$$W = W' = \rho = 0 \quad \text{at } z = z_0 \dots (11)$$

上層の自由表面における境界条件は近似的に次のようにした。

$$W = W' = \rho = 0 \quad \text{at } z = z_f \dots (12)$$

3. 計算方法

安定性問題の数値解法は差分法、直交関数展開法、直接積分と直交化法などがある。本研究では、直接積分と直交化法を採用し、固有値および固有関数を求めた。まず、4階と2階の常微分方程式系(5)と(6)あるいは6階の微分方程式(10)は次の変化によって6個の1階常微分方程式系に変換しうる。

$$Y_1 = W, Y_2 = W', Y_3 = \rho, Y_4 = \rho', Y_5 = W'', Y_6 = W''' \dots (13)$$

$$\frac{dY}{dt} = F(Y, z) \dots (14)$$

ここに、

$$\begin{aligned}
 F = (Y_2, Y_5, Y_4, f_{41} Y_1 + f_{43} Y_3 + f_{44} Y_4, Y_6, f_{61} Y_1 + f_{62} Y_2 + f_{63} Y_3 \\
 f_{65} Y_5 + f_{66} Y_6)^T
 \end{aligned}$$

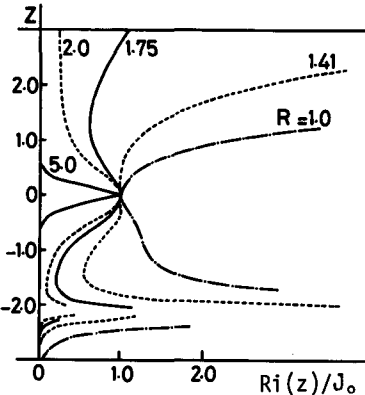


図-2 R による局所的Richardson数の変化

$$\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6)^t$$

(1) 固有値: $\mathbf{P}_k(z)$ ($k=1, 2, 3, 4, 5, 6$) を $z = z_0$ における初期値が次のように指定された 1 階の常微分方程式系(14)の特解とする。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{P}_1(z_0) &= (1, 0, 0, 0, 0, 0)^t \\ \mathbf{P}_2(z_0) &= (0, 1, 0, 0, 0, 0)^t \\ \mathbf{P}_3(z_0) &= (0, 0, 1, 0, 0, 0)^t \\ \mathbf{P}_4(z_0) &= (0, 0, 0, 1, 0, 0)^t \\ \mathbf{P}_5(z_0) &= (0, 0, 0, 0, 1, 0)^t \\ \mathbf{P}_6(z_0) &= (0, 0, 0, 0, 0, 1)^t \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

一般解 $\mathbf{Y}(z)$ はこれらの線型和として表わされる。

$$\mathbf{Y}(z) = \sum_{k=1}^6 C_k \mathbf{P}_k(z) \dots\dots\dots (16)$$

方程式(14)の有義な解が存在するためには境界 z_0 および z_f における境界条件から次の条件が満足されなければならない。

$$\begin{aligned} E &= E(P_r, R_e, R_i, \alpha, C) \\ &= \begin{vmatrix} P_{14}(z_f) & P_{15}(z_f) & P_{16}(z_f) \\ P_{24}(z_f) & P_{25}(z_f) & P_{26}(z_f) \\ P_{34}(z_f) & P_{35}(z_f) & P_{36}(z_f) \end{vmatrix} \\ &= 0 \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

$\mathbf{P}_k(z_f)$ ($k=4, 5, 6$) を求めるには Runge-Kutta-Gill 積分法を用いた。また $\mathbf{P}_k(z)$ ($k=4, 5, 6$) の相互の間の独立性を維持するには、Gram-Schmidt 直交法⁹⁾を用いた。

本研究の計算では、 $z_0 = -3.0$, $z_f = 3.0$ および $\Delta z = 0.01$ とおいた。

4. 流速、密度および局所的 Richardson 数の分布

(1) 流速分布: 本研究では、塩水楔型二層密度流の流速分布を考えて、次のように与える。

$$\begin{cases} U(z) = A + B \tanh(z/L_u) & (z > z_u) \\ U(z) = az^2 + bz + c & (z \leq z_u) \end{cases} \dots\dots\dots (18)$$

上層および下層の流速の絶対値の最大値をそれぞれ U_{max} と U_L とする。

$$\begin{cases} U_{max} = A + B \dots\dots\dots (20) \\ U_L = -b^2/4a + c \dots\dots\dots (21) \end{cases}$$

となる。下層の底面における流速は零である。すなわち、

$$0 = aH_2^2 + b(-H_2) + c \dots\dots\dots (22)$$

式(18)で表わされる曲線が式(19)で表わされる曲線に z

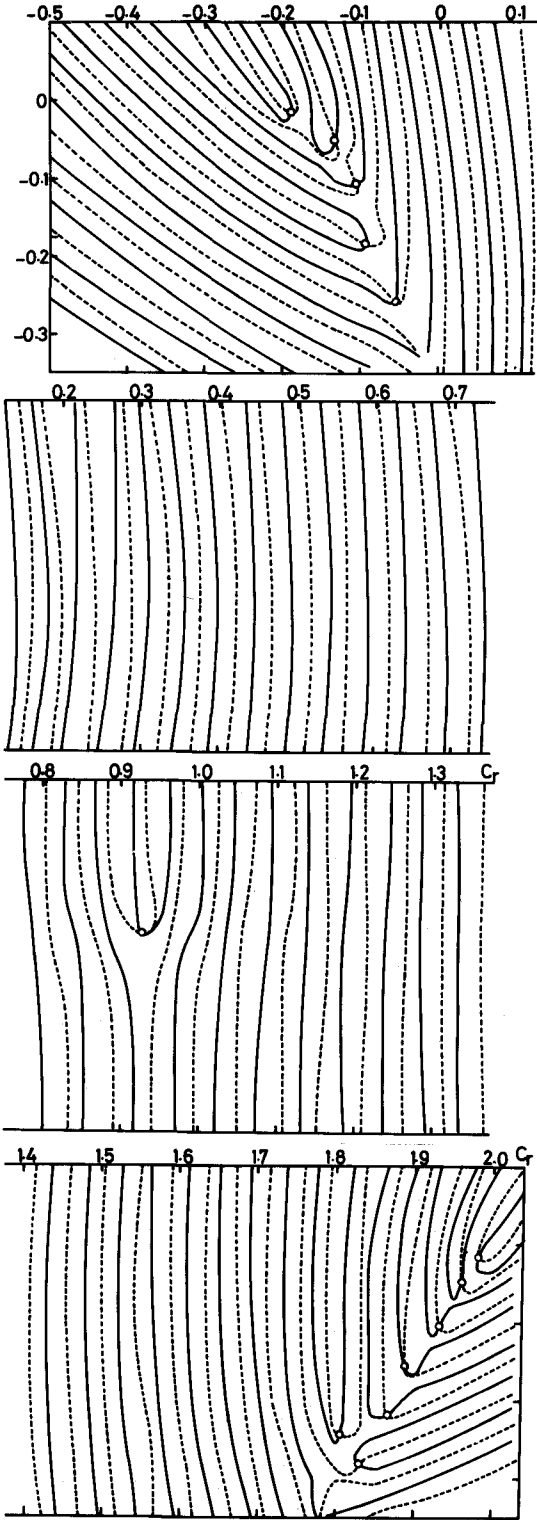


図-3 $R=1.0$ の場合 ($P_r=7.5, R_e=50, J_o=0.15, \alpha=0.70$)
実線: $E_r=0$; 点線: $E_i=0$

$=z_u$ の点で接触する条件は次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} A + B \tanh \frac{z_u}{L_u} = a z_u^2 + b z_u + c \dots\dots\dots (23) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{B}{L_u} \operatorname{sech}^2 \frac{z_u}{L_u} = 2 a z_u + b \dots\dots\dots (24) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} -\frac{B}{L_u^2} \tanh \frac{z_u}{L_u} \operatorname{sech}^2 \frac{z_u}{L_u} = a \dots\dots\dots (25) \end{array} \right.$$

つづいて、次のように無次元化を行う

$$\left. \begin{array}{l} z_* = \frac{z}{L_u}, \quad z_{u*} = \frac{z_u}{L_u}, \quad H_{2*} = \frac{H_2}{L_u}; \quad U_* = \frac{U}{U_{\max}}, \quad U_{L*} = \frac{U_L}{U_{\max}} \\ a_* = a \cdot \frac{L_u^2}{U_{\max}}, \quad b_* = b \cdot \frac{L_u}{U_{\max}}, \quad c_* = \frac{C}{U_{\max}}; \quad A_* = \frac{A}{U_{\max}}, \quad B_* = \frac{B}{U_{\max}} \end{array} \right\}$$

以下、簡単ために無次元量の記号*を省略し、流速分布を書きなおすと次のようになる。

$$\left\{ \begin{array}{l} U(z) = A + B \tanh z \quad (z > z_u) \dots\dots\dots (26) \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} U(z) = a z^2 + b z + c \quad (z \leq z_u) \dots\dots\dots (27) \end{array} \right.$$

上記の条件より $z=z_u$ の点の位置および流速分布の係数は次の式によって求められる。

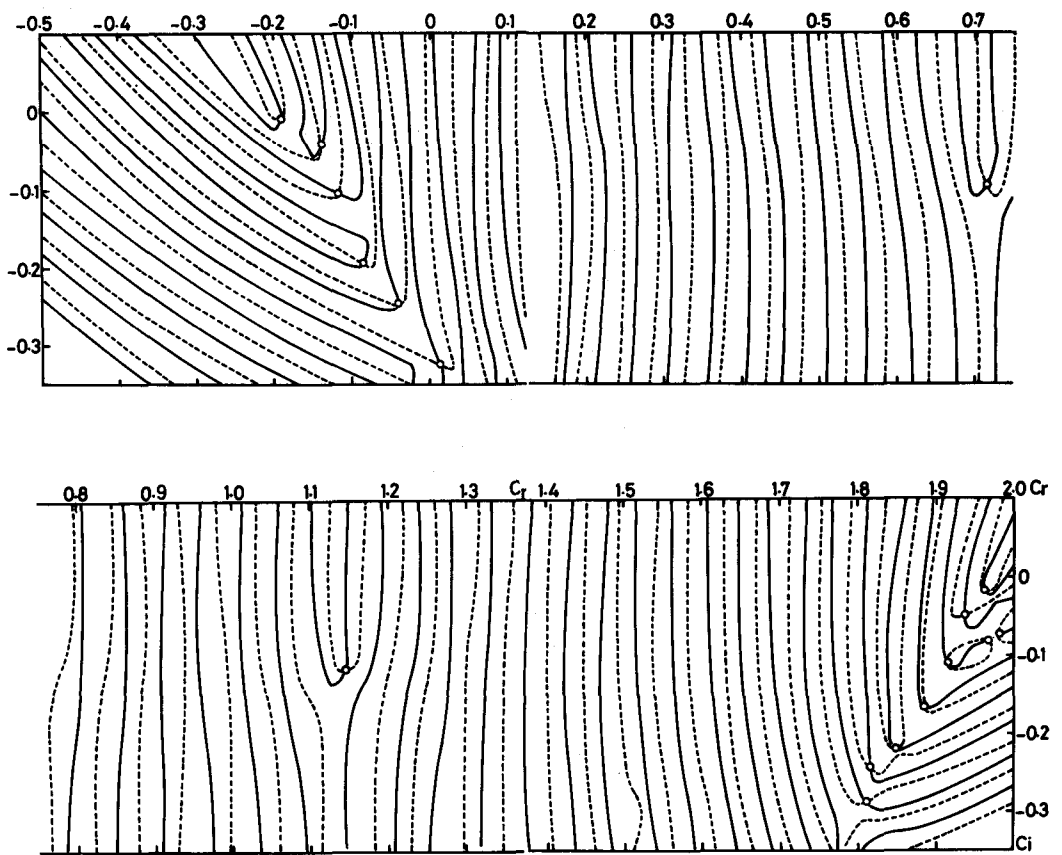


図-4 $R=5.0$ の場合 ($P_r=7.5, R_e=50, I_o=0.15, \alpha=0.70$), 実線: $E_r=0$; 点線: $E_i=0$

$$\frac{1-U_L}{U_L} = \frac{4e^{-z_u} \sinh z_u - 1}{C} \dots\dots\dots (28)$$

ここに,

$$\left. \begin{aligned} C &= \{ 2 (H_2 - z_u) \tanh z_u - 1 \}^2 \\ A &= 1 - B \\ B &= 4 (U_L / C) (\tanh z_u) (\cosh^2 z_u) \\ a &= -4 (U_L / C) \tanh^2 z_u \\ b &= 4 (U_L / C) (\tanh z_u) (1 + 2 z_u + \tanh z_u) \\ c &= U_L \{ 1 - (1 + 2 z_u \tanh z_u)^2 / C \} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (29)$$

(2) 密度分布 : 成層した二層密度流の多くの実験結果より密度分布は次の関数形で充分に近似できる¹⁰⁾。

$$\sigma(z) = \exp \left[-\frac{r}{R} \tanh(Rz) \right] \dots\dots\dots (30)$$

ここに, R は流速と密度分布の遷移層厚さの比である。

(3) 局所的 **Richardson** 数の分布 : 局所的 **Richardson** 数は次のように定義され, 大域的 **Richardson** 数より成層流の安定性についての理解に有効である。

$$\begin{aligned} R_i(z) &= -\frac{gd\sigma/dz}{\sigma(dU/dz)^2} \dots\dots\dots (31) \\ &= J_o \cdot \frac{(1 - \tanh^2 Rz)}{[2B \tanh z (1 - \tanh^2 z)]^2} \quad (z > z_u) \\ &= J_o \cdot \frac{(1 - \tanh^2 Rz)}{(2az + b)^2} \quad (z \leq z_u) \end{aligned} \left. \dots\dots\dots (32) \right\}$$

ここに, J_o は大域的 **Richardson** 数であり, 次のように定義される。

$$J_o = gh_r r / U_r^2 \dots\dots\dots (33)$$

図-1 は本研究に用いられた流速と密度の分布を示し, 図-2 は流速と密度分布の遷移厚さの比 R の変化による局所的 **Richardson** 数分布の変化を示してある。

5. 計算の結果および検討

以下の計算は **Boussinesq** 近似により行ったものである。この場合には, 方程式(30)より密度分布の **parameter** r は大域的 **Richardson** 数の形でのみ安定性に影響を与えることがわかる。図-3 および図-4 に示した結果は **Prandtl** 数 $Pr = 7.5$, **Reynolds** 数 $Re = 50$, 大域的 **Richardson** 数 $J_o = 0.15$, 波数 $\alpha = 0.7$ の場合のものである。

塩水楔型二層密度流の場合における固有値は **Maslowe & Thompson** (1971) が計算した **shear flow** の場合のような対称性をもたない (図-3 と図-4)。同図が示してあるように, 固有値は 8 つのグループに分けられる。すなわち, 伝播速度 C_r の一つは主流の界面流速の近傍にある。残りの 2 つの C_r 値は主流の最大値と最小値の近傍にある。前者は流速と密度分布の遷移層厚さの比 R によって変化するが, 後者はこの比によってあまり変化しない, つまり成層状態の影響をほとんど受けない。また計算した C 面の範囲では第 1 グループの固有値の数は 1 あるいは 2 であるのに対して, 残りの 2 つのグループの数はそれより多いという点が興味深い。

比数 R の効果: $R = 5$ の場合では, C 値が 1 の近傍にある固有値のグループの中にさらに $C_r > 1$ と $C_r < 1$ の 2 つの固有値が認められる。これに対して, $R = 1$ の場合では $C_r < 1$ の固有値が存在するが, $C_r > 1$ の固有値は計算した範囲には存在しない。著者らの実験⁷⁾では, 密度分布の遷移層厚さが薄い塩水楔型二層密度流 ($R > 4$) の場合に 2 種類の界面波すなわち波速が界面流速より大きい **wave I** およびより小さい **wave II**

が観察される。これに対して、厚い中間層を有する塩水楔型二層密度流では wave II だけが見られ、wave I は存在しない。計算結果は実験の結果をよく説明する点は興味深い。また、計算の結果では、 $C_r < 1$ の方がやゝ不安定になりやすい傾向が認められる。

一方、実験で得られた界面波の波速は計算で得られる結果と定量的には異なる傾向が認められる。これは主に実験の流れの界面流速が計算モデルのものより小さいことによると考えられる。この事実を考慮した上で、密度分布を下側へ移動して計算してみたところ、予想した通り擾乱の伝播速度は実験結果に近づくという傾向が認められた。

参考文献

- 1) 日野幹雄：成層流の乱流，谷一郎（編），流体力学の進歩—乱流，丸善，pp.177-219，1980.
- 2) Maslowe, S. A. and J. M. Thompson: Stability of a stratified free shear layer, *Physics of Fluids*, Vol. 14, No. 13, pp. 453-458.
- 3) Tsubaki, T. Hamamura, M. and M. Hashimoto: On the statistical properties of internal waves formed at the interface of arrested saline wedges, *Proc. 13th Congress of IAHR*, C17, pp. 63-74.
- 4) 吉田静男：密度界面における混合機構の研究，土木学会論文報告集，№278，pp. 59-68，1978.
- 5) 室田明，平田健正：成層密度流における内部波特性と混合機構について，第22回水理講演会論文集，土木学会，pp.107-112，1978.
- 6) 日野幹雄，離岡和夫，萩原克：塩淡水境界面における渦列の形成と混合現象，第10回乱流シンポジウム論文集，東京大学宇宙航空研究所，pp.149-153，1978.
- 7) 日野幹雄，グエン・ソン・フン，中村健一：塩水楔型二層密度流における抵抗係数および流速構造，第28回海岸工学講演集，pp.515-519，1981.
- 8) Andow, T., Hamawa, K. and Y. Toba: Experimental study on internal waves in a stratified shear flow (Submitted to *J. Oceanogr. Soc. Japan*, 1980).
- 9) Roberts, S. M. and J. S. Shipman: Two-Point Boundary Value Problems: Shooting Methods, American Elsevier Publ. Comp., New York, pp. 73-86, 1972.
- 10) 日野幹雄：境界問題の解法，朝倉書店，1971.
- 11) Wang, Y. H.: Salinity distribution of highly stratified estuary, *Hydraulics in the Coastal Zone*, A.S.C.E., pp. 130-135, 1977.
- 12) 巽 友正，後藤金英：流れの安定性理論，産業図書，1977.