

壁面剪断乱流場の時系列シミュレーションおよびその統計的特性

Simulation of time series of streamwise velocity in the wall bounded turbulent shear flow and its statistical characteristics

大阪大学工学部 正 員 室 田 明

大阪大学大学院 学生員 ○福 原 輝 幸

1. 緒 論

burstingに関する研究は流体力学のあらゆる分野で精力的になされており、bursting運動が乱れの発生および運動量、乱れエネルギー、物質などの輸送に關与する本質的な機構であることが、動力学的な考察より明らかにされつつある。特に、bursting運動とレイノルズ応力(ejectionやsweep)の關連性およびその微細構造については詳細な検討がなされている。^{1) 2), 3), 4)} 一方、数多くの初期の研究や測定精度の向上した最近の研究から、剪断乱流場における変動物理量の確率密度分布は必ずしも正規分布とはならず、一定の傾向をもって歪んでいることが報告されている。^{5) 6) 7) 8) 9)} 例えば、乱流境界層や開水路乱流では流下方向変動流速 u の歪度 $S(u)$ は壁面ごく近傍 ($y^+ \equiv yu_* / \nu \lesssim 15$, y ; 路床から鉛直上向きの距離、 u_* ; 摩擦速度、 ν ; 動粘性係数) を除けば、 $S(u) < 0$ となり、 u の時間微分 $\dot{u} (= du/dt)$ の歪度 $S(\dot{u})$ は $S(\dot{u}) > 0$ となる。モーメントの予測に関する既往の研究^{6) 9), 10)} は実測から求まる変動量の確率密度分布を既知として、数学的な展開より高次モーメントの予測を行っているが、その前段階である確率密度関数(p. d. f.)自身の歪む原因についてはあまり議論されていない。従って、上述した統計的性質がいかなる物理機構(例えば、burstingなのか断面内2次流なのか、あるいはその他の要因)によるものかは推測の域を脱していない。いずれにせよ、剪断乱流場の時系列特性を知ることが肝要となるが、最近になって興味ある知見が筆者ら¹¹⁾、祢津ら¹²⁾、Wallaceら¹³⁾によって報告されている。その内容とは、burstingが U -時系列に顕著に現われ、大規模なのこぎり歯状の変動として認識されることである。特に、筆者ら¹¹⁾ はのこぎり歯信号の変動規模とその時間規模との間に密接な相関関係の存在するを見い出している。

そこで本研究は、今までの成果に基づいて U -時系列モデルのシミュレーションを実施し、同モデルが統計的に観た剪断乱流場を再現し得るかどうか(これは、高次モーメントの予測にも繋がる問題である。)を実測との比較でもって検討するとともに、burstingが変動量 u および $\dot{u}$ の p. d. f. を歪める原因となるかどうかについて考察しようとするものである。

2. 時系列モデル

実測される流速時系列は種々のスケールをもった乱れの階層構造が反映されたものであるから、 U -時系列のシミュレーションには、乱れの階層性を考慮した方が理想的であり望ましい。しかしながら、実際には、階層間の乱れの相互作用はあまりにも複雑でかつ不明確であること、および本論文の目的が壁面近くの p. d. f. の歪みと bursting の因果関係の解明にあることを考慮して、 U -時系列 $U(t)$ を(1)式のように表現する。

$$U(t) = R(t) + N(t) \quad (1)$$

ここに、 $R(t)$ は大規模なのこぎり歯信号を、 $N(t)$ はそれに重畳する高周波不規則信号をそれぞれ表わす。この種のモデルは混合層における温度時系列モデルと定性的には類似することから、Antoniaらの時系列モデル^{14) 15)} を基本として、 U -時系列のシミュレーションを試みる。

$N(t)$ の p. d. f., $P_N(n)$ は平均値ゼロ、分散 σ_n^2 のガウス分布に従うものとする。

$$P_N(n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \exp\left(-\frac{n^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad (2)$$

$R(t)$ の無次元周期 t_B^+ の p. d. f., $P_{T_B^+}(t_B^+)$ は bursting 周期のそれと同様に対数正規分布に従うものとし、その平均値 $\tilde{t}_B^+$ 、分散 $\tilde{\sigma}_{t_B^+}^2$ は実測値を用いる。

$$P_{T_B^+}(t_B^+) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{t_B^+} t_B^+} \exp \left[-\frac{\{\ln(t_B^+) - \tilde{t}_B^+\}^2}{2\tilde{\sigma}_{t_B^+}^2} \right] \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{t}_B^+ = \frac{\sum_{i=1}^{S_n} \ln(t_{B_i}^+)}{S_n}$, $\tilde{\sigma}_{t_B^+}^2 = \frac{\sum_{i=1}^{S_n} \{\ln(t_{B_i}^+) - \tilde{t}_B^+\}^2}{S_n}$ 。記号 (+) は主流速 U_0 (相対水深 $y/h = 0.7 \sim 0.9$ における平均流速) と水深 h とによる無次元化を意味しており、 $t_B^+ = t_B U_0 / h$ と表現される。 S_n は標本数を表わす。

$R(t)$ の時間規模 t_B^+ と変動の大きさ (振幅) a / u_{rms} r_B の関係は図-1 に示すとおりで、(4) 式に従う。

$$r_B = A [1 - \exp(-\alpha t_B^+)] \quad (4)$$

ここに、 A は $t_B^+ \rightarrow \infty$ での振幅を表わす。

上式はパターン認識法¹¹⁾ から得られたパターン長 (t_B^+) とパターンの振幅の関係より回帰されたものであり、 $R(t)$ の減速部分を表現している。

そこで(4)式を用い、さらに $R(t)$ の加速部分を加えることにより、まず bursting 周期とそれに対応する平均的な変動の規模の間の関係を求める。

この関係を時系列に反映させるための方法として Antonia のモデル¹⁴⁾ を用いるならば、 $R(t)$

は図-2 に示すパターンとなる。(図-2 において加速部分を除去したのが Antonia らのモデルである)。しかしながら、壁面剪断乱流場の流速時系列に対してこの $R(t)$ モデルをそのまま適用するには、次の2点を改良しなければならない。

(i) 時系列 $R(t)$ の上限値は A で抑えられ、他方下限値は一定となること。(ii) 時系列ではそれぞれの t_B^+ に該当する $R(t)$ が必ずしも(4)式に従っておらず、(4)式の周りにばらついた状態にあること。この不合理な点を解消するために、図-2 に示す $R(t)$ の上下限値の周りにそれぞれ分散 $\sigma_{Rt}^{2*}, \sigma_{Rb}^{2*}$ (平均値は共にゼロ) の正規乱数を発生させ、上下限値に重ね合わせる操作を行う。その結果、図-3 に示すような $R(t)$ が得られ、(5)式のように表現される。

$$\left. \begin{aligned} \text{加速部: } R(t) &= a \frac{t_1}{t_0} & 0 < t_1 \leq t_0 \\ \text{減速部: } R(t) &= -\beta t_2^2 + \tau & 0 < t_2 \leq t_B - t_0 \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここで、 t_0 および a は加速するまでの所要時間と $R(t)$ の振幅をそれぞれ表わす。減速部は(4)式と相似な形状となるように2次関数で与えられ、 β と τ は個々の $R(t)$ によってそれぞれ異なる値である。ただし、 σ_{Rt}^* , σ_{Rb}^* は物理的にも、また実測によっても決定され難い量ではあるが、実測との適合 (慣例的な時間平均量は勿論のこと、特に条件付平均値との適合) から推定可能な値である。

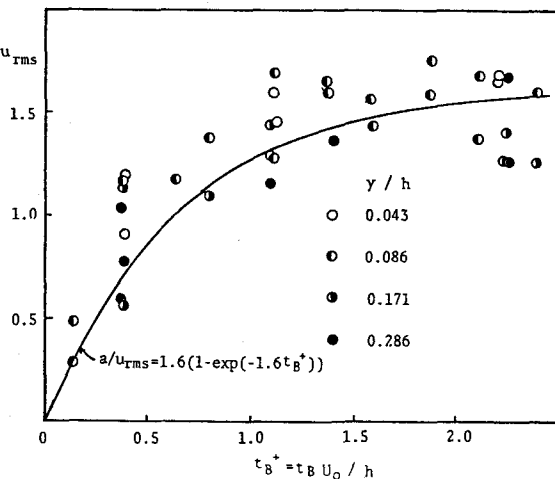


図-1 $R(t)$ の時間規模と変動規模の関係

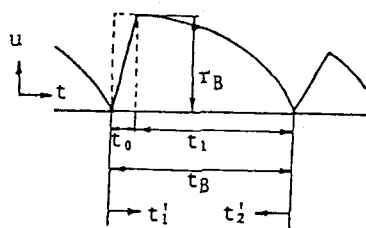


図-2 $R(t)$ の基本モデル

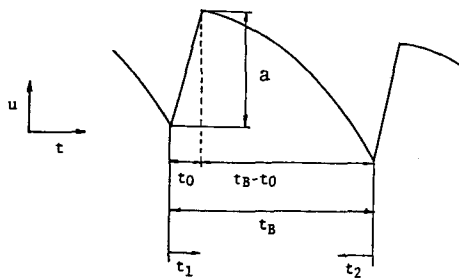


図-3 $R(t)$ のモデル

一方、 $U(t)$ 、 $R(t)$ および $N(t)$ の間の乱れエネルギーの釣り合いは次式を満足しなければならない。

$$u_{rms}^{2*} = r_{rms}^{2*} + \sigma_n^{2*} \tag{6}$$

(6)式の右辺第1項は $R(t)$ による乱れエネルギー（乱れ強さ r. m. s. の2乗）の値である。記号(*)は振幅 A で無次元化していることを示す。(6)式において u_{rms}^* は実測から、 r_{rms}^* はシミュレーションからそれぞれ求められることより、未知量 σ_n^* は推定可能となる。

3. シミュレーションに用いるパラメータの検討

(a) t_0^+ のオーダー $O(t_0^+)$ はパターン認識法より得られる u の平均パターンおよび著者らが既に提案した単純な $\dot{u}$ 一時系列モデルから計算される $S(\dot{u})$ 、 $F(\dot{u})$ と実測の比較より¹⁶⁾、(7)式のごとくを得る。

$$O(t_0^+) = 0.2 \sim 0.4 \tag{7}$$

(b) A のオーダー $O(A)$ および時定数 α は図一1より、次式に示す程度の値をとる。

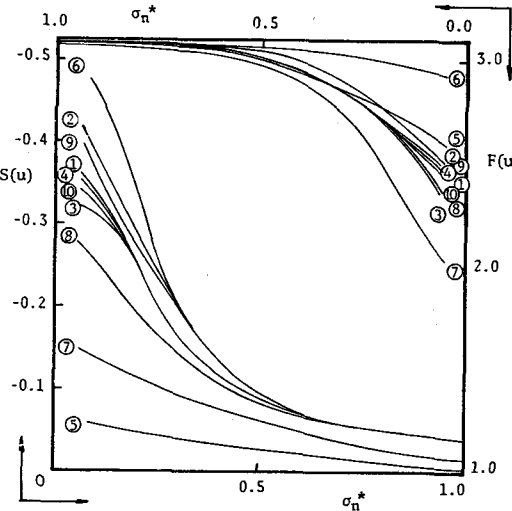
$$O(A) = (1.4 \sim 2.0) \cdot u_{rms} \tag{8} \qquad \alpha = 1.2 \sim 2.0 \tag{9}$$

(c) bursting周期 t_B^+ のp. d. f.を決定する(3)式中の $\tilde{t}_B^+$ および $\tilde{\sigma}_{t_B^+}$ は実測に基づいて、 $\tilde{t}_B^+ = -0.004$ ($\tilde{t}_B^+ = 1.33$)、 $\tilde{\sigma}_{t_B^+} = 0.80$ ($\sigma_{t_B^+} = 1.04$)とする。

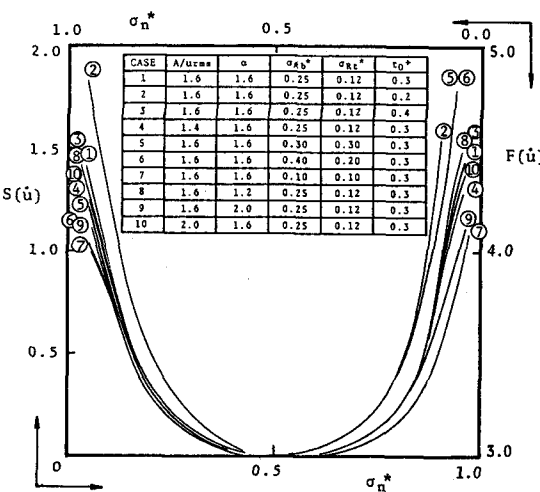
(d) σ_{Rt}^* 、 σ_{Rb}^* は歪度・尖度の値を単に実測値と合わせるようにのみ選択させるのではなく、後で述べるが条件付変動量解析による結果との適合性も加味して決定される。

(e) $N(t)$ の周波数は実測のサンプリング周波数に合わせて 50Hz とする。

次に、(a)から(d)で用いられるパラメータや σ_n^* が高次モーメントに及ぼす影響を示したのが図一4 (a)、(b)である。同図より次の点が指摘される。(i) t_0^+ 、 α 、 σ_{Rb}^* および σ_{Rt}^* を一定にし、 A/u_{rms} を変化させた場合、歪度・尖度とも σ_n^* の大小による差異は殆んどない。(①、④、⑩を参照。)(ii) α 以外のパラメータを一定にし、 α だけを変化させた場合も、歪度・尖度に大きな差異はない。(①、⑧、⑨を参照。)(iii) t_0^+ だけを変化させた場合、尖度に若干差異が生じるが歪度にはそれほど差異がない。(①、②、③を参照。)(iv) σ_{Rb}^* 、 σ_{Rt}^* だけを変化させた場合、特に $S(u)$ 、 $F(u)$ に明確な差異が生じる。(⑤、⑥、⑦を参照。)以上より、歪度・尖度に大きな影響を及ぼすのは σ_{Rb}^* 、 σ_{Rt}^* であり、 $R(t)$ を決定するパラメータは実測程度の値を用いる限り、結果にそれほど大きな影響を与えないことがわかる。(ただしその際、p. d. f.



図一4(a) $S(u)$ 、 $F(u)$ と σ_n^* の関係



図一4(b) $S(\dot{u})$ 、 $F(\dot{u})$ と σ_n^* の関係

の分布形状も実測と適合しているという保証はないことに注意しなければならない。)

また、すべての条件において σ_n^* が 1.0 に近づくに従い歪度はゼロに、尖度は 3.0 付近に漸近しており u および $\dot{u}$ 一時系列はともに完全なランダム過程に移行している。これより、p. d. f. の歪みは秩序だった乱れに起因することが再確認される。

4. 結果およびその考察

図-5 はシミュレーションの 1 例として $A/u_{rms} = 1.6$ 、 $\alpha = 1.6$ 、 $\sigma_{Rt}^* = 0.12$ 、 $\sigma_{Rb}^* = 0.25$ および (6) 式より得られる $\sigma_n^* = 0.2$ を用いて模擬された $u(t)$ 、 $\dot{u}(t)$ と実測のそれらを併示したものである。以下では、この実測および模擬時系列を対象として、統計学的な観点から bursting が剪断乱流場に及ぼす影響を評価する。

4-1 慣例的な平均化操作に基づく結果

乱流場の統計的な記述方法として最も基本的なのが p. d. f. である。図-6 は模擬時系列から求めた u の p. d. f.、 $P_U(u)$ (記号; ○) と実測とを比較したものである。 $P_U(u)$ は中央 ($u = 0$) 付近で若干正の側に傾き、裾の部分で逆に負の側に傾くといった特徴が認められる。こうした $P_U(u)$ の特性は Frenkiel と Klebanoff⁶⁾ が乱流境界層で求めた結果 (図-7) でも同様である。また、 $S(u)$ 、 $F(u)$ と図中に示すごとく実測値と良好に一致する。なお図-6 には $\sigma_{Rb}^* = \sigma_{Rt}^* = 0$ (図-2 に示す $R(t)$ に $N(t)$ を重ね合せた場合) における p. d. f. (記号; ●) も併示している。歪度・尖度は実測値程度であるものの分布形は実測とかなり異っており、単に $S(u)$ 、 $F(u)$ の評価だけで乱流場の再現性を議論できないこと、および Antonia のモデルの流速時系列への適用には限界のあることが判かる。

図-8 は $\dot{u} \equiv du/dt$ の p. d. f.、 $P_{\dot{U}}(\dot{u})$ を示す。模擬された $P_{\dot{U}}(\dot{u})$ の分布形状は実測と良好に一致しており、流速 U に関する情報のみで模擬された $\dot{u}$ 一時系列も実測のそれを忠実に再現していることは、興味深い。

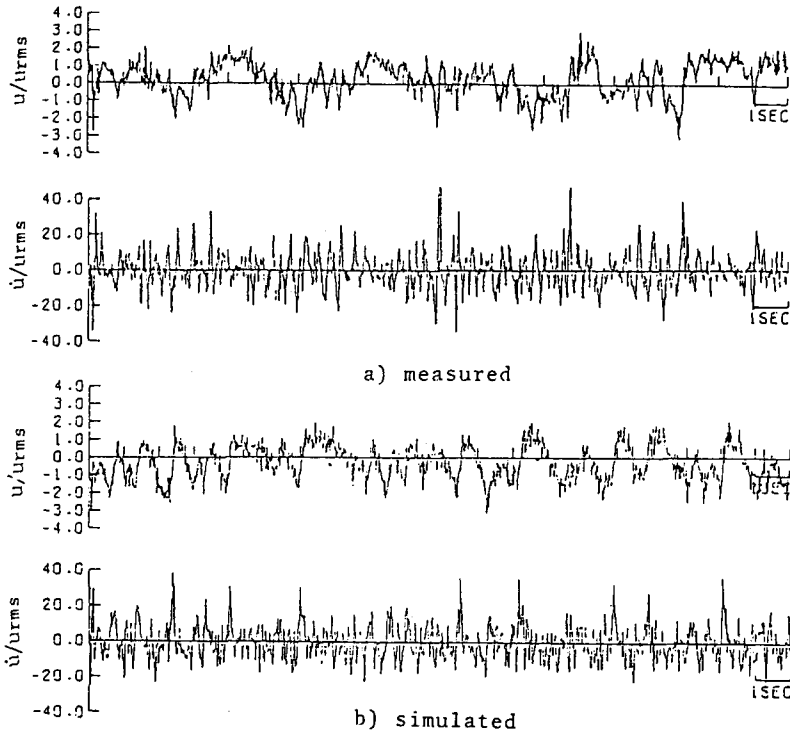


図-5 模擬時系列と実測時系列の比較

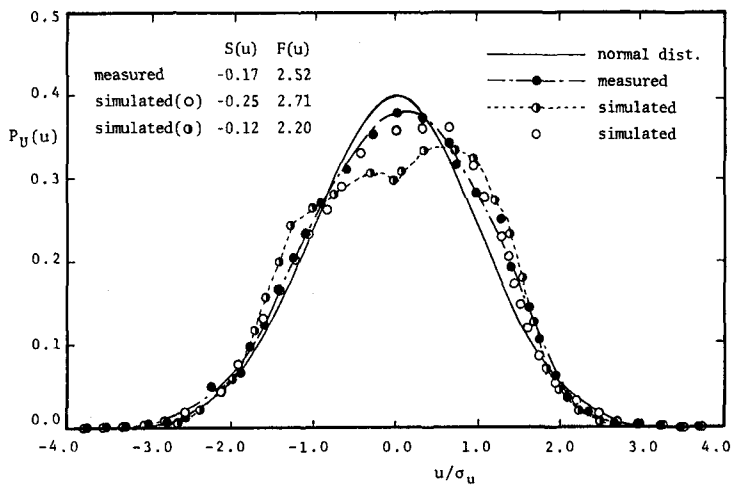


図-6 u の確率密度関数

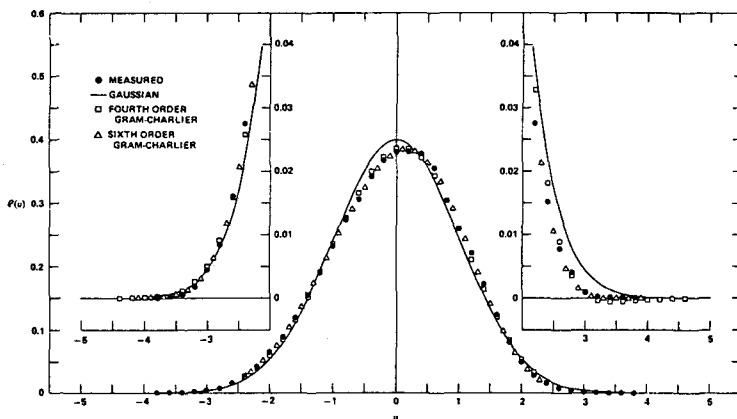


図-7 u の確率密度関数(after Frenkiel et al. 6)

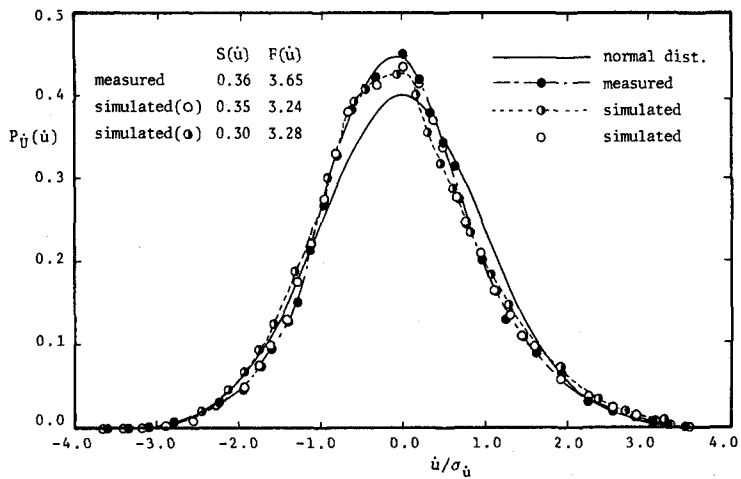


図-8 du/dt の確率密度関数

次に、 u の自己相関関数 $R_u(\tau)$ に関して両時系列の比較を行う。結果は図-9 に示すごとく模擬された $R_u(\tau)$ は実測のそれに比べて遅れ時間 $\tau = 0$ 付近での減衰が大きいが、 $R_u(\tau)$ が正から負へ、さらにその後、負から正へと x 軸を横切る際の τ の値は両者とも良く一致している。 $\tau = 0$ 付近での $R_u(\tau)$ の差異は 50Hz の高周波変動成分 $N(t)$ のみを考慮したために生じたと考えられる。また、模擬された $R_u(\tau)$ には矢印で示すような第2のピーク(second mild maximum)が現われており、その遅れ時間 $\tau_m^+ (=1.67)$ は平均 bursting 周期 $\bar{t}_B^+ (=1.28)$ にほぼ対応している。この結果は Kim と Kline¹⁷⁾ やその他の研究者^{18), 19)} によって指摘されたと同様な結果であり、彼らの抽出した時系列(bursting を反映した時系列)は本モデルと類似していることが推察される。

4-2 条件付変動量解析による結果

$U(t) = R(t)$ のもとで条件付変動量解析を行えば、当然のことながら(4)式で示す t_B^+ と t_B^+ の関係や t_B^+ の p.d.f., $P_{TB^+}(t_B^+)$ は実測程度に再現されよう。ここでは、 $R(t)$ に重畳される $N(t)$ が一体どの程度、条件付平均値に影響を与えるかを調べることで、bursting の検出に対する条件付変動量解析の有効性を確認する。

図-10 (a), (b) は $U(t) = R(t)$ および $U(t) = R(t) + N(t)$ に対してそれぞれパターン認識法を適用して求めた t_B^+ の p.d.f. である。両図とも $P_{TB^+}(t_B^+)$ は対数正規分布に従っているが、後者は $N(t)$ の影響を受けるため前者に比べて短周期側 ($t_B^+ \lesssim 0.75$) で密度が高くなっている。しかしながら模擬された p.d.f. は実測とほぼ一致しているとみなせる。

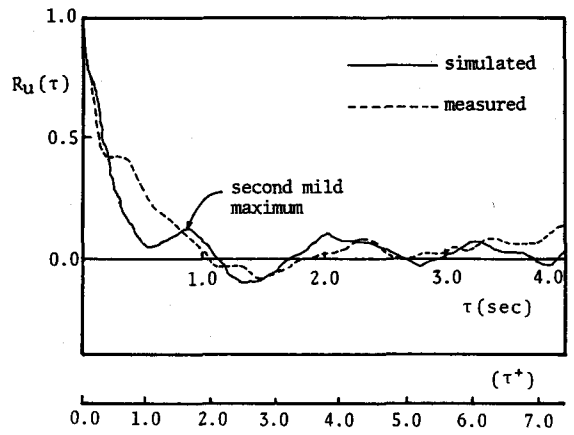
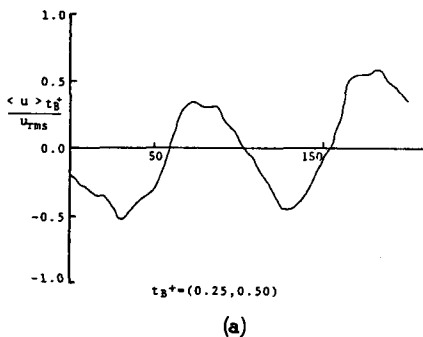


図-9 自己相関関数

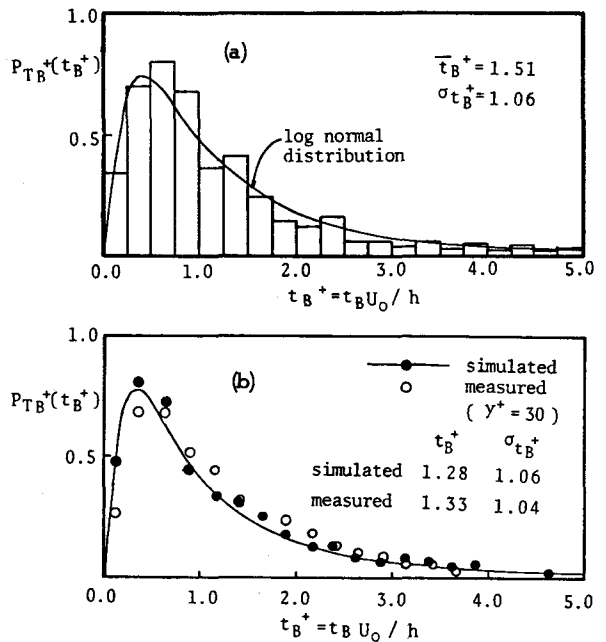


図-10 t_B^+ の確率密度関数

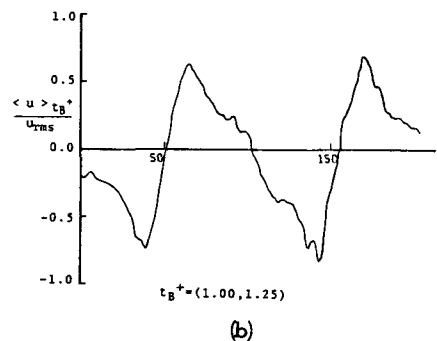


図-11 アンサンブル平均パターン

図-11(a)、(b)は t_B^+ 別のアンサンブル平均パターン $\langle u \rangle t_B^+$ であり、(a)は短周期($t_B^+ = 0.25-0.5$)の場合を、(b)は平均周期程度($t_B^+ = 1.0-1.25$)の場合をそれぞれ示す。(a)の $\langle u \rangle t_B^+$ の振幅は(b)のそれに比べると当然のことながら小さい。また(a)の $\langle u \rangle t_B^+$ は正弦的であるのに対して(b)の $\langle u \rangle t_B^+$ はのこぎり歯状になっており、実測のパターンと同様な傾向にある。

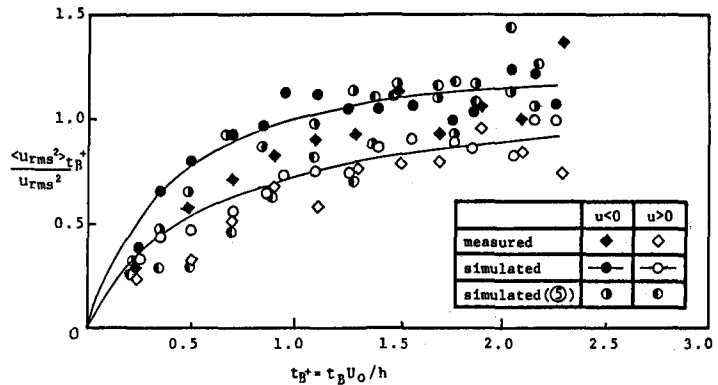


図-12 $\langle u_{rms}^2 \rangle t_B^+$ と t_B^+ の関係

図-12は σ_{Rb}^* 、 σ_{Rt}^* の妥当性を評価することを目的として行った条件付抽出法の結果であり、 u の正負で条件付け t_B^+ 毎にアンサンブル平均した乱れエネルギー $\langle u_{rms}^2 \rangle t_B^+$ と t_B^+ の間の関係を示す。模擬時系列による値(記号; ●と○)は実測と同様に $\langle u_{rms}^2 \rangle t_B^+ | u < 0 > t_B^+ > \langle u_{rms}^2 \rangle t_B^+ | u > 0 > t_B^+$ の関係を満足し、 t_B^+ の増大とともに一定値に漸近するように増大している。同図にはまた図-4の⑤の条件を適用した結果(記号; ●と○)も示している。 $S(u)$ は負となるものの、 $t_B^+ \gtrsim 1.3$ になると u の正負による $\langle u_{rms}^2 \rangle t_B^+$ の大小関係は逆転するようになり、同条件で用いた σ_{Rb}^* 、 σ_{Rt}^* の組み合わせは適当でないことが判かる。

純粋な不規則信号 $N(t)$ を秩序だった信号 $R(t)$ に重量させた時系列 $U(t)$ を対象とはしたものの、条件付変動量解析はburstingの検出に対して有効であることが理解できる。

5. 結 論

流下方向流速 U の時系列特性に着目して、bursting運動により励起されるのこぎり歯信号 $R(t)$ とそれに重畳する不規則信号 $N(t)$ の重ね合わせで表現される時系列 $U(t)$ のシミュレーションを実施し、その統計的性質を調べた。

その結果を、以下に列挙する。

- (1) 変動流速 u およびその時間微分 du/dt の確率密度関数の分布形状および高次モーメント(歪度・尖度)は実測と良く一致する。
- (2) u の自己相関関数 $R_u(\tau)$ には第2のピークが現われ、その遅れ時間は平均bursting周期にほぼ対応する。
- (3) 条件付変動量解析による結果(すなわち、時間規模 t_B^+ とアンサンブル平均 $\langle u \rangle t_B^+$ の分布形および乱れエネルギー $\langle u_{rms}^2 \rangle t_B^+$ との間の関係)も実測と同様な特性を示す。

以上、(1)式に従う単純なモデルではあるが、剪断乱流場における u および du/dt の時系列がある程度再現可能となった。また、同モデルにより、開水路壁近傍(内部領域($y/h \leq 0.3$))¹¹⁾における u および du/dt の確率密度関数の正規分布からの特徴的な隔たりはburstingに起因すると推察される。

最後に、本研究の計算にあたっては当時大阪大学院生だった小田勝也君(現、運輸省)の協力を得た。記して謝意を表します。

参 考 文 献

- (1) Brodkey, R. S., Wallace, J. M. and Eckelmann, H.; J. Fluid Mech., Vol. 63, 1974
- (2) Lu, S. S., Willmarth, W. W.; J. Fluid Mech., Vol. 60, 1973
- (3) 中川博次・祢津家久; 第25回水理講演会論文集, 1981
- (4) 室田 明・福原輝幸; 第36回年次学術講演会講演概要集, 1981

- (5) 佐藤 勝 ; 大阪大学特別研究, 1981
- (6) Frenkiel, F. N. Klebanoff, P. S. ; The Physics of fluids , Vol. 16, 1973
- (7) Laufer, J. ; N. A. C. A. Tech. Rep. TR-1174, 1954
- (8) 今本博健 ; 土木学会論文報告集、第 197 号、1971
- (9) Nakagawa, H., Nezu, I. ; J. Fluid Mech., Vol. 80, 1977
- (10) Monin, A. S., Yaglom, A. M. ; Statistical Fluid Mechanics, Vol. 1, M. I. T. Press, 1971
- (11) 室田 明・福原輝幸・小田勝也 ; 土木学会論文報告集, 投稿中
- (12) 富永晃宏・中川博次・称津家久 ; 第 35 回年次学術講演会講演概要集, 1980
- (13) Wallace, J. M., Brodkey, R. S., Eckelmann, H. ; J. Fluid Mech., Vol. 83, 1977
- (14) Antonia, R. A., Atkinson, J. D. ; The Physics of Fluids, Vol. 19, 1976
- (15) Sreenivasan, K. R., Antonia, R. A. ; 6th., Int. Heat Transfer, 1978
- (16) 室田 明・福原輝幸 ; 昭和 56 年度関西支部年次学術講演概要, 1981
- (17) Kim, H. T., Kline, S. J., Reynolds, W. C. ; J. Fluid Mech., Vol. 51, 1971
- (18) 川端規之・日野幹雄・山田 正 ; 第 35 回年次学術講演会講演概要集, 1980
- (19) 浅野富夫・岩佐義朗・西原 巧 ; 第 23 回水理講演会論文集, 1979